

Zadaci za vježbu pred trecu pisanu provjeru znanja

◇ Trigonometrijske jednadzbe koje se svode na osnovne ◇

🍃 Zadatak 1: Rijesi trigonometrijsku jednadzbu:

$$\sin 2x - 1 = 0$$

🍃 Zadatak 2: Rijesi trigonometrijsku jednadzbu:

$$\sin x + \sqrt{2} = -\sin x$$

🍃 Zadatak 3: Rijesi trigonometrijsku jednadzbu:

$$2 \operatorname{tg} x + 2\sqrt{3} = 0$$

🍃 Zadatak 4: Rijesi trigonometrijsku jednadzbu:

$$2 \cos \left(\frac{3x}{2} - \frac{3\pi}{4} \right) + 1 = 0$$

🍃 Zadatak 5: Rijesi trigonometrijsku jednadzbu:

$$\frac{1}{2 \sin \left(\frac{x}{2} - \frac{4\pi}{3} \right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

🍃 Zadatak 6: Rijesi trigonometrijsku jednadzbu:

$$\frac{\sqrt{3}}{-3 \operatorname{ctg} \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)} - 1 = 0$$

🍃 Zadatak 7: Rijesi trigonometrijsku jednadzbu:

$$\sqrt{3} - 3 \operatorname{tg} \left(\frac{2x}{3} - \frac{3\pi}{2} \right) = 0$$

🍃 Zadatak 8: Rijesi trigonometrijsku jednadzbu:

$$\frac{\cos \left(3x - \frac{5\pi}{4} \right)}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

🍃 Zadatak 9: Rijesi trigonometrijsku jednadzbu:

$$\operatorname{tg} \left(2x - \frac{3\pi}{2} \right) = -\operatorname{tg} \left(3x - \frac{2\pi}{3} \right)$$

Napomena: Ova jednadzba se rješava na način da se primjeni svojstvo parnosti odnosno neparnosti trigonometrijske funkcije tangensa te se predznak – "uvuče" unutar funkcije na desnoj strani. Na taj način se jednadzba svede na oblik $\text{tg}(ax + b) = \text{tg}(cx + d)$ koji se lako onda riješi.

🍃 Zadatak 10: Riješi trigonometrijsku jednadzbu:

$$\text{ctg } 2x + \text{ctg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} \right) = 0$$

Napomena: Ova jednadzba se rješava na način da se prvo jedan sumand "prebaci" na desnu stranu jednadzbe. Nadalje se primjeni svojstvo parnosti odnosno neparnosti trigonometrijske funkcije kotangensa te se predznak – "uvuče" unutar funkcije na desnoj strani. Na taj način se jednadzba svede na oblik $\text{ctg}(ax + b) = \text{ctg}(cx + d)$ koji se lako onda riješi.

🍃 Zadatak 11: Riješi trigonometrijsku jednadzbu:

$$\sin \left(2x - \frac{\pi}{2} \right) + \sin \frac{x}{2} = 0$$

Napomena: Ova jednadzba se rješava na način da se prvo jedan sumand "prebaci" na desnu stranu jednadzbe. Nadalje se primjeni svojstvo parnosti odnosno neparnosti trigonometrijske funkcije sinusa te se predznak – "uvuče" unutar funkcije na desnoj strani. Na taj način se jednadzba svede na oblik $\text{ctg}(ax + b) = \text{ctg}(cx + d)$ koji se lako onda riješi.

🍃 Zadatak 12: Riješi trigonometrijsku jednadzbu:

$$\cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \frac{x}{4} = 0$$

Napomena: Ova jednadzba se rješava na način da se prvo jedan sumand "prebaci" na desnu stranu jednadzbe. Onda se na desnoj strani stvori problem jer je kosinus parna funkcija pa se ne može lako riješiti predznaka –. No prisjetim se formula redukcije odnosno da između ostaloga vrijedi $-\cos x = \cos(x + \pi)$. Na taj način se jednadzba svede na oblik $\cos(ax + b) = \cos(cx + d)$ koji se lako onda riješi.

🍃 Zadatak 13: Riješi trigonometrijsku jednadzbu:

$$\cos \left(x - \frac{7\pi}{4} \right) - \cos \left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

🍃 Zadatak 14: Riješi trigonometrijsku jednadzbu:

$$\text{tg } x - \text{tg} \left(4x + \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

🍃 Zadatak 15: Riješi trigonometrijsku jednadzbu:

$$\sin x = \sin \left(3x - \frac{3\pi}{2} \right)$$

🍃 Zadatak 16: Rijesi trigonometrijsku jednadzbu:

$$\sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2}$$

Napomena: Kod ove se jednadzbe primjene formule redukcije te se na taj način jednadzba svede na osnovnu.

🍃 Zadatak 17: Rijesi trigonometrijsku jednadzbu:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(\pi + x) = \sqrt{3}$$

Napomena: Kod ove se jednadzbe primjene formule redukcije te se na taj način jednadzba svede na osnovnu.

◆ Trigonometrijske jednadzbe koje se svede na algebarske ◆

🍃 Zadatak 18: Rijesi trigonometrijsku jednadzbu:

$$\sin^2 2x + \sin^2 x = 1$$

Napomena: Primjeni se činjenica da vrijedi identitet za sinus dvostrukog kuta, odnosno $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Imajući to na umu vrijedi $\sin^2 2x = 4 \sin^2 x \cos^2 x$. Nadalje prisjetim se da zbog temeljnog trigonometrijskog identiteta vrijedi $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Uz supstituciju $t = \sin^2 x$ jednadzba se svede na kvadratnu.

🍃 Zadatak 19: Rijesi trigonometrijsku jednadzbu:

$$3 \sin \frac{x}{4} + 3 = \cos^2 \frac{x}{4}$$

Napomena: Prisjetim se da zbog temeljnog trigonometrijskog identiteta vrijedi $\cos^2 \frac{x}{4} = 1 - \sin^2 \frac{x}{4}$. Uz supstituciju $t = \sin \frac{x}{4}$ jednadzba se svede na kvadratnu.

🍃 Zadatak 20: Rijesi trigonometrijsku jednadzbu:

$$\cos^2 x - \cos 2x = \sin x$$

Napomena: Primjeni se činjenica da vrijedi identitet za kosinus dvostrukog kuta, odnosno $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$. Uz supstituciju $t = \sin x$ jednadzba se svede na kvadratnu.

🍃 Zadatak 21: Rijesi trigonometrijsku jednadzbu:

$$4 \sin x + \cos 2x = 1$$

Napomena: Primjeni se činjenica da vrijedi identitet za kosinus dvostrukog kuta, odnosno $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$. Uz supstituciju $t = \sin x$ jednadžba se svede na kvadratnu.

☞ Zadatak 22: Rijesi trigonometrijsku jednadžbu:

$$\cos 2x + 3 \sin x = 2$$

Napomena: Primjeni se činjenica da vrijedi identitet za kosinus dvostrukog kuta, odnosno $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$. Uz supstituciju $t = \sin x$ jednadžba se svede na kvadratnu.

☞ Zadatak 23: Rijesi trigonometrijsku jednadžbu:

$$\sin^2 8x - \sin^2 4x = -1$$

Napomena: Primjeni se činjenica da vrijedi identitet za sinus dvostrukog kuta, odnosno $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Imajući to na umu vrijedi $\sin^2 8x = 4 \sin^2 4x \cos^2 4x$. Nadalje prisjetim se da zbog temeljnog trigonometrijskog identiteta vrijedi $\cos^2 4x = 1 - \sin^2 4x$. Uz supstituciju $t = \sin^2 4x$ jednadžba se svede na kvadratnu.

[★] Zadatak 24: Rijesi trigonometrijsku jednadžbu:

$$\sin^4 \frac{x}{3} + \cos^4 \frac{x}{3} = \frac{5}{8}$$

Napomena: Primjenim činjenicu da vrijedi osnovni trigonometrijski identitet, odnosno da vrijedi $\sin^2 \frac{x}{3} + \cos^2 \frac{x}{3} = 1$. Kvadriram li taj izraz dobijem da vrijedi $\sin^4 \frac{x}{4} + 2 \sin^2 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4} + \cos^4 \frac{x}{4} = 1$. "Prebacim" li $2 \sin^2 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4}$ na desnu stranu uočavam da mora vrijediti $\sin^4 \frac{x}{4} + \cos^4 \frac{x}{4} = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4}$. Nadalje prisjetim se da zbog temeljnog trigonometrijskog identiteta vrijedi $\cos^2 \frac{x}{3} = 1 - \sin^2 \frac{x}{3}$. Uz supstituciju $t = \sin^2 \frac{x}{3}$ jednadžba se svede na kvadratnu.

☞ Zadatak 25: Rijesi trigonometrijsku jednadžbu:

$$\sin \frac{x}{2} + \cos x = 1$$

Napomena: Primjeni se činjenica da vrijedi identitet za kosinus dvostrukog kuta, odnosno $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$. Shvatim li kut x kao dvostruki polovni kut $\frac{x}{2}$ mogu pisati da vrijedi $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$. Nadalje prisjetim se da zbog temeljnog trigonometrijskog identiteta vrijedi $\cos^2 \frac{x}{2} = 1 - \sin^2 \frac{x}{2}$. Uz supstituciju $t = \sin \frac{x}{2}$ jednadžba se svede na kvadratnu.

☞ Zadatak 26: Rijesi trigonometrijsku jednadzbu:

$$3 \operatorname{tg} x - 2 \cos x + \frac{3}{\cos x} = 0$$

Napomena: Naprije uocim da za tangens vrijedi $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Nadalje jednadzbu pomnozim s $\cos x$. Uvodjenjem supstitucije $t = \cos x$ jednadzba se svode na kvadratnu.

☞ Zadatak 27: Rijesi trigonometrijsku jednadzbu:

$$3 \sin x + 4 \cos x = 5$$

Napomena: Imajuci na umu da vrijedi $\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$, te $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$,

uz supstituciju $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ jednadzba se svode na algebarsku, vecinom kvadratnu, a ponekad cak i na linearnu.

☞ Zadatak 28: Rijesi trigonometrijsku jednadzbu:

$$4 \sin 3x + 3 \cos 3x = 5.2$$

Napomena: Imajuci na umu da vrijedi $\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$, te $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$

mogu uociti da ce vrijediti $\sin 3x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{3x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{3x}{2}}$, te $\cos 3x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{3x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{3x}{2}}$. Uz

supstituciju $t = \operatorname{tg} \frac{3x}{2}$ jednadzba se svode na algebarsku, vecinom kvadratnu, a ponekad cak i na linearnu.

◆ Homogene trigonometrijske jednadzbe ◆

☞ Zadatak 29: Rijesi trigonometrijsku jednadzbu:

$$3 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x + 8 \cos^2 x = 2$$

Napomena: Uocimo da se 2 na desnoj strani moze zapisati kao $2 \cdot 1$. Prisjetim se temeljnog trigonometrijskog identiteta, odnosno da vrijedi $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. To uvrstim u jednadzbu, podijelim je s $\cos^2 x$, te sredim. Uz supstituciju $t = \operatorname{tg} x$ jednadzba se svode na kvadratnu.

☞ Zadatak 29: Rijesi trigonometrijsku jednadzbu:

$$2 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 1$$

Napomena: Prisjetim se temeljnog trigonometrijskog identiteta, odnosno da vrijedi $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. To uvrstim u jednadzbu, podijelim je s $\cos^2 x$, te sredim. Uz supstituciju $t = \operatorname{tg} x$ jednadzba se sveđe na kvadratnu.

☞ Zadatak 30: Rijesi trigonometrijsku jednadzbu:

$$2 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x = 4$$

Napomena: Uocimo da se 4 na desnoj strani može zapisati kao $4 \cdot 1$. Prisjetim se temeljnog trigonometrijskog identiteta, odnosno da vrijedi $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. To uvrstim u jednadzbu, podijelim je s $\cos^2 x$, te sredim. Uz supstituciju $t = \operatorname{tg} x$ jednadzba se sveđe na kvadratnu.

☞ Zadatak 31: Rijesi trigonometrijsku jednadzbu:

$$6 \sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 2$$

Napomena: Uocimo da se 2 na desnoj strani može zapisati kao $2 \cdot 1$. Prisjetim se temeljnog trigonometrijskog identiteta, odnosno da vrijedi $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. To uvrstim u jednadzbu, podijelim je s $\cos^2 x$, te sredim. Uz supstituciju $t = \operatorname{tg} x$ jednadzba se sveđe na kvadratnu.

☞ Zadatak 32: Rijesi trigonometrijsku jednadzbu:

$$3 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$$

Napomena: Podijelim jednadzbu s $\cos^2 x$, te sredim. Uz supstituciju $t = \operatorname{tg} x$ jednadzba se sveđe na kvadratnu.

☞ Zadatak 33: Rijesi trigonometrijsku jednadzbu:

$$\operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x = 4$$

Napomena: Prisjetimo se da za tangens odnosno kotangens vrijedi $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ odnosno $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$. To uvrstim u jednadzbu, te pomnožim cijelu jednadzbu s $\sin x \cos x$. Nakon sredjivanja podijelim jednadzbu s $\cos^2 x$, te opet sredim. Uz supstituciju $t = \operatorname{tg} x$ jednadzba se sveđe na kvadratnu.

◇ Trigonometrijske jednadzbe koje se rješavaju rastavljanjem na faktore ◇

🍃 Zadatak 34: Riješi trigonometrijsku jednadzbu:

$$\sin x - \cos x - \sin x \cos x + 1 = 0$$

Napomena: Izlucim iz drugog i teceg clana sume u jednadzbi $-\cos x$ te dobijem $\sin x - \cos x (1 + \sin x) + 1 = 0$. Promijenim malo poredak clanova sume tako da dobijem sljedeći oblik jednadzbe $1 + \sin x - \cos x (1 + \sin x) = 0$. Uocim da sada mogu izluciti $1 + \sin x$. Ucinim li to jednadzba se sveđe na sljedeći oblik $(1 + \sin x)(1 - \cos x) = 0$ koji se lako riješi.

[*] Zadatak 35: Riješi trigonometrijsku jednadzbu:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = \cos 2x$$

Napomena: Dakle prisjetim se da vrijedi algebarski identitet

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Primjenim li ga na danu jednadzbu onda ona prelazi u oblik

$$(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) = \cos 2x$$

Nadalje prisjetim se da vrijedi temeljni trigonometrijski identitet, odnosno $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ i da vrijedi identitet za kosinus dvostrukog kuta, odnosno $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$. Primjenim li to na jednadzbu onda prelazi u sljedeći oblik

$$(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Izraz na desnoj strani rapisem po identitetu za razliku kvadrata, odnosno $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Primjenim li to na jednadzbu onda prelazi u sljedeći oblik

$$(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) = (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)$$

"Prebacim" izraz na desnoj strani na lijevu

$$(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) - (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x) = 0$$

Izlucim $(\sin x + \cos x)$

$$(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x - (\sin x - \cos x)) = 0$$

$$(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x - \sin x + \cos x) = 0$$

Jednadzba iz prve zagrade se lako riješi, dok se ona iz druge zagrade rješava po slicnom principu kao i ona u zadatku trideset i cetiri.

[★] Zadatak 36: Rijesi trigonometrijsku jednadzbu:

$$\sin x + \cos x = \sin^3 x + \cos^3 x$$

Napomena: Jednadzba se rješava veoma slično onoj u zadatku trideset i pet.

🍃 Zadatak 37: Rijesi trigonometrijsku jednadzbu:

$$2 - \sin 2x = \cos x - \sin x$$

Napomena: Primjeni se činjenica da vrijedi identitet za sinus dvostrukog kuta, odnosno $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Nakon toga jednadzba se svede na jednadzbu koja se rješava po sličnom principu kao i ona u zadatku trideset i četiri.

🍃 Zadatak 38: Rijesi trigonometrijsku jednadzbu:

$$\sin 2x + 2 \cos x = 1 + \sin x$$

Napomena: Primjeni se činjenica da vrijedi identitet za sinus dvostrukog kuta, odnosno $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Nakon toga jednadzba se svede na jednadzbu koja se rješava po sličnom principu kao i ona u zadatku trideset i četiri.

🍃 Zadatak 39: Rijesi trigonometrijsku jednadzbu

$$\sin^3 x + \sin^2 x = 1 + \sin x$$

Napomena: Izlucim $\sin^2 x$, te "prebacim" sve s desne strane jednadzbe na lijevu. Na taj način jednadzba prijedje u sljedeći oblik

$$\sin^2 x (\sin x + 1) - (1 + \sin x) = 0$$

Izlucim $1 + \sin x$ te jednadzba poprimi sljedeći oblik

$$(1 + \sin x) (\sin^2 x - 1) = 0$$

Jednadzbe iz obje zagrade se sada poprilično lako rješese.

[★] Zadatak 40: Rijesi trigonometrijsku jednadzbu:

$$\sin^3 x - \cos^3 x = 1 + \sin x \cos x$$

Napomena: Dakle prisjetim se da vrijedi algebarski identitet

$$a^3 - b^3 = (a - b) (a^2 + ab + b^2)$$

Primjenim li ga na danu jednadzbu onda ona prelazi u oblik

$$(\sin x - \cos x) (\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x) = 1 + \sin x \cos x$$

Nadalje prisjetim se da vrijedi temeljni trigonometrijski identitet, odnosno $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Primjenim li to na jednadzbu onda prelazi u sljedeći oblik

$$(\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x) = 1 + \sin x \cos x$$

"Prebacim" izraz na desnoj strani na lijevu

$$(\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x) - (1 + \sin x \cos x) = 0$$

Izlucim $1 + \sin x \cos x$

$$(1 + \sin x \cos x)(\sin x - \cos x - 1) = 0$$

Jednadzba iz prve zagrade se lako riješi nakon što se primjeni identitet za sinus dvostrukog kuta, odnosno $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Odnosno možemo uočiti da mora vrijediti $\frac{\sin 2x}{2} = \sin x \cos x$ (ta jednadzba zapravo nema rješenja!). Ima-

juci na umu da vrijedi $\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$, te $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$, uz supstituciju

$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ jednadzba iz druge zagrade se svede na algebarsku, većinom kvadratnu, a ponekad čak i na linearnu.

 Zadatak 41: Riješi trigonometrijsku jednadzbu:

$$\sin 2x = \operatorname{tg} x$$

Napomena: Prisjetimo se da za tangens vrijedi $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, dok se druge strane prisjetim da također vrijedi identitet za sinus dvostrukog kuta, odnosno $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Imajući to na umu jednadzba prelazi u sljedeći oblik

$$2 \sin x \cos x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Cijelu jednadzbu pomnožim s $\cos x$, pa jednadzba prijedje u oblik

$$2 \sin x \cos^2 x = \sin x$$

"Prebacim" $\sin x$ na s desne na lijevu stranu jednadzbe te izlucim $\sin x$, tada jednadzba poprima oblik

$$2 \sin x \cos^2 x - \sin x = 0$$

$$\sin x (2 \cos^2 x - 1) = 0$$

Dobivena jednadzba se relativno lako riješi.

 Zadatak 42: Riješi trigonometrijsku jednadzbu:

$$\operatorname{tg} 2x = \sin 4x$$

Napomena: Jednadzba se u rješava u potpunosti na isti način kao i ona iz zadatka četrdeset i jedan.

◆ Jos neke trigonometrijske jednadzbe ◆

[★] Zadatak 43: Rijesi trigonometrijsku jednadzbu:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x$$

Napomena: Primjenim činjenicu da vrijedi osnovni trigonometrijski identitet, odnosno da vrijedi $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Kvadriram li taj izraz dobijem da vrijedi $\sin^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = 1$. "Prebacim" li $2 \sin^2 x \cos^2 x$ na desnu stranu uocavam da mora vrijediti $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$. Nadalje prisjetim se da zbog temeljnog trigonometrijskog identiteta vrijedi $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Primjenim li ova razmatranja jednadzba prelazi u oblik

$$1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = \cos 4x$$

Prisjetim se da vrijedi identitet za kosinus dvostrukog kuta, odnosno $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$. U našem slučaju to znači da vrijedi $\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$. Primjenim li to jednadzba prelazi u oblik

$$1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$$

Primjenim li algebarski identitet $a^n b^n = (ab)^n$ jednadzba prelazi u oblik

$$1 - 2 (\sin x \cos x)^2 = \cos^2 2x - \sin^2 2x$$

Prisjetim se da vrijedi identitet za sinus dvostrukog kuta, odnosno $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Odnosno možemo uočiti da mora vrijediti $\frac{\sin 2x}{2} = \sin x \cos x$. Jednadzba prelazi u oblik

$$1 - 2 \left(\frac{\sin 2x}{2} \right)^2 = \cos^2 2x - \sin^2 2x$$

Prisjetim se da zbog temeljnog trigonometrijskog identiteta vrijedi $\cos^2 2x = 1 - \sin^2 2x$. Jednadzba prelazi u oblik

$$1 - 2 \frac{\sin^2 2x}{2} = 1 - \sin^2 2x - \sin^2 2x$$

No uz još malo sredjivanja jednadzba se svede na oblik $\sin^2 2x = 0$ koja se lako riješi.

[★] Zadatak 44: Rijesi trigonometrijsku jednadzbu:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \cos x$$

Napomena: Primjenim činjenicu da vrijedi osnovni trigonometrijski identitet, odnosno da vrijedi $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Kvadriram li taj izraz dobijem da vrijedi

$\sin^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = 1$. "Prebacim" li $2 \sin^2 x \cos^2 x$ na desnu stranu uocavam da mora vrijediti $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$. Nadalje prisjetim se da zbog temeljnog trigonometrijskog identiteta vrijedi $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Primjenim li ova razmatranja jednadzba prelazi u oblik

$$1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = \sin x \cos x$$

Primjenim li algebarski identitet $a^n b^n = (ab)^n$ jednadzba prelazi u oblik

$$1 - 2 (\sin x \cos x)^2 = \sin x \cos x$$

Prisjetim se da vrijedi identitet za sinus dvostrukog kuta, odnosno $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Odnosno mozemo uociti da mora vrijediti $\frac{\sin 2x}{2} = \sin x \cos x$. Jednadzba prelazi u oblik

$$1 - 2 \left(\frac{\sin 2x}{2} \right)^2 = \frac{\sin 2x}{2}$$

Uz supstituciju $t = \sin 2x$ jednadzba prelazi u kvadratnu.

[*] Zadatak 45: Rijesi trigonometrijsku jednadzbu:

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$$

Napomena: Dakle prisjetim se da vrijedi algebarski identitet

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Primjenim li ga na danu jednadzbu onda ona prelazi u oblik

$$(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \frac{1}{2}$$

Izraz u drugoj zagradi prepoznam kao temeljni trigonometrijski identitet, odnosno vrijedi $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Tada jednadzba prelazi u sljedeci oblik

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

Nadalje prisjetim se da vrijedi identitet za kosinus dvostrukog kuta, odnosno $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$. U nasem slucaju potreban nam je malo drugaciji oblik tog identiteta, tocnije $-\cos 2x = \sin^2 x - \cos^2 x$ Primjenim li to na jednadzbu onda ona prelazi u sljedeci oblik

$$-\cos 2x = \frac{1}{2}$$

No ova jednadzba se veoma lako rijesi.

◇ Trigonometrijske nejednadzbe koje se svode na osnovne ◇

🍃 Zadatak 46: Rijesi trigonometrijsku nejednadzbu:

$$\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \geq 0$$

🍃 Zadatak 47: Rijesi trigonometrijsku nejednadzbu:

$$\sin x + \sqrt{3} \leq -\sin x$$

🍃 Zadatak 48: Rijesi trigonometrijsku nejednadzbu:

$$3 \operatorname{ctg} x + \sqrt{3} > 0$$

🍃 Zadatak 49: Rijesi trigonometrijsku nejednadzbu:

$$2 \sin \left(\frac{3x}{4} - \frac{\pi}{4} \right) - 1 < 0$$

🍃 Zadatak 50: Rijesi trigonometrijsku nejednadzbu:

$$\frac{1}{2 \cos \left(3x - \frac{4\pi}{3} \right)} \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

🍃 Zadatak 51: Rijesi trigonometrijsku nejednadzbu:

$$\frac{\sqrt{3}}{-3 \operatorname{tg} \left(x - \frac{3\pi}{4} \right)} + 1 > 0$$

🍃 Zadatak 52: Rijesi trigonometrijsku nejednadzbu:

$$\sqrt{3} + 3 \operatorname{ctg} \left(\frac{4x}{3} - \frac{\pi}{2} \right) \geq 0$$

🍃 Zadatak 53: Rijesi trigonometrijsku nejednadzbu:

$$\frac{\sin \left(4x + \frac{3\pi}{2} \right)}{-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} < 0$$

◇ Razne trigonometrijske nejednadzbe ◇

[★] Zadatak 54: Rijesi trigonometrijsku nejednadzbu:

$$\sin x \geq \cos 2x$$

Napomena: Prisjetim se da vrijedi identitet za kosinus dvostrukog kuta, odnosno $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$. Primjenim li to nejednadzba prelazi u oblik

$$\sin x \geq \cos^2 x - \sin^2 x$$

Nadalje prisjetim se da zbog temeljnog trigonometrijskog identiteta vrijedi $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, pa nejednadzba poprima sljedeći oblik

$$\sin x \geq 1 - \sin^2 x - \sin^2 x$$

Uz supstituciju $t = \sin x$ nejednadzba prelazi u kvadratnu koja se lako riješi.

[★] Zadatak 55: Rijesi trigonometrijsku nejednadzbu:

$$2 \sin^2 x - 7 \sin x + 3 > 0$$

Napomena: Uz supstituciju $t = \sin x$ nejednadzba prelazi u kvadratnu koja se lako riješi.

🍃 Zadatak 56: Rijesi trigonometrijsku nejednadzbu:

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x < 0$$

Napomena: "Prebacim" $\cos x$ s lijeve na desnu stranu nejednadzbe te cijelu nejednadzbu podijelim s $\cos x$. Dobivena nejednadzba se lako riješi pritom treba pripaziti kada su vrijednosti kosinusa pozitivne, a kad su one negativne da se zna odrediti smjer nejednakosti.

🍃 Zadatak 57: Rijesi trigonometrijsku nejednadzbu:

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} - \cos x \leq 1$$

Napomena: Prisjetim se da vrijedi identitet za kosinus dvostrukog kuta, odnosno $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$. Shvatim li kut x kao dvostruki polovni kut $\frac{x}{2}$ mogu pisati da vrijedi $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$. Primjenom toga jednadzba prelazi u sljedeći oblik

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} - \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) \leq 1$$

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \leq 1$$

$$3 \sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} \leq 1$$

Nadalje prisjetim se da zbog temeljnog trigonometrijskog identiteta vrijedi $\cos^2 \frac{x}{2} = 1 - \sin^2 \frac{x}{2}$. Jednadzba sada prelazi u oblik

$$3 \sin^2 \frac{x}{2} - \left(1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right) \geq 1$$

Daljnim sredljivanjem dobije se osnovna trigonometrijska nejednadzba koja se lako riješi.

☞ Zadatak 58: Riješi trigonometrijsku nejednadzbu:

$$2 \cos^2 \frac{x}{2} + \cos x \geq 1$$

Napomena: Prisjetim se da vrijedi identitet za kosinus dvostrukog kuta, odnosno $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$. Shvatim li kut x kao dvostruki polovinski kut $\frac{x}{2}$ mogu pisati da vrijedi $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$. Primjenom toga jednadzba prelazi u sljedeći oblik

$$2 \cos^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \geq 1$$

$$3 \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \geq 1$$

Nadalje prisjetim se da zbog temeljnog trigonometrijskog identiteta vrijedi $\sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos^2 \frac{x}{2}$. Jednadzba sada prelazi u oblik

$$3 \cos^2 \frac{x}{2} - \left(1 - \cos^2 \frac{x}{2}\right) \geq 1$$

Daljnim sredljivanjem dobije se osnovna trigonometrijska nejednadzba koja se lako riješi.

[★] Zadatak 59: Riješi trigonometrijsku nejednadzbu:

$$2 \sin^2 x - 5 \cos x \leq 4$$

Napomena: Prisjetim se da zbog temeljnog trigonometrijskog identiteta vrijedi $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Jednadzba sada prelazi u oblik

$$2(1 - \cos^2 x) - 5 \cos x \leq 4$$

Uz supstituciju $t = \cos x$ nejednadzba prelazi u kvadratnu koja se lako riješi.

[★] Zadatak 60: Riješi trigonometrijsku nejednadzbu:

$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \frac{\pi}{5}}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \frac{\pi}{5}} \leq \sqrt{3}$$

Napomena: Prepoznam adicijski teorem za tangens na desnoj strani nejednadzbe, odnosno $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$. Primjenom te činjenice nejednadzba poprima sljedeći oblik:

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{5}\right) \leq \sqrt{3}$$

Na ovo je osnovni oblik trigonometrijske nejednadzbe koji se lako riješi.

