Zadaci za vjezbu pred trecu pisanu provjeru znanja

Formule koji bi trebalo znati prilikom rjesavanja ovih zadataka:

Izraz za odredjivanje rjesenja opce kvadaratne jednadzbe $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Diskriminanta opce kvadaratne jednadzbe $ax^2 + bx + c = 0$:

$$D = b^2 - 4ac$$

Koordinate tjemena grafa polinoma II. stupnja oblika $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$:

$$T\left(x_0, y_0\right) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

Veza x koordinate tjemena grafa polinoma II. stupnja oblika $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ i rjesenja pripadne kvadratne jednadzbe $f(x) = 0$:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

◈

Zadatak 1: Prikazi graficki funkciju $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$. Odredi interval *pada* ove funkcije. Za koje $x \in \mathbb{R}$ je $f(x) \geq -4$?

Napomena: Posljednji dio zadatka moguce je dosta precizno rijesiti promatrajuci nacrtani graf, no preporucljivo je rijesiti samu kvadratnu nejednadzbu koja se dobije iz posljednjeg izraza $f(x) \geq -4$, kada se $f(x)$ zamijeni s $-\frac{1}{2}x^2 + x$.

Zadatak 2: Prikazi graficki funkciju $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x - 3$. Odredi interval *rasta* ove funkcije. Za koje $x \in \mathbb{R}$ je $f(x) \leq 5$?

Napomena: Posljednji dio zadatka moguce je dosta precizno rijesiti promatrajuci nacrtani graf, no preporucljivo je rijesiti samu kvadratnu nejednadzbu koja se dobije iz posljednjeg izraza $f(x) \leq 5$, kada se $f(x)$ zamijeni s $\frac{1}{4}x^2 - x - 3$.

Zadatak 3: Prikazi graficki funkciju $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 9$. Odredi:
1) nultocke funkcije $f(x)$
2) interval *rasta* funkcije $f(x)$
3) najvecu vrijednost funkcije $f(x)$.

Napomena: Podsjecam da je *najveca* odnosno *najmanja* vrijednost funkcije zapravo y_0 koordinata tjemena kvadratne jednadzbe $f(x) = 0$ ovisno o predznaku vodeceg koeficijenta a. Nadalje rjesenja kvadratne jednadzbe te nultocke grafa pripadne funkcije su sinonimi (identicni/isti pojmovi).

Zadatak 4: Prikazi graficki funkciju $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 4x - 6$. Odredi:
1) nultocke funkcije $f(x)$
2) interval *pada* funkcije $f(x)$
3) najvecu vrijednost funkcije $f(x)$.

Napomena: Podsjecam da je *najveca* odnosno *najmanja* vrijednost funkcije zapravo y_0 koordinata tjemena kvadratne jednadzbe $f(x) = 0$ ovisno o predznaku vodeceg koeficijenta a. Nadalje rjesenja kvadratne jednadzbe te nultocke grafa pripadne funkcije su sinonimi (identicni/isti pojmovi).

Zadatak 5: Prikazi graficki funkciju $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 3$. Odredi interval njezina *rasta*. Za koje $x \in \mathbb{R}$ je $f(x) > 0$?

Napomena: Posljednji dio zadatka moguce je dosta precizno rijesiti promatrajuci nacrtani graf, no preporucljivo je rijesiti samu kvadratnu nejednadzbu koja se dobije iz posljednjeg izraza $f(x) > 0$, kada se $f(x)$ zamijeni s $-\frac{1}{3}x^2 + 2x - 3$.

Napomena: Naredni zadaci, sve do dvanaestog zadatka rijesavaju se na isti nacin!

Zadatak 6: Prikazi graficki funkciju $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$. Odredi interval *rasta* ove funkcije. Za koje $x \in \mathbb{R}$ je $f(x) \leq 0$?

Zadatak 7: Prikazi graficki funkciju $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6$. Odredi intervale *pada* ove funkcije. Za koje $x \in \mathbb{R}$ je $f(x) \geq 0$?

Zadatak 8: Prikazi graficki funkciju $f(x) = -x^2 - 2x + 3$. Odredi intervale *pada* ove funkcije. Za koje $x \in \mathbb{R}$ je $f(x) \leq 0$?

Zadatak 9: Prikazi graficki funkciju $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$. Odredi intervale *rasta* ove funkcije. Za koje $x \in \mathbb{R}$ je $f(x) \geq 0$?

Zadatak 10: Prikazi graficki funkciju $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x + 3$. Odredi intervale *pada* ove funkcije. Za koje $x \in \mathbb{R}$ je $f(x) \geq 0$?

Zadatak 11: Prikazi graficki funkciju $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$. Odredi intervale *rasta* ove funkcije. Za koje $x \in \mathbb{R}$ je $f(x) \geq 0$?

Zadatak 12: Prikazi graficki funkciju $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 3$. Odredi intervale *pada* ove funkcije. Za koje $x \in \mathbb{R}$ je $f(x) \leq 0$?

Zadatak 13: Dan je polinom II. stupnja $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$.
1) Odredi nultocke danog polinoma.
2) Za koji x ova funkcija prima ekstremnu vrijesnost? Je li taj ekstrem minimum ili maksimum funkcije? Koliko on iznosi?
3) Nacrtaj graf polinoma $f(x)$.
4) Za koje realne brojeve x je $f(x) \geq 0$?

Napomena: Podsjecam da su rjesenja kvadratne jednadzbe te nultocke grafa pripadne funkcije sinonimi (identicni/isti pojmovi). Nadalje kod drugoga zadatka potrebno je zapravo dorediti koordinate tjemena, jer x_0 koordinata predstavlja tocku u kojoj se ekstrem postize, dok y_0 koordinata predstavlja sam iznos ekstrema. Posljednji dio zadatka moguce je dosta precizno rijesiti promatrajuci nacrtani graf, no preporucljivo je rijesiti samu kvadratnu nejednadzbu koja se dobije iz posljednjeg izraza $f(x) \geq 0$, kada se $f(x)$ zamijeni s
$-\frac{1}{2}x^2 + x + 4$.

Zadatak 14: Dan je polinom II. stupnja $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$.
1) Odredi nultocke danog polinoma.
2) Za koji x ova funkcija prima ekstremnu vrijesnost? Je li taj ekstrem minimum ili maksimum funkcije? Koliko on iznosi?
3) Nacrtaj graf polinoma $f(x)$.
4) Za koje realne brojeve x je $f(x) \geq 0$?

Napomena: Podsjecam da su rjesenja kvadratne jednadzbe te nultocke grafa pripadne funkcije sinonimi (identicni/isti pojmovi). Nadalje kod drugoga zadatka potrebno je zapravo dorediti koordinate tjemena, jer x_0 koordinata predstavlja tocku u kojoj se ekstrem postize, dok y_0 koordinata predstavlja sam iznos ekstrema. Posljednji dio zadatka moguce je dosta precizno rijesiti promatrajuci nacrtani graf, no preporucljivo je rijesiti samu kvadratnu nejednadzbu koja se dobije iz posljednjeg izraza $f(x) \geq 0$, kada se $f(x)$ zamijeni s $\frac{1}{2}x^2 + x - 4$.

[$\star$] Zadatak 15: Prikazi graficki funkciju $f(x) = \left|x^2 - x\right| + 2$. Odredi intervale nejzina *pada*.

Napomena: Dakle ideja bi bila slicna kao i kad ste crtali grafove funkcija s apsolutnim vrijednostima prosle skolske godine. Nacratli bi graf funkcije ispod apsolutne vrijednosti, dakle graf funkcije $f'(x) = x^2 - x$. Nakon toga sve dijelove grafa te funkcije koji se nalaze ispod osi x zrcalili bi prema gore. Te bi na kraju zbog toga jer na kraju pocetne funkcije stoji +3 cijeli graf pomaknuli prema gore. Na taj nacin dobili bi sve podatke da sasvim percizno odredite intervale na kojima dana funkcija *pada*.

◈

✎ Zadatak 16: Odredi nultocke funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$, ako je $f(-2) = 4$, $f(1) = -2$, $f(0) = -2$.

✎ Zadatak 17: Ako je $f(x)$ polinom II. stupnja za kojega je $f(-1) = 0$, $f(1) = 4$, $f(2) = 3$, koliko je $f\left(1 - \sqrt{3}\right)$?

✎ Zadatak 18: Odredi nultocke funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$, ako je $f(0) = f(-2) = 5$, $f(1) = 2$.

Napomena: Podsjecam da ovdje iz $f(0) = f(-2) = 5$ zapravo slijedi $f(0) = 5$ i $f(-2) = 5$. Nadalje podsjecam da je *najveca* odnosno *najmanja* vrijednost polinoma zapravo y_0 koordinata tjemena kvadratne jednadzbe $f(x) = 0$ ovisno o predznaku vodeceg koeficijenta a.

✎ Zadatak 19: Kolika je najmanja vrijednost polinoma $f(x) = ax^2 + bx + c$, ako je $f(1) = f(0) = -2$, $f(-2) = 4$.

Napomena: Podsjecam da ovdje iz $f(1) = f(0) = -2$ zapravo slijedi $f(1) = -2$ i $f(0) = -2$. Nadalje podsjecam da je *najveca* odnosno *najmanja* vrijednost polinoma zapravo y_0 koordinata tjemena kvadratne jednadzbe $f(x) = 0$ ovisno o predznaku vodeceg koeficijenta a.

✎ Zadatak 20: Kolika je najveca vrijednost polinoma $f(x) = ax^2 + bx + c$, ako je $f(2) = f(-4) = 0$, $f(1) = 5$.

Napomena: Podsjecam da ovdje iz $f(2) = f(-4) = 0$ zapravo slijedi $f(2) = 0$ i $f(-4) = 0$. Nadalje podsjecam da je *najveca* odnosno *najmanja* vrijednost polinoma zapravo y_0 koordinata tjemena kvadratne jednadzbe $f(x) = 0$ ovisno o predznaku vodeceg koeficijenta a.

✎ Zadatak 21: Kolika je najveca vrijednost polinoma $f(x) = ax^2 + bx + c$, ako je $f(1) = f(3) = -1$, $f(0) = -4$.

Napomena: Podsjecam da ovdje iz $f(1) = f(3) = -1$ zapravo slijedi $f(1) = -1$ i $f(3) = -1$. Nadalje podsjecam da je *najveca* odnosno *najmanja* vrijednost polinoma zapravo y_0 koordinata tjemena kvadratne jednadzbe $f(x) = 0$ ovisno o predznaku vodeceg koeficijenta a.

◈

✎ Zadatak 22: Odredi polinom II. stupnja koji za $x = 2$ prima najvecu vrijednost $y = 1$, a za $x = 0$ vrijednost fukcije je jednaka -1.

Napomena: Ono sto mozemo zakljuciti citajuci zadatak jest da je tocka $x = 2$ u kojoj polinom poprima najvecu vrijednost zapravo x_0 koordinata tjemena danog polinoma, odnosno da vrijedi $x_0 = 2$. Nadalje najveca vrijednost $y = 1$ koja se poprima je zapravo y_0 koordinata tjemena danog polinoma, odnosno vrijedi $y_0 = 1$. Posljednji podatak dan u zadatku, za $x = 0$ vrijednost fukcije je jednaka -1 zapravo se svodi na cinjenicu da mora vrijediti $f(0) = -1$. Nakon ovih razmatranja zadatak bi se trebao rijesiti bez vecih prepreka.

✎ Zadatak 23: Broj -2 dvostruki je korijen polinoma II. stupnja, a $f(0) = 2$. Odredi taj polinom.

Napomena: Ono sto mozemo zakljuciti citajuci zadatak jest da kako je -2 dvostruka nultocka danog polinoma, vrijednost funkcije u tocki -2 mora biti jednaka 0, drugim rijecima mora vrijediti $f(-2) = 0$. Nadalje prisjetimo se da ako polinom ima dvostruku nultocku tada se onda poklapa s tjemenom danog polinoma. Cak stovise njezina vrijednost poklapa se sa x_0 koordinatom tjemena danog polinoma, odnosno zakljucujem da mora vrijediti $x_0 = -2$. No nadalje kako znam da se nultocke nalaze upravo na osi x, a u nasem slucaju multocka i tjeme se poklapaju, mogu zakljuciti da y_0 koordinata tjemena mora biti jednaka 0 (sve tocke koje se nalaze na osi x imaju y koordinatu jednaku 0), odnosno mora vrijediti $y_0 = 0$. Nakon ovih razmatranja zadatak bi se trebao rijesiti bez vecih prepreka.

✎ Zadatak 24: Odredi polinom II. stupnja koji najvecu vrijednost $y = 8$, poprima za $x = -2$, $f(0) = 6$.

✎ Zadatak 25: Za polinom II. stupnja $f(x) = ax^2 + bx + c$ vrijedi
$f(-2) = f(3) = 4$. Njegova najmanja vrijednost iznosi $-\dfrac{9}{4}$. Odredi taj polinom.

Napomena: Podsjecam da ovdje iz $f(-2) = f(3) = 4$ zapravo slijedi $f(-2) = 4$ i $f(3) = 4$. Nadalje podsjecam da je *najmanja* vrijednost polinoma zapravo y_0 koordinata tjemena polinoma II. stupnja.

✎ Zadatak 26: Parabola je simetricna u odnosu na pravac $x - 1 = 0$. Os ordinata sijece u tocki $A(0, 4)$, a os apscisa u tocki $B(-2, 0)$. Odredi jednadzbu ove parabole.

Napomena: Citajuci zadatak uocavamo da je dana parabola simetricna s obzirom na pravac $x - 1 = 0$. Prebacim li jedinicu na desnu stranu vidim da jednadzba pravca prelazi u oblik $x = 1$ sto znaci da je je to pravac koji je odredjen svim tockama cije su x koordinate jednake 1 (zapravo se radi o pravcu okomitom na os x koji prolazi tockom 1 na osi x). Sto to zapravo znaci? Dakle ako je pravac os simetrije to znaci da on, figurativno govoreci, danu parabolu sijece na dva jednaka dijela. Samim time on mora prolaziti tjemenom dane parabole, jer se ono nalazi tocno na njezinoj "sredini". Sto me dovodi do zakljucka da x_0 koordinata tjemena mora biti jednaka 1, odnosno da vrijedi $x_0 = 1$ (dakle pravac prolazi tocno sredinom parabole posto ju prepolavlja, nadalje tjeme je takodjer na sredini parabole sto znaci da ono mora ujedno biti i na pravcu, no zakljucili smo da svaka tocka pravca ima x koordinatu jednaku 1). Nadalje ako parabola prolazi nekom tockom $T(x, y)$ to ne znaci nista drugo nego da mora vrijediti $f(x) = y$, odnosno da je vrijednost funkcije u tocki x jednaka y. Imajuci to na umu podatak da parabola prolazi tockom $A(0, 4)$ zapravo znaci da mora vrijediti $f(0) = 4$ dok cinjenica da parabola prolazi tockom $B(-2, 0)$ znaci da mora vrijediti $f(-2) = 0$. Nakon ovih razmatranja zadatak bi se trebao rijesiti bez vecih prepreka.

✎ Zadatak 27: Nultocke polinoma II. stupnja su $x_1 = -1$ i $x_2 = 3$. Najmanja vrijednost polinoma jednaka je -4. Odredi taj polinom.

Napomena: Podsjecam da su nultocke zapravo tocke u kojima je vrijednost fukcije jednaka 0, odnosno oni x za koje vrijedi $f(x) = 0$. Kako su $x_1 = -1$ i $x_2 = 3$ nultocke to znaci da vrijednost funckije u tim tockam mora biti jednaka 0, odnosno mora vrijediti $f(-1) = 0$ i $f(3) = 0$. Nadalje znam da ako su dane vrijednosti obiju nultocaka postoji mogucnost odredjivanja x_0 koordinate tjemena danog polinoma preko izraza $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, sto proizlazi iz cinjenice da je parabola simetricna, a tjeme se nalazi na samoj njenoj "sredini" (dakle nultocke moraju biti jendako udaljene od tjemena!). Nadalje podsjecam da je *najmanja* vrijednost polinoma zapravo y_0 koordinata tjemena polinoma II. stupnja. Nakon ovih razmatranja zadatak bi se trebao rijesiti bez vecih prepreka.

✎ Zadatak 28: Odredi polinom II. stupnja, ako njegov graf sijece os ordinata u tocki $A\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$, ako je jedna nultocka funkcije $x = 3$, te ako funkcija najvecu vrijednost postize za $x = 2$. Izracunaj zatim vrijednost tog polinoma za $x = 2 + \sqrt{2}$. (treba odrediti $f\left(2 + \sqrt{2}\right)$)

✎ Zadatak 29: Polinom II. stupnja minimalnu vrijednost -2 postize za $x = 1$. Osim toga je $f(-3) + 4 \cdot f(0) = 0$. Koliko je $f\left(1 + \sqrt{5}\right)$?

Napomena: Posljednji podatak u ovom zadataku je sasvim standardan. Dakle umjesto da je dana vrijednost funckije u nekoj tocki dana je njihova linearna kombinacija. Taj podatak se sredi na nacin da se prvo raspise $f(-3)$ pa $f(0)$, zatim se dobivena vrijednost od $f(0)$ pomnozi s 4 te se to zbroji i izjendaci s 0. Imajte na umu da je oblik polinoma $f(x)$ na pocetku rijesavanja gotovo svih zadataka u ovom paragrafu oblika $f(x) = ax^2 + bx + c$. Nakon ovih razmatranja zadatak bi se trebao rijesiti bez vecih prepreka.

Zadatak 30: Broj 0.5 dvostuki je korijen polinoma II. stupnja. Uz to je $f(-1) + f(2) = \frac{9}{2}$. Koliko je $f\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$?

Napomena: Zapisite 0.5 u obliku razlomka $\frac{1}{2}$. Kako interpretirati ostale podatke opisano je kroz prethodne napomene.

Zadatak 31: Graf kvadratne funkcije je parabola kojoj je pravac $x + 1 = 0$ os simetrije. Paraboal sijece os ordinata u tocki $B\left(0, \frac{3}{2}\right)$. Najmanja vrijednost funkcije je 0. Koliko je $f\left(1-\sqrt{2}\right)$?

Napomena: Pogledaj napomenu za dvadeset i sesti zadatak.

Zadatak 32: Funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ ima dvostruku nultocku, te je
$f(0) = f(-4) = -2$. Odredi koeficijente a, b i c.

Napomena: Podsjecam da ovdje iz $f(0) = f(-4) = -2$ zapravo slijedi
$f(0) = -2$ i $f(-4) = -2$. Takodjer pogledati napomenu za dvadeset i treci zadatak.

Zadatak 33: Ako je $f(x) = (m-1)\,x^2 + mx - m$, za koje vrijednosti realnog parametra m ce biti $f(x) < 0$, za sve $x \in \mathbb{R}$?

Napomena: Podsjecam, da bi sve vrijednosti kvadratne funkcije bile negativne, diskriminanta pripadne kvadratne jednadzbe mora biti strogo manja od nule, drugim rijecima mora vrijediti $D < 0$, no takodjer i vodeci koeficijent dane kvadratne funkcije mora biti strogo manji od 0, odnosno mora vrijediti i $a < 0$. Rjesenje toga sustava nejednadzbi daje odgovor na postavljeno pitanje u zadatku.

Zadatak 34: Za koje vrijednosti parametra k polinom II. stupnja
$f(x) = kx^2 - x + k$ prima negativne vrijednosti za sve $x \in \mathbb{R}$?

Napomena: Obrati pozornost na napomenu zadatka trideset i tri.

Zadatak 35: Dan je polinom $f(x) = kx^2 - kx + 1$, $k \in \mathbb{R}$. Odredi sve k za koje je $f(x) \geq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

Napomena: Podsjecam, da bi sve vrijednosti kvadratne funkcije bile nenegaticne (veci ili jednak od 0), diskriminanta pripadne kvadratne jednadzbe mora biti veca ili jednaka od nule, drugim rijecima mora vrijediti $D \geq 0$, no takodjer i vodeci koeficijent dane kvadratne funkcije mora biti strogo veci od 0, odnosno mora vrijediti i $a > 0$. Rjesenje toga sustava nejednadzbi daje odgovor na postavljeno pitanje u zadatku.

Zadatak 36: Za koje je $k \in \mathbb{R}$ nejednakost $x^2 + x + 1 > k$ ispunjena za sve $x \in \mathbb{R}$.

Napomena: Ako prebacimo k na lijevu stranu, tada zapravo trazimo za koje ce k vrijednost funkcije biti veca od 0 za sve $x \in \mathbb{R}$. No onda sam se sveo zapravo na zadatak trideset i pet.

Zadatak 37: Odredi sve vrijednosti realnog parametra k za koje polinom $f(x) = (k-2)\,x^2 + 8x + k + 4$ prima pozitivne vrijednosti za svaki realni broj x.

Napomena: Dakle trazimo sve one k za koje ce vrijediti $f(x) > 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$. No to znaci da se zadatak rijesava sukladno napomeni zadatka trideset i pet.

Zadatak 38: Za koji najveci cijeli broj k polinom $f(x) = kx^2 - 4x + 3k + 1$ prima negativne vrijednosti za svaki realni broj x?

Napomena: Dakle prvo potrazimo sve one k za koje ce vrijediti $f(x) < 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$. No to znaci da se zadatak rijesava sukladno napomeni zadatka trideset i tri. Kad dobijemo skup rjesenja iz njega izaberemo najveci cijeli broj i time ce zadatak biti rijesen.

Zadatak 39: Odredi koeficijent k tako da polinom $f(x) = (x-k)\,(kx-1)$ poprima negativne vrijednosti za sve $x \in \mathbb{R}$.

Napomena: Dakle trazimo sve one k za koje ce vrijediti $f(x) < 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$. No to znaci da se zadatak rijesava sukladno napomeni zadatka trideset i tri.

Zadatak 40: Za koje vrijednosti realnog broja k polinom $f(x) = k^2x^2 + x + 1$ poprima pozitivne vrijednosti za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Napomena: Dakle trazimo sve one k za koje ce vrijediti $f(x) > 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$. No to znaci da se zadatak rijesava sukladno napomeni zadatka trideset i pet.

Zadatak 41: Za koje vrijednosti realnog broja a polinom $f(x) = ax^2 + x + a$ poprima negativne vrijednosti za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Napomena: Dakle trazimo sve one k za koje ce vrijediti $f(x) < 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

No to znaci da se zadatak rijesava sukladno napomeni zadatka trideset i tri.

[$\star$] Zadatak 42: Odredi realni koeficijent k tako da polinom $f(x) = (1 - ax)(x + 2)$ poprima vrijednosti manje od 3 za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Napomena: Dakle ako zelimo da polinom poprima vrijednosti manje od 3, ono sto zapravo zelimo jest pronaci sve one k za koje ce y_0 koordinata tjemena biti manja ili jednaka od 3, odnosno da vrijedi $y_0 < 3$. Naravno da bi sve ostale vrijednosti polinoma bile manje od vrijednosti y_0 ta vrijednost mora biti zapravo maksimum. Prisjetim se da polinom u tjemenu postize maksimum samo onda kada je vodeci koeficijent strogo manji od 0, odnosno kada vrijedi $a < 0$. Rjesenje tog sustava nejednadzbi daje odgovor na postavljeno pitanje iz zadatka.

[$\star$] Zadatak 43: Za svaki realni broj k jednadzbom $y = kx^2 + x + k$, $k \neq 0$, odredjena je neka parabola.
1) Za koji k se dobije parabola s tjemenom na osi aspscisa?
2) Za koji k se dobije parabola kojoj je ordinata tjemena jednaka $-\frac{3}{4}$?

Napomena: U prvom dijelu zadatka treba odrediti za koji k ce tjeme parabole biti na osi apscisa (osi x) sto u prijevodu znaci da moram odrediti one k za koje ce y_0 koordinata tjemena biti jednaka 0, odnosno kada ce vrijediti $y_0 = 0$ (sve tocke na osi apscisa imaju y koordinatu jednaku 0).

Sto se tice drugog dijela zadatka kako trazim kada ce y_0 koordinata tjemena biti jednaka $-\frac{3}{4}$ zapravo trazim rjesenja jednadzbe $y_0 = -\frac{3}{4}$. Njezinim rjesenjem odogvorit cemo na pitanje iz zadatka.

[$\star$] Zadatak 44: Za svaki realni broj k jednadzbom $y = kx^2 + kx + 1$, $k \neq 0$, odredjena je neka parabola.
1) Za koji k se dobije parabola s tjemenom na osi aspscisa?
2) Za koji k se dobije parabola kojoj je najmanja vrijednost jednaka 2?

Napomena: U prvom dijelu zadatka treba odrediti za koji k ce tjeme parabole biti na osi apscisa (osi x) sto u prijevodu znaci da moram odrediti one k za koje ce y_0 koordinata tjemena biti jednaka 0, odnosno kada ce vrijediti $y_0 = 0$ (sve tocke na osi apscisa imaju y koordinatu jednaku 0).

Sto se tice drugog dijela zadatka kako trazim kada ce najmanja vrijednost polinoma biti jednaka 2, a znam da se ekstemi postizu u tjemenu, moj zadatak je zapravo otkiriti kada ce y_0 koordinata tjemena biti jednaka 2, odnosno trazim rjesenja jednadzbe $y_0 = 2$. Da bih bio siguran da se radi o najmanjij vrijednosti moram osigurati da vodeci koeficijent a bude pozitivan, odnosno mora vrijediti $a > 0$ (dakle ako je vodeci koeficijent pozitivan znam da parabola tada postize minimum!). Njezinim rjesenjem odogvorit cemo na pitanje iz zadatka.

[$\star$] Zadatak 45: Za svaki realni broj m jednadzbom $y = x^2 + mx + m$, odredjena je neka parabola.

1) Za koji m se dobije parabola s tjemenom na osi aspscisa?
2) Za koji m se dobije parabola kojoj je pravac $x + 1 = 0$? os simetrije?

Napomena: U prvom dijelu zadatka treba odrediti za koji k ce tjeme parabole biti na osi apscisa (osi x) sto u prijevodu znaci da moram odrediti one k za koje ce y_0 koordinata tjemena biti jednaka 0, odnosno kada ce vrijediti $y_0 = 0$ (sve tocke na osi apscisa imaju y koordinatu jednaku 0).

Sto se tice drugog djela zadataka, trebamo odrediti m takav da dana parabola bude simetricna s obzirom na pravac $x + 1 = 0$. Prebacim li jedinicu na desnu stranu vidim da jednadzba pravca prelazi u oblik $x = -1$ sto znaci da je to pravac koji je odredjen svim tockama cije su x koordinate jednake -1 (zapravo se radi o pravcu okomitom na os x koji prolazi tockom -1 na osi x). Sto to zapravo znaci? Dakle ako je pravac os simetrije to znaci da on, figurativno govoreci, danu parabolu sijece na dva jednaka dijela. Samim time on mora prolaziti tjemenom dane parabole, jer se ono nalazi tocno na njezinoj "sredini". Sto me dovodi do zakljucka da x_0 koordinata tjemena mora biti jednaka 1, odnosno da mora vrijediti $x_0 = -1$ (dakle pravac prolazi tocno sredinom parabole posto ju prepolavlja, nadalje tjeme je takodjer na sredini parabole sto znaci da ono mora ujedno biti i na pravcu, no zakljucili smo da svaka tocka pravca ima x koordinatu jednaku -1). Rjesenjem jednazbe $x_0 = -1$ odogvorit cemo na pitanje iz zadatka.

[$\star$] Zadatak 46: Za svaki realni broj m, $m \neq 0$, jednadzbom $y = mx^2 + x + m$, odredjena je neka parabola.
1) Za koji m se dobije parabola s tjemenom na osi aspscisa?
2) Za koji m se dobije parabola kojoj je pravac $2x - 1 = 0$? os simetrije?

Napomena: U prvom dijelu zadatka treba odrediti za koji k ce tjeme parabole biti na osi apscisa (osi x) sto u prijevodu znaci da moram odrediti one k za koje ce y_0 koordinata tjemena biti jednaka 0, odnosno kada ce vrijediti $y_0 = 0$ (sve tocke na osi apscisa imaju y koordinatu jednaku 0).

Sto se tice drugog djela zadataka, trebamo odrediti m takav da dana parabola bude simetricna s obzirom na pravac $2x-1 = 0$. Sredim li malo danu jednadzbu pravca onda prelazi u oblik $x = \frac{1}{2}$ sto znaci da je to pravac koji je odredjen svim tockama cije su x koordinate jednake -1 (zapravo se radi o pravcu okomitom na os x koji prolazi tockom $\frac{1}{2}$ na osi x). Sto to zapravo znaci? Dakle ako je pravac os simetrije to znaci da on, figurativno govoreci, danu parabolu sijece na dva jednaka dijela. Samim time on mora prolaziti tjemenom dane parabole, jer se ono nalazi tocno na njezinoj "sredini". Sto me dovodi do zakljucka da x_0 koordinata tjemena mora biti jednaka 1, odnosno da mora vrijediti $x_0 = \frac{1}{2}$ (dakle pravac prolazi tocno sredinom parabole posto ju prepolavlja, nadalje tjeme je takodjer na sredini parabole sto znaci da ono mora ujedno biti i na pravcu, no zakljucili smo da svaka tocka pravca ima x koordinatu jednaku $\frac{1}{2}$). Rjesenjem jednazbe $x_0 = \frac{1}{2}$ odogvorit cemo na pitanje iz zadatka.

◈

✎ Zadatak 47: Rijesi nejednadzbu:

$$\frac{x+3}{x^2+2x+1} \geq 1$$

Napomena: Kod nejednadzbi se nesmije mnoziti s brojnikom!. To vrijedi za sve slijedece zadatke do zadatka !

✎ Zadatak 48: Rijesi nejednadzbu:

$$\frac{4}{3+2x-x^2} \leq 1$$

✎ Zadatak 49: Rijesi nejednadzbu:

$$\frac{x^2}{2x-x^2} \geq 1$$

✎ Zadatak 50: Rijesi nejednadzbu:

$$\frac{2x+1}{x^2-1} \leq -1$$

✎ Zadatak 51: Rijesi nejednadzbu:

$$\frac{x+2}{x^2+3x+2} \geq 1$$

✎ Zadatak 52: Rijesi nejednadzbu:

$$\frac{x^2-x+1}{2x^2-x-1} \leq \frac{1}{2}$$

✎ Zadatak 53: Rijesi nejednadzbu:

$$\frac{x^2-1}{x^2+x-2} < \frac{1}{2}$$

✎ Zadatak 54: Rijesi nejednadzbu:

$$\frac{x^2-2x}{x^2-x-2} < 1$$

✎ Zadatak 55: Rijesi nejednadzbu:

$$\frac{x^2-2x-3}{x\,(4-x)} \geq 0$$

Zadatak 56: Rijesi nejednadzbu:

$$\frac{x(x-2)}{3-2x-x^2} \leq 0$$

Zadatak 57: Rijesi nejednadzbu:

$$\frac{x-2}{x^2-x-2} > 1$$

Zadatak 58: Rijesi nejednadzbu:

$$\frac{3x^2+1}{2x^2-x-3} < 1$$

Zadatak 59: Rijesi nejednadzbu:

$$\frac{x-1}{2x^2-x-1} < 1$$

Zadatak 60: Rijesi nejednadzbu:

$$\frac{x-6}{x^2-2x-3} < 1$$

Zadatak 61: Rijesi nejednadzbu:

$$\frac{x-2}{2+x-x^2} \geq 1$$

Zadatak 62: Rijesi nejednadzbu:

$$\frac{1-3x}{x^2-3x+2} < 1$$

Zadatak 63: Rijesi nejednadzbu:

$$\frac{x(1-x)}{x^2+2x} \geq 0$$

Zadatak 64: Rijesi nejednadzbu:

$$\frac{x^2-1}{x(2-x)} \leq 0$$

[⋆] Zadatak 65: Rijesi jednadzbu:

$$\left|x^2+6x\right| = x+6$$

[⋆] Zadatak 66: Rijesi jednadzbu:

$$\left|2x^2 - x - 1\right| = 2x + 1$$

[⋆] Zadatak 67: Rijesi jednadzbu:

$$\left|x^2 + x - 2\right| = x^2 - 1$$

[⋆] Zadatak 68: Pravac $y - 4 = 0$ tangenta je parabole, a pravac $x - 1 = 0$ njena je os simetrije. Parabola sijece os ordinata u $B(0, 3)$. Odredi jednadzbu parabole.

Zadatak 69: Odredi onu tangentu parabole $y = \frac{1}{2}x^2 - x$ koja je paralelna pravcu $x + 2y - 15 = 0$.

Zadatak 70: Kako glasi jednadzba tangente parabole $y = x^2$, ako ta tangenta prolazi tockom $A(2, 3)$?

Zadatak 71: Odredi sjecista pravca $y = 2x+1$ i parabole $y = x^2-x+3$. Kako glasi jednadzba tangente na istu parabolu, a koja je paralelna zadanome pravcu?

Zadatak 72: Napisi jednadzbu tangente na parabolu $y = -x^2+x+3$ polozene u tocki $D(-1, y)$ te parabole.

Zadatak 73: Odredi pravac koji dira parabolu $y = x^2 + x$ a paralelan je s pravcem $y = -x + 1$. Odredi i koordinate diralista.

Zadatak 74: Pravac prolazi ishodistem koordinatnog sustava i dira parabolu $y = -x^2 + 3x - 2$. Koliki je koeficijent smjera toga pravca?

Zadatak 75: Odredi jednadzbe tangenata polozenih na parabolu $y = x^2 + 3x$ u njezinim sjecistima s osi opscisa.

Zadatak 76: Odredi jednadzbe tangenata polozenih na parabolu $y = x^2 + x - 3$ u njezinom sjecistu s osi ordinata.

Zadatak 77: Odredi jednadzbu tangente na parabolu $y = 2x^2 - x + 1$ u njezinoj tocki $T(-1, y)$.

Zadatak 78: Tangenta na parabolu $y = x^2 + 2x$ paralelna s pravcem $y = -2x + 11$. U kojoj tocki tangenta dira parabolu?

✎ Zadatak 79: Napisi jednadzbu tangente polozene na parabolu $y = -x^2 + 2x$ u njezinoj tocki $T(-1, y)$.

✎ Zadatak 80: Napisi jednadzbu tangente polozene na parabolu $y = x^2 - 2x$ u njezinoj tocki $T(3, y)$.

✎ Zadatak 81: Odredi koeficijent smjera pravca $y = ax + 1$ tako da taj pravac dira parabolu $y = -x^2 + 4x$.

✎ Zadatak 82: Odredi koeficijent b tako da pravac $y = -2x + b$ dira parabolu $y = -x^2 + 4x$. Odredi koordinate diralista.

Napomena: Ostali zadaci koji su kombinacija gornjih tipova zadataka (u prijevodu zahtijevniji zadaci)!

[$\star$] Zadatak 83: $f(x) = ax^2 + bx + c$ je polinom II. stupnja kojemu je broj $x = 2$ dvostruka nultocka te $f(0) = -3$.
1) Odredi taj polinom i nacrtaj njegov graf.
2) Za koje realne brojeve x je $f(x) > -3$?

[$\star$] Zadatak 84: Broj -2 dvostruka je nultocka polinoma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ako je $f(-1) + f(5) = 25$, odredi tajh polinom.

[$\star$] Zadatak 85: $f(x) = ax^2 + bx + c$ je polinom II. stupnja za kojega je $f(0) = f(-2) = 3$, a broj -3 jedan je njegov korijen.
1) Odredi taj polinom i nacrtaj njegov graf.
2) Odredi ekstremnu vrijednost tog polinoma.
3) Za koje realne brojeve x je $f(x) < 0$?

[$\star\star$] Zadatak 86: $f(x) = ax^2 + bx + c$ je polinom II. stupnja za kojega je $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, te $f\left(\frac{3}{2} + x\right) = f\left(\frac{3}{2} - x\right)$.
1) Odredi taj polinom i nacrtaj njegov graf.
2) Odredi ekstremnu vrijednost tog polinoma.
3) Za koje realne brojeve x je $f(x) > 0$?