

Zadaci za vježbu pred drugu pisanu provjeru znanja

◆ Nizovi ◆

🍃 Zadatak 1: Ako je $a_1 = \frac{1}{6}$, te $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$ za $n > 1$, izrazi a_n kao funkciju od n .

🍃 Zadatak 2: Odredi prvih deset članova niza (a_n) , ako je $a_1 = -1$, te $a_{n+1} = a_n - n + 1$, za $n > 1$.

🍃 Zadatak 3: Niz (a_n) dan je općim članom a_n ,

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{ako je } n \text{ paran} \\ n, & \text{ako je } n \text{ neparan} \end{cases}$$

Koliki je zbroj prvih 100 članova niza?

🍃 Zadatak 4: Niz (a_n) dan je općim članom a_n ,

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{ako je } n \text{ neparan} \\ n, & \text{ako je } n \text{ paran} \end{cases}$$

Koliki je zbroj prvih 100 članova niza?

🍃 Zadatak 5: Opći član niza je $a_n = \sin \frac{n \cdot \pi}{3}$. Odredi 15., 25. i 35. član niza.

🍃 Zadatak 6: Ako je $a_n = \left\lfloor \log_{\frac{1}{2}} n \right\rfloor$, odredi 5., 25. i 100. član niza.

🍃 Zadatak 7: U nizu (a_n) je $a_1 = 4$ te $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - n(n-1)$, za $n \geq 1$. Odredi sedmi član ovog niza.

[★] Zadatak 8: Zbroj prvih n članova niza (a_n) za svaki n četverostruko je veći od kvadrata broja članova. koji je to niz?

🍃 Zadatak 9: U nizu (a_n) je $a_1 = 2$ te $a_{n+1} = 2a_n - n^2$, za $n \geq 1$. Odredi sedmi član ovog niza.

[★] Zadatak 10: Zbroj prvih n članova niza (a_n) za svaki n trostruko je manji od kvadrata broja članova. koji je to niz?

🍃 Zadatak 11: Jesu li brojevi 0, 50 i -6 članovi niza s općim članom

$a_n = n^2 - 5n$? Ako jesu, odredi im redni broj.

☞ Zadatak 12: Jesu li brojevi 0, -12 i 30 članovi niza s općim članom $a_n = 11n - n^2$? Ako jesu, odredi im redni broj.

☞ Zadatak 13: Odredi 37. i 2000. član niza (a_n) ako je $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ te $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, za $n \geq 2$.

☞ Zadatak 14: Odredi deseti član niza (a_n) ako je $a_1 = 1$, $a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}$, za $n \geq 1$.

◆ Aritmetički niz ◆

☞ Zadatak 15: Koliki je zbroj svih troznamenkastih brojeva koji pri djeljenu s 5 daju ostatak 1 ili 2?

☞ Zadatak 16: Nadji zbroj svih negativnih brojeva koji su članovi niza (a_n) , ako je $a_n = 1.5n - 48$.

☞ Zadatak 17: Zbroj prvih 50 članova nekog aritmetičkog niza jednak je 200, a zbroj sljedećih 50 iznosi 2700. Odredi prvi član niza.

☞ Zadatak 18: Ako je sa $S_n = 2n^2 + 3n$ dan zbroj prvih n članova aritmetičkog niza, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Kako glasi opći član tog niza?

☞ Zadatak 19: Niz a_n je aritmetički te vrijedi:

$$a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{11} = 72$$

Koliko je $a_1 + a_6 + a_{11}$?

☞ Zadatak 20: U aritmetičkom nizu vrijedi:

$$a_1 \cdot a_4 = -36$$

$$a_2 \cdot a_3 = 14$$

Odredi peti član ovog niza.

☞ Zadatak 21: Dani su aritmetički nizovi:

$$6, 8, 11, 14, \dots$$

$$3, 7, 11, 15, \dots$$

Odredi deseti član u nizu sto ga čine zajednički članovi ovih dvaju nizova.

🍃 Zadatak 22: U aritmetičkom je nizu:

$$a_3 + a_5 = 2$$

$$a_3 \cdot a_5 = -48$$

Odredi zbroj prvih deset članova ovog niza.

🍃 Zadatak 23: Zbroj prvih četiri člana aritmetičkog niza jednak je 35, zbroj posljednja četiri -77 , a zbroj svih članova niza iznosi -63 . Koji je to niz?

🍃 Zadatak 24: U aritmetičkom nizu vrijedi:

$$a_2 + a_5 + a_8 + a_{11} + a_{14} + a_{17} = 15$$

Koliko je S_{18} ?

🍃 Zadatak 25: Koliki je zbroj svih negativnih članova aritmetičkog niza

$$-13.5, -11.4, -9.3, \dots$$

🍃 Zadatak 26: Neki su članovi nizova

$$21, 25, 29, \dots$$

$$16, 21, 26, \dots$$

jednaki. Koliki je zbroj prvih 10 takvih članova?

🍃 Zadatak 27: U aritmetičkom je nizu $a_7 = 21$, $S_7 = 105$. Odredi taj niz.

🍃 Zadatak 28: Za koje sve n u aritmetičkom nizu

$$-\frac{15}{2}, -\frac{41}{6}, -\frac{37}{6}, \dots$$

vrijedi $|a_n| < 1$?

🍃 Zadatak 29: Zbroj n članova nekog niza jednak je $S_n = 2n^2 - 3n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dokazi da je taj niz aritmetički. Odredi osmi član niza.

🍃 Zadatak 29: Zbroj triju uzastopnih članova aritmetičkog niza jednak je 3, zbroj njihovih kvadrata iznosi $\frac{29}{9}$. Koji su to brojevi?

🍃 Zadatak 30: U nekom je aritmetičkom nizu

$$a_5 + a_9 = 12$$

Koliko je S_{13} ?

🍃 Zadatak 31: U aritmetickom je nizu:

$$a_1 + a_4 + a_7 + \dots + a_{16} = 147$$

Koliko je $a_1 + a_6 + a_{11} + a_{16}$?

🍃 Zadatak 32: U aritmetickom je nizu

$$a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20$$

Koliko je S_{20} ?

🍃 Zadatak 33: Odredi aritmeticki niz od 15 članova u kojem je posljednji član trostruko veći od prvoga, a zbroj svih članova niza iznosi 135.

🍃 Zadatak 34: Za koji su realni broj x brojevi $\frac{1}{x+2}$, $\frac{1}{x+1}$, $\frac{1}{x-1}$ prvi, drugi i treći član aritmetickog niza? Odredi a_{50} .

🍃 Zadatak 35: Koliko članova niza

$$2, 5, 8, 11, 14, \dots$$

treba zbrojiti kako bi zbroj bio veći od 100?

🍃 Zadatak 36: U aritmetickom je nizu $S_4 = 14$ i $S_{12} = 18$. Koliko je S_8 ?

🍃 Zadatak 37: Zapiši opći član aritmetickog niza (a_n) ako vrijedi

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 70$$

$$a_2 + a_4 + a_8 + a_{10} = 85$$

◆ Geometrijski niz ◆

🍃 Zadatak 38: U geometrijskom je nizu $a_2 = 4\sqrt{5}$, $a_5 = 20$. Odredi kolicnik (kvocijent) niza.

🍃 Zadatak 39: Zbroj prva tri člana geometrijskog niza jednak je $\frac{3}{8}$, a zbroj sljedeća tri člana -3 . Koliki je zbroj prvih devet članova.

🍃 Zadatak 40: Koliki je umnožak prvih osam članova geometrijskog niza (a_n) , ako je $a_4 \cdot a_5 = m$?

🍃 Zadatak 41: U geometrijskom je nizu umnozak prvih triju članova jednak 64, a zbroj kubova istih članova iznosi 584. O kojem je nizu riječ.

🍃 Zadatak 42: Napisi 10. član niza

$$\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[6]{2}, \dots$$

🍃 Zadatak 43: U geometrijskom je nizu zbroj prvih triju članova jednak 27, a zbroj kvadrata istih tih članova iznosi 364. O kojem je nizu riječ?

🍃 Zadatak 44: Dopisi sljedeći član u nizu

$$\sqrt[6]{3}, \sqrt[3]{3}, \sqrt{3}, \dots$$

🍃 Zadatak 45: Prvi član geometrijskog niza je $a_1 = 7 \cdot \sqrt[3]{4}$, a kolicnik niza jednak je $q = \sqrt[6]{2}$. Odredi a_9 . Koji su članovi ovog niza racionalni?

🍃 Zadatak 46: Prvi član geometrijskog niza je $a_1 = 2 \cdot \sqrt[5]{27}$, a kolicnik niza jednak je $q = \sqrt[10]{3}$. Odredi a_{15} . Koji su članovi ovog niza racionalni?

🍃 Zadatak 47: Koliki je zbroj svih članova niza (a_n) ,

$$\frac{1}{18}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{8}, \dots$$

za koje je $|a_n| < 1$?

🍃 Zadatak 48: Zbroj triju uzastopnih članova geometrijskog niza iznosi 26, zbroj njihovih kvadrata jednaka je 364. Koji su to brojevi?

🍃 Zadatak 49: Zbroj prvog i četvrtog člana geometrijskog niza iznosi 27, a zbroj drugog i trećeg jednak je 18. Odredi prvi član i kolicnik tog niza.

🍃 Zadatak 50: Šest brojeva uzastopni su članovi geometrijskog niza. Zbroj prvih triju jednak je 168, a posljednjih triju 21. Koji su to brojevi?

🍃 Zadatak 51: Zbroj prva tri člana geometrijskog niza iznosi 28, zbroj tri sljedeća $3\frac{1}{2}$. Koji je osmi član ovog niza?

🍃 Zadatak 52: U nekom je geometrijskom nizu $a_{m+n} = 9$, a $a_{m-n} = 4$. Odredi a_m .

🍃 Zadatak 53: Devet brojeva čine geometrijski niz. Zbroj prva tri iznosi 21, posljednja tri 1344. Odredi prvi član i kolicnik ovog niza.

🍃 Zadatak 54: Četiri su broja uzastopni članovi geometrijskog niza. Koji su

to brojevi ako je zbroj dvaju srednjih 18, a zbroj dvaju krajnjih 27?

🍃 Zadatak 55: Zbroj prvih n članova geometrijskog niza dan je formulom $S_n = 81 \left[1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right]$. Odredi opći član ovog niza.

🍃 Zadatak 56: Odredi 4. član geometrijskog niza u kojem je zbroj prva tri člana -14 , a njihov umnožak jednak 216 .

🍃 Zadatak 57: U geometrijskom nizu (a_n) je

$$a_2 \cdot a_4 \cdot a_6 \cdot \dots \cdot a_{16} = 16$$

Odredi deveti član ovoga niza, a_9 .

🍃 Zadatak 58: Zbroj prva četiri člana geometrijskog niza jednak je 30 , a zbroj četiri sto slijede 480 . Koliki je zbroj prvih 12 članova ovog niza?

🍃 Zadatak 59: U nekom geometrijskom nizu (a_n) je

$$a_2 + a_4 = -\frac{5}{12}$$

$$a_2 \cdot a_4 = \frac{1}{36}$$

Koji je to niz?

🍃 Zadatak 60: Zbroj tri uzastopna člana geometrijskog niza iznosi 126 . Ako je srednji član jednak 24 , koliki je najmanji?

◆ Kombinacija aritmetičkog i geometrijskog niza ◆


🍃 Zadatak 61: Od četiri broja prva su tri uzastopni članovi su geometrijskog, a posljednja tri aritmetičkog niza. Zbroj dvaju krajnjih brojeva jednak je 21 , a zbroj dvaju srednjih 18 . Koji su to brojevi?


🍃 Zadatak 62: Tri su broja prva tri člana geometrijskog niza, odnosno prvi, četvrti i šesnaesti član nekog aritmetičkog niza. Ako je zbroj tih brojeva 63 , koji su to brojevi?


🍃 Zadatak 63: Tri su broja, od kojih je treći 12 , uzastopna tri člana nekog geometrijskog niza. Ako se 12 zamijeni s 9 , tri broja bit će uzastopni članovi aritmetičkog niza. Koji su to brojevi?


🍃 Zadatak 64: Od četiri broja prva tri su uzastopni članovi aritmetičkog, a


posljednja tri geometrijskog niza. Zbroj srednjih članova jednak je -3 , zbroj krajnjih 24. Koji su to brojevi?


 Zadatak 65: Tri su broja uzastopna tri člana geometrijskog niza. Ako srednjem broju dodamo 2 dobit ćemo tri broja koji su uzastopni članovi aritmetičkog niza. Ako potom trećem broju dodamo 9 opet ćemo dobiti tri uzastopna člana geometrijskog niza. Odredi ta tri broja.


 Zadatak 66: Prvi članovi aritmetičkog i geometrijskog niza su jednaki 3, drugi član aritmetičkog veći je za 6 od drugog člana geometrijskog, a treći su članovi jednaki. Koji su to nizovi?


 Zadatak 67: Odredi četiri broja od kojih su prva tri uzastopni članovi aritmetičkog, a posljednja tri geometrijskog niza. Zbroj dvaju krajnjih od ova četiri broja jednak je 22, a zbroj dvaju srednjih 20.

 Zadatak 68: Aritmetički niz ima 11 članova. Prvi, peti i jedanaesti su tri prva člana geometrijskog niza. Odredi aritmetički niz, ako mu je prvi član 24.


 Zadatak 69: Četiri broja čine aritmetički niz. Dodamo li im redom 1, 1, 3, 9 dobit ćemo četiri broja koji su uzastopni članovi geometrijskog niza. Koji su to brojevi?

 Zadatak 70: Prvi član aritmetičkog i prvi član geometrijskog niza jednaki su 2. I treći članovi ovih nizova jednaki su, a jedanaesti član aritmetičkoga niza jednak je petomu članu geometrijskog. Koji su to nizovi?

 Zadatak 71: Četiri broja uzastopni su članovi geometrijskog niza. Ako im redom dodamo 3, 9, 11 i 1 dobit ćemo četiri uzastopna člana aritmetičkog niza. Koji su to brojevi?

 Zadatak 72: Četiri broja uzastopni su članovi aritmetičkog niza. Ako im redom oduzmemo 2, 5, 7 i 7 dobit ćemo četiri uzastopna člana geometrijskog niza. Koji su to brojevi?

[*] Zadatak 73: Prvi, treći i jedanaesti član aritmetičkog niza tri su uzastopna člana geometrijskog niza. Odredi kolicnik geometrijskog niza.

 Zadatak 74: Prvi članovi aritmetičkog i geometrijskog niza jednaki su 3, a drugi član geometrijskog niza veći je za 6 od drugog člana geometrijskog, a treći su članovi jednaki. Koji su to nizovi?

◆ Limes nizova ◆

🍃 Zadatak 75: Dokazi da vrijedi:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3n + 1}{2n - 1} = \frac{3}{2}$$

🍃 Zadatak 76: Dokazi da vrijedi:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2n - 3}{4n + 5} = \frac{1}{2}$$

🍃 Zadatak 77: Odredi:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$$

🍃 Zadatak 78: Odredi:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n} - n \right)$$

◆ [★★] Limes monotonihi nizova ◆

🍃 Zadatak 79: Dokazi da je niz (a_n) ciji je opci clan jednak

$$a_n = \frac{3^n}{1 + 3^{2n}}$$

monotono padajuci.

🍃 Zadatak 80: Dokazi da je niz (a_n) ciji je opci clan jednak

$$a_n = \frac{1}{2^n + 2^{-n}}$$

monotono padajuci.

🍃 Zadatak 81: Dokazi da je niz s opcim clanom

$$a_n = \frac{e^n}{(n + 1)!}$$

padajuci.

🍃 Zadatak 82: Dokazi da je niz s opcim clanom

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1)}{n!}$$

rastuci.

◆ Geometrijski red ◆

🍃 Zadatak 83: Odredi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{5^{k-1}}$$

🍃 Zadatak 84: Odredi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^{k+1}}{8^{k-1}}$$

🍃 Zadatak 85: Odredi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2^n}{3^{n+1}}$$

🍃 Zadatak 86: Odredi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

[**] Zadatak 87: Pravilnom sesterokutu duljine stranice a upisan je sesterokut kojem su vrhovi polovista stranica danog sesterokuta. Po istom nacelu dobivenom je upisan novi sesterokut. Postupak se nastavlja. Koliki je zbroj površina svih tih sesterokuta.

[**] Zadatak 88: Na stranicama \overline{AB} , \overline{BC} i \overline{AC} jednostranice trokuta $\triangle ABC$ odabrane su točke A_1 , B_1 i C_1 tako da je $|AA_1| : |A_1B| = |BB_1| : |B_1C| = |CC_1| : |C_1A| = 1 : 3$. Po istim nacelu na stranicama trokuta $\triangle A_1B_1C_1$ smjestene su točke A_2 , B_2 i C_2 , na stranicama trokuta $\triangle A_2B_2C_2$ točke A_3 , B_3 i C_3 i tako dalje.

Koliki je zbroj površina svih tako dobivenih jednakostraničnih trokuta, ako je duljina stranice trokuta $\triangle ABC$ jednaka a ?

