Vieteove formule

Prisjetimo se prvo sto su Viete-ove formule.

Tvrdnja: Neka je dana kvadratna jednadzba $ax^2 + bx + c = 0$. Tada izraze oblika:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

pri cemu su x_1 i x_2 rjesenja dane kvadratne jednadzbe, zovemo Viete-ove formule.

Napomena: Kroz cijeli dokument pretpostavljam da mi je dana neka kvadratna jednadzba $ax^2 + bx + c = 0$ cija su rjesenja x_1 i x_2.

Dakle pokusat cemo neke od izraza koji se pojavljuju u zadacima zapisati pomocu Viete-ovih formula, dakle iskljucivo preko izraza koji ce sadrzavati samo izraze $x_1 + x_2$ i $x_1 \cdot x_2$, koje iz pocetne tvrdnje znamo kako izracunati.

$- \star -$

Problem 1: Prikazi izraz:

$$x_1^2 + x_2^2$$

pomocu Viete-ovih formula, tocnije izraza oblika $x_1 + x_2$ i $x_1 \cdot x_2$.

Rjesenje: Pocnimo od necega sto znamo cemu je jednako, primjerice $x_1 + x_2$. To je jedna od Viete-ovih formula koju racunam preko tvrdnje dane na pocetku. Nadalje da bih dobio iz izraza dobio $x_1 + x_2$ kvadratne clanove moram ga naravno kvadrirati. Racunam:

$$\left(\underline{x_1 + x_2}\right)^2 = x_1^2 + 2 \cdot \underline{x_1 \cdot x_2} + x_2^2$$

Uocim da su podcrtani dijelovi upravo Vieteove formule pa ih prebacim na lijevu stranu. Pogledajmo sto se na taj nacin dobije:

$$(x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 = x_1^2 + x_2^2$$

Okrenem jednakost, dakle slijedi:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2$$

Dakle promotrim li malo dobiveni izraz uocavam da mi se na lijevoj strani nalazi ono sto sam zelio odrediti, dok se na desnoj strani nalaze samo izrazi oblika $x_1 + x_2$ i $x_1 \cdot x_2$ koje prepoznajem kao Viete-ove formule. Dakle time je problem rijesen.

$- \star -$

Problem 2: Prikazi izraz:

$$x_1^3 + x_2^3$$

pomocu Viete-ovih formula, tocnije izraza oblika $x_1 + x_2$ i $x_1 \cdot x_2$.

Rjesenje: Prisjetim se da sam prosle godine ucio kako rastaviti kub zbroja na faktore, drugim rijecim prisjetim se da vrijedi identitet $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot \left(a^2 - ab + b^2\right)$. Imajuci to na umu racunam:

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2) \cdot \left(x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_2^2\right)$$

Zapisimo clanove sume u drugoj zagradi s desne strane malo drugacije:

$$x_1^3 + x_2^3 = \left(\underline{x_1 + x_2}\right) \cdot \left(x_1^2 + x_2^2 - \underline{x_1 \cdot x_2}\right)$$

Promotrim li malo lievu stranu, podcrtane dijelove mogu prepoznati kao Viete-ove formule, dok jedini dio koji jos moramo srediti jest $x_1^2 + x_2^2$. No cemu je to jednako izrazeno preko Viete-ovim formula odredeno je u prethodnom problemu. Odredili smo da vrijedi $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2$. Imajuci to na umu dalje racunam:

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2) \cdot \left[(x_1 + x_2)^2 \underline{-2 \cdot x_1 \cdot x_2} - \underline{x_1 \cdot x_2}\right]$$

Uvidim da su podcrtani izrazi istovjetni sto mi samim time daje mogucnost da ih oduzmem. Slijedi:

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2) \cdot \left[(x_1 + x_2)^2 - 3 \cdot x_1 \cdot x_2\right]$$

Dakle promotrim li malo dobiveni izraz uocavam da mi se na desnoj strani nalaze samo izrazi oblika $x_1 + x_2$ i $x_1 \cdot x_2$ koje prepoznajem kao Viete-ove formule. Dakle time je problem rijesen.

$- \star -$

Problem 3: Prikazi izraz:

$$x_1^4 + x_2^4$$

pomocu Viete-ovih formula, tocnije izraza oblika $x_1 + x_2$ i $x_1 \cdot x_2$.

Rjesenje: Prisjetim se da sam sam prije kvadrirao izraz
$x_1 + x_2$ kako bi dosao do izraza $x_1^2 + x_2^2$. Vodeci se istom idejom kvadrirajmo izraz $x_1^2 + x_2^2$ posto znamo kako on izgleda u terminima Viete-ovih formula. Racunam:

$$\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 = \left((x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2\right)^2$$

Lijevu i desnu stranu raspisem po identitetu $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, dakle slijedi:

$$\left(x_1^2\right)^2 + 2 \cdot x_1^2 \cdot x_2^2 + \left(x_2^2\right)^2 = \left((x_1 + x_2)^2\right)^2 - 2 \cdot (x_1 + x_2)^2 \cdot (2 \cdot x_1 \cdot x_2) + (2 \cdot x_1 \cdot x_2)^2$$

$$x_1^4 + 2 \cdot x_1^2 \cdot x_2^2 + x_2^4 = (x_1 + x_2)^4 - 4 \cdot (x_1 + x_2)^2 \cdot (x_1 \cdot x_2) + 4 \cdot (x_1 \cdot x_2)^2$$

Sredim lijevu stranu dobivenog izraza prema poznatom identitetu $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$:

$$x_1^4 + 2 \cdot (x_1 \cdot x_2)^2 + x_2^4 = (x_1 + x_2)^4 - 4 \cdot (x_1 + x_2)^2 \cdot (x_1 \cdot x_2) + 4 \cdot (x_1 \cdot x_2)^2$$

Nadalje prebacim izraz $2 \cdot (x_1 x_2)^2$ na desnu stranu:

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1 + x_2)^4 - 4 \cdot (x_1 + x_2)^2 \cdot (x_1 \cdot x_2) + \underline{4 \cdot (x_1 \cdot x_2)^2} - \underline{2 \cdot (x_1 \cdot x_2)^2}$$

Oduzmem podcrtane stvari jer vidim sa da su to istovrsne potencije te dobijem:

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1 + x_2)^4 - 4 \cdot (x_1 + x_2)^2 \cdot (x_1 \cdot x_2) + 2 \cdot (x_1 \cdot x_2)^2$$

Promotrim li dobiveni izraz uocavam da sam na lijevoj strani dobio upravo ono sto sam trebao, dok se na lijevoj strani nalaze samo izrazi oblike $x_1 + x_2$ i $x_1 x_2$ koje prepoznajem kao Viete-ove formule. Time je problem rijesen.

$- \star -$

Problem 4: Prikazi izraz:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

pomocu Viete-ovih formula, tocnije izraza oblika $x_1 + x_2$ i $x_1 \cdot x_2$.

Rjesenje: Pocinjem na nacin da napravim jedino sto zapravo mogu, a to je da zbrojim dane razlomke. Zajednicki nazivnik je $x_1 \cdot x_2$. Racunam:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 \cdot 1 + x_1 \cdot 1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}$$

Promotrim li razlomak na desnoj strani vidim da se i u brojniku i u nazivniku nalaze izrazi oblika $x_1 + x_2$ i $x_1 \cdot x_2$ koje prepoznajem kao Viete-ove formule. Dakle time je problem rijesen.

$- \star -$

Problem 5: Prikazi izraz:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$$

pomocu Viete-ovih formula, tocnije izraza oblika $x_1 + x_2$ i $x_1 \cdot x_2$.

Rjesenje: Pocinjem na nacin da napravim jedino sto zapravo mogu, a to je da zbrojim dane razlomke. Zajednicki nazivnik je $x_1^2 \cdot x_2^2$. Racunam:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_2^2 \cdot 1 + x_1^2 \cdot 1}{x_1^2 \cdot x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2}$$

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2}$$

Nazivnik razlomka s desne strane raspisem po identitetu $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$. Dakle slijedi:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_1 \cdot x_2)^2}$$

Nadalje izraz u brojniku razlomka s desne strane jest izraz kojeg smo vec zapisali preko izraza oblika $x_1 + x_2$ i $x_1 \cdot x_2$ koje prepoznajem kao Viete-ove formule. Drugim rijecima vrijedi:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2$$

(rjesenje prvog problema). Imajuci to na umu dalje racunam:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_1 \cdot x_2)^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2}{(x_1 \cdot x_2)^2}$$

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2}{(x_1 \cdot x_2)^2}$$

Promotrim li razlomak na desnoj strani vidim da se i u brojniku i u nazivniku nalaze izrazi oblika $x_1 + x_2$ i $x_1 \cdot x_2$ koje prepoznajem kao Viete-ove formule. Dakle time je problem rijesen.

$- \star -$

Problem 6: Prikazi izraz:

$$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}$$

pomocu Viete-ovih formula, tocnije izraza oblika $x_1 + x_2$ i $x_1 \cdot x_2$.

Rjesenje: Pocinjem na nacin da napravim jedino sto zapravo mogu, a to je da zbrojim dane razlomke. Zajednicki nazivnik je $x_1^3 \cdot x_2^3$. Racunam:

$$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{x_2^3 \cdot 1 + x_1^3 \cdot 1}{x_1^3 \cdot x_3^2} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^3 \cdot x_2^3}$$

$$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^3 \cdot x_2^3}$$

Nazivnik razlomka s desne strane raspisem po identitetu $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$. Dakle slijedi:

$$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{(x_1 \cdot x_2)^3}$$

Nadalje izraz u brojniku razlomka s desne strane jest izraz kojeg smo vec zapisali preko izraza oblika $x_1 + x_2$ i $x_1 \cdot x_2$ koje prepoznajem kao Viete-ove formule. Drugim rijecima vrijedi:

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2) \cdot \left[(x_1 + x_2)^2 - 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \right]$$

(rjesenje drugog problema). Imajuci to na umu dalje racunam:

$$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{(x_1 \cdot x_2)^3} = \frac{(x_1 + x_2) \cdot \left[(x_1 + x_2)^2 - 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \right]}{(x_1 \cdot x_2)^3}$$

$$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{(x_1 + x_2) \cdot \left[(x_1 + x_2)^2 - 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \right]}{(x_1 \cdot x_2)^3}$$

Promotrim li razlomak na desnoj strani vidim da se i u brojniku i u nazivniku nalaze izrazi oblika $x_1 + x_2$ i $x_1 \cdot x_2$ koje prepoznajem kao Viete-ove formule. Dakle time je problem rijesen.

$- \star -$

Problem 7: Prikazi izraz:

$$\frac{1}{x_1^4} + \frac{1}{x_2^4}$$

pomocu Viete-ovih formula, tocnije izraza oblika $x_1 + x_2$ i $x_1 \cdot x_2$.

Rjesenje: Pocinjem na nacin da napravim jedino sto zapravo mogu, a to je da zbrojim dane razlomke. Zajednicki nazivnik je $x_1^4 \cdot x_2^4$. Racunam:

$$\frac{1}{x_1^4} + \frac{1}{x_2^4} = \frac{x_2^4 \cdot 1 + x_1^4 \cdot 1}{x_1^4 \cdot x_3^4} = \frac{x_1^4 + x_2^4}{x_1^4 \cdot x_2^4}$$

$$\frac{1}{x_1^4} + \frac{1}{x_2^4} = \frac{x_1^4 + x_2^4}{x_1^4 \cdot x_2^4}$$

Nazivnik razlomka s desne strane raspisem po identitetu $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$. Dakle slijedi:

$$\frac{1}{x_1^4} + \frac{1}{x_2^4} = \frac{x_1^4 + x_2^4}{(x_1 \cdot x_2)^4}$$

Nadalje izraz u brojniku razlomka s desne strane jest izraz kojeg smo vec zapisali preko izraza oblika $x_1 + x_2$ i $x_1 \cdot x_2$ koje prepoznajem kao Viete-ove formule. Drugim rijecima vrijedi:

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1 + x_2)^4 - 4 \cdot (x_1 + x_2)^2 \cdot (x_1 \cdot x_2) + 2 \cdot (x_1 \cdot x_2)^2$$

(rjesenje treceg problema). Imajuci to na umu dalje racunam:

$$\frac{1}{x_1^4} + \frac{1}{x_2^4} = \frac{x_1^4 + x_2^4}{(x_1 \cdot x_2)^4} = \frac{(x_1 + x_2)^4 - 4 \cdot (x_1 + x_2)^2 \cdot (x_1 \cdot x_2) + 2 \cdot (x_1 \cdot x_2)^2}{(x_1 \cdot x_2)^3}$$

$$\frac{1}{x_1^4} + \frac{1}{x_2^4} = \frac{(x_1 + x_2)^4 - 4 \cdot (x_1 + x_2)^2 \cdot (x_1 \cdot x_2) + 2 \cdot (x_1 \cdot x_2)^2}{(x_1 \cdot x_2)^3}$$

Promotrim li razlomak na desnoj strani vidim da se i u brojniku i u nazivniku nalaze izrazi oblika $x_1 + x_2$ i $x_1 \cdot x_2$ koje prepoznajem kao Viete-ove formule. Dakle time je problem rijesen.

$- \star -$

Problem 8: Prikazi izraz:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$$

pomocu Viete-ovih formula, tocnije izraza oblika $x_1 + x_2$ i $x_1 \cdot x_2$.

Rjesenje: Pocinjem na nacin da napravim jedino sto zapravo mogu, a to je da zbrojim dane razlomke. Zajednicki nazivnik je $x_1 \cdot x_2$. Racunam:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_2}{x_2 \cdot x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 \cdot x_2}$$

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 \cdot x_2}$$

Promotrim li razlomak na desnoj strani vidim da se u brojniku nalazi izraz oblika $x_1 \cdot x_2$ koji prepoznajem kao Viete-ovu formulu. Nadalje izraz u brojniku razlomka s desne strane jest izraz kojeg smo vec zapisali preko izraza oblika $x_1 + x_2$ i $x_1 \cdot x_2$ koje prepoznajem kao Viete-ove formule. Drugim rijecima vrijedi:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2$$

(rjesenje prvog problema). Imajuci to na umu dalje racunam:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2}{x_1 \cdot x_2}$$

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2}{x_1 \cdot x_2}$$

Promotrim li razlomak na desnoj strani vidim da se i u brojniku i u nazivniku nalaze izrazi oblika $x_1 + x_2$ i $x_1 \cdot x_2$ koje prepoznajem kao Viete-ove formule. Dakle time je problem rijesen.

$- \star -$