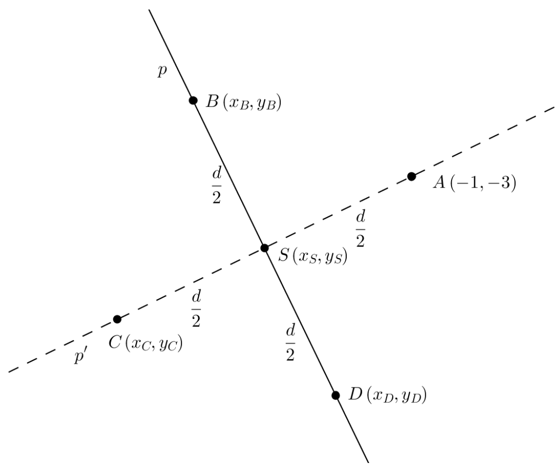
8.4 Udaljenost tocke od pravca i simetrala kuta

Zadatak 6: (str. 68) Dijagonala kvadrata $\square ABCD$ pripada pravcu $4x+3y-12=0$. Ako je tocka $A(-1,3)$ jedan vrh, odredi ostala tri vrha kvadrata.

Rjesenje: Prije samog racuna probajmo sa skice zakljuciti sto zapravo trebamo racunati:



Dakle ideja je sljedeca, odredit cemo jednadzbu pravca okomitog na pravac kojem pripada dijagonala. Sjeciste S tih dvaju pravaca jer sjeciste dviju dijagonala kvadrata, jer znamo da su dijagonale kvadrata medjucobno okomite. Preostala tri vrha su tocke koje pripadaju pravcima kojima pripadaju dijagonale a jednako su udaljene od tocke sjecista S, kao u tocka A od pravac danog u tekstu zadatka.

Dakle prvo cemo odrediti jednadzbu pravca okomitog na pravac $4x+3y-12=0$ kroz tocku $A(-1,3)$. Da bismo to napravili pretvorimo jednadzbu pravca iz implicitnog u eksplicitni oblik kako bi saznali koji mu je koeficijent smjera. Racunam:

$$4x+3y-12=0$$

$$3y=-4x+12$$

Pomnozim cijelu jednadzbu s $\frac{1}{3}$, slijedi:

$$3y=-4x+12 \ / \cdot \frac{1}{3}$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$\frac{{}^{1}\cancel{3}y}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{3}_{1}}=\frac{-4x}{1}\cdot\frac{1}{3}+\frac{{}^{4}\cancel{12}}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{3}_{1}}$$

$$y = \underbrace{-\frac{4}{3}}_{k_p} x + 4$$

Dakle koeficijent smjera pravca p, danog u tekstu zadatka, jest $k_p = -\frac{4}{3}$. Koeficijent smjera $k_{p'}$ pravca p' okomitog na pravac p kojem je keoeficijent smjera k_p racuna se preko izraza $k_{p'} = -\frac{1}{k_p}$. Racunam:

$$k_{p'} = -\frac{1}{\underbrace{k_p}_{-\frac{4}{3}}}$$

$$k_{p'} = -\frac{\frac{1}{1}}{-\frac{4}{3}} = -\left(-\frac{\frac{1}{1}}{\frac{4}{3}}\right) = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{4}{3}}$$

Rijesim se dvojnog razlomka po poznatom pricipu mnozenja vanjski sa vanjskim, donosno unutarnji s unutarnjim:

$$k_{p'} = (\frac{\frac{1}{1}}{\frac{4}{3}}\Bigg)$$

$$k_{p'} = \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 4} = \frac{3}{4}$$

Dakle koeficijent pravca p' okomitog na pravac p jest $k_{p'} = \frac{3}{4}$. Jednadzbu pravca kojem znam koeficijent smjera k i tocku kojom prolazi $T\,(x_T, y_T)$ racuna se prema izrazu $y - y_T = k\,(x - x_T)$. Mi cemo odrediti jednadzbu pravca kojem je koeficijent smjera $k_{p'} = \frac{3}{4}$, a koji prolazi tockom $A\,(-1, 3)$, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} k_{p'} = \frac{3}{4} \\ A(\overbrace{-1}^{x_A}, \overbrace{-3}^{y_B}) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad y - y_A = k_{p'}\,(x - x_A)$$

$$y - (-3) = \frac{3}{4}\,[x - (-1)]$$

$$y + 3 = \frac{3}{4}\,(x + 1)$$

Pomnozim cijelu jednadzbu s 4, slijedi:

$$y + 3 = \frac{3}{4}\,(x + 1) \ \ / \cdot 4$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$y \cdot 4 + 3 \cdot 4 = \frac{3}{{}_1\cancel{4}}(x+1) \cdot \frac{\cancel{4}^1}{1}$$

$$4y + 12 = 3(x+1)$$

$$4y + 12 = 3x + 3$$

$$3x - 4y - 9 = 0$$

Dakle jednadzba pravca p' okomitog na pravac p jest $3x - 4y + 5 = 0$. Nadalje odredimo sjeciste tih dvaju pravaca kako bi odredili tocku S, sjeciste i poloviste dijagonala kvadrata. Dakle trazim rijesenje sljedeceg sustava jednadzbi:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 12 = 0 \\ 3x - 4y - 9 = 0 \end{cases}$$

Prvu jednadzbu mnozim s 4, dok drugu mnozim s 3, slijedi:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 12 = 0 \ / \cdot 4 \\ 3x - 4y - 9 = 0 \ / \cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x \cdot 4 + 3y \cdot 4 - 12 \cdot 4 = 0 \cdot 4 \\ 3x \cdot 3 - 4y \cdot 3 - 9 \cdot 3 = 0 \cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16x + 12y - 48 = 0 \\ 9x - 12y - 27 = 0 \end{cases}$$

Zbrojim jednadzbe, slijedi:

$$25x - 75 = 0$$

$$25x = 75$$

Pomnozimo cijelu jednadzbu s $\frac{1}{25}$:

$$25x = 75 \ / \cdot \frac{1}{25}$$

Skratim sto se skratiti dade:

$$\frac{{}^1\cancel{25}x}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{25}_1} = \frac{{}^3\cancel{75}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{25}_1}$$

$$x = 3$$

Uvrstimo dobivenu vrijednost za x koordiantu tocke S u prvu jednadzbu kako bi odredili y koordinatu sjecista S, racunam:

$$4\overbrace{x}^{3} + 3y - 12 = 0$$

$$4 \cdot 3 + 3y - 12 = 0$$

$$12+3y=12$$

$$3y=0$$

Pomnozim cijelu jednadzbu s $\frac{1}{3}$, slijedi:

$$3y=0\ /\cdot\frac{1}{3}$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$\frac{{}^{1}\cancel{3}y}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{3}_{1}}=0\cdot\frac{1}{3}$$

$$y=0$$

Dakle koordiante sredista su $S\left(3,0\right)$. Nadalje odredit cemo udaljenost tocke A od pravca p kako bi odredili pola duljine dijagonale, jer znamo da su svi vrhovi kvadrata od sjecista udaljeni za istu udaljenost i to pola duljine dijagonale. Udaljenost tocke $T\left(x_0,y_0\right)$ od pravca p ... $Ax+By+C=0$ racuna se prema izrazu $d\left(T,p\right)=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Racunam:

$$\left.\begin{array}{l}\overbrace{4}^{A}x+\overbrace{3}^{B}y\overbrace{-12}^{C}=0\\ A(\overbrace{-1}^{x_A},\overbrace{-3}^{y_B})\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad\frac{d}{2}=d\left(T,p\right)=\frac{\left|Ax_A+By_A+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$\frac{d}{2}=\frac{\left|4\cdot(-1)+3\cdot(-3)-12\right|}{\sqrt{4^2+3^2}}$$

$$\frac{d}{2}=\frac{\left|-4-9-12\right|}{\sqrt{16+9}}$$

$$\frac{d}{2}=\frac{\left|-25\right|}{\sqrt{25}}$$

Pokratim sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{d}{2}=\frac{{}^{5}\cancel{25}}{\cancel{5}_{1}}$$

$$\frac{d}{2}=5\ \text{jedinicnih duzina}$$

Moj zadatak sada postaje pronaci tocke na pravcu p' koje su od sjecista dijagonala S udaljene upravo za $\frac{d}{2}$. Da bismo odredili koordinate svih tocka koje se nalaze na pravcu p' prebacimo njegovu jednadzbu iz implicitnog oblika u eksplicitni. Racunam:

$$3x-4y-9=0$$

$$4y = 3x - 9$$

Pomnozim cijelu jednadzbu s $\frac{1}{3}$, slijedi:

$$4y = 3x - 9 \ / \cdot \frac{1}{4}$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$\frac{{}^{1}\cancel{4}y}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{4}_{1}} = \frac{3x}{1} \cdot \frac{1}{4} - \frac{9}{1} \cdot \frac{1}{4}$$

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{4}$$

Dakle sve tocke P' pravca p' su oblika $P'\left(x, \frac{3}{4}x - \frac{9}{4}\right)$. Dakle prema izrazu za racunanje udaljenosti izmedju dviju tocaka $T_1\left(x_1, y_1\right)$, $T_2\left(x_2, y_2\right)$ koji je jednak $|T_1, T_2| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$ trazit cemo sve tocke P' pravca p' koje su od sjecista S dijagonala udaljene za $\frac{d}{2}$. Racunam:

$$\left.\begin{array}{l} |P'S| = \frac{d}{2} = 5 \\ P'(\overbrace{x}^{x_{P'}}, \overbrace{\frac{3}{4}x - \frac{9}{4}}^{y_{P'}}) \\ S(\overbrace{3}^{x_S}, \overbrace{0}^{y_S}) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad |P'S| = \sqrt{\left(x_S - x_{P'}\right)^2 + \left(y_S - y_{P'}\right)^2}$$

$$5 = \sqrt{(3 - x)^2 + \left(0 - \left(\frac{3}{4}x - \frac{9}{4}\right)\right)^2}$$

$$5 = \sqrt{(3 - x)^2 + \left(-\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}\right)^2} \ /^2$$

$$5^2 = \left[\sqrt{(3 - x)^2 + \left(-\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}\right)^2}\right]^2$$

$$25 = (3 - x)^2 + \left(\frac{9}{4} - \frac{3}{4}x\right)^2$$

Raspisemo clanove desne sume po izrazu za racunanje kvadrata razlike ($(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$), slijedi:

$$25 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + x^2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{4}x\right)^2$$

$$25 = 9 - 6x + x^2 + \frac{9^2}{4^2} - {}^{1}\cancel{2} \cdot \frac{9}{\cancel{4}_2} \cdot \frac{3}{4}x + \frac{3^2}{4^2}x^2$$

$$25 = 9 - 6x + x^2 + \frac{81}{16} - \frac{27}{8}x + \frac{9}{16}x^2$$

Pomnozim cijelu jednadzbu s 16, slijedi:

$$25 = 9 - 6x + x^2 + \frac{81}{16} - \frac{27}{8}x + \frac{9}{16}x^2 \ / \cdot 16$$

Skratim sto se skratiti dade:

$$25 \cdot 16 = 9 \cdot 16 - 6x \cdot 16 + x^2 \cdot 16 + \frac{81}{{}_1\cancel{16}} \cdot \frac{\cancel{16}^1}{1} - \frac{27}{{}_1\cancel{8}}x \cdot \frac{\cancel{16}^2}{1} + \frac{9}{{}_1\cancel{16}}x^2 \cdot \frac{\cancel{16}^1}{1}$$

$$400 = 144 - 96x + 16x^2 + 81 - 54x + 9x^2$$

$$25x^2 - 150x - 175 = 0$$

Pomnozim cijelu jednadzbu s $\frac{1}{25}$, slijedi:

$$25x^2 - 150x - 175 = 0 \ / \cdot \frac{1}{25}$$

Skratim sto se skratiti dade:

$$\frac{{}^1\cancel{25}x^2}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{25}_1} - \frac{{}^6\cancel{150}x}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{25}_1} - \frac{{}^7\cancel{175}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{25}_1} = 0 \cdot \frac{1}{25}$$

$$x^2 - 6x - 7 = 0$$

Rijesimo kvadratnu jednadzbu prema izrazu za rjesenja kvadratne jednadzbe:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1, x_2 = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 28}}{2}$$

$$x_1, x_2 = \frac{6 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$x_1, x_2 = \frac{6 \pm 8}{2}$$

Dakle rjesenja su oblika:

$$x_1 = \frac{6 - 8}{2} = \frac{{}^{-2}\cancel{-8}}{\cancel{2}_1} \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{6 + 8}{2} = \frac{{}^7\cancel{14}}{\cancel{2}_1}$$

$$x_1 = -1 \quad \text{i} \quad x_2 = 7$$

Kako vrijedi za y koordinatu tocaka na pravcu p' vrijedi $y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{4}$ tada dalje slijedi:

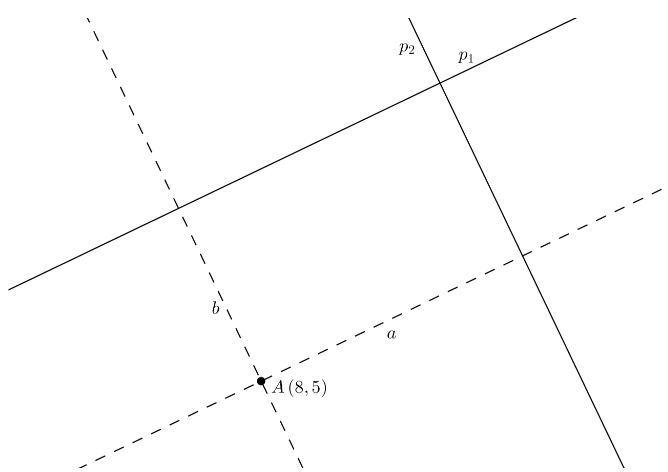
$$
\begin{aligned}
y_1 &= \frac{3}{4}\overbrace{x_1}^{-1} - \frac{9}{4} \quad \text{i} \quad y_2 = \frac{3}{4}\overbrace{x_2}^{7} - \frac{9}{4} \\
y_1 &= \frac{3}{4} \cdot (-1) - \frac{9}{4} \quad \text{i} \quad y_2 = \frac{3}{4} \cdot 7 - \frac{9}{4} \\
y_1 &= -\frac{3}{4} - \frac{9}{4} \quad \text{i} \quad y_2 = \frac{21}{4} - \frac{9}{4} \\
y_1 &= -\frac{{}^{3}\cancel{12}}{\cancel{4}_1} \quad \text{i} \quad y_2 = \frac{{}^{3}\cancel{12}}{\cancel{4}_1} \\
y_1 &= -3 \quad \text{i} \quad y_2 = 3
\end{aligned}
$$

Ovim putem dobili smo dva vrha $A\,(-1,-3)$ i $C\,(7,3)$. Dakle naravno da smo morali dobiti koordinate vrha A jer smo uzeli pravac na kojem se upravo nalazi tocka A. Nadalje trebamo jos odrediti koordinate vrhova B i D. No to ostavljam citatelju posto je postupak identican, samo se uzima u obzir pravac p.

⋆

Zadatak 8: (str. 68) Dvije stranice pravokutnika leze na pravcima $x+2y-3=0$ i $2x-y+3=0$. Ako je jedan vrh pravokutnika tocka $A\,(8,5)$, kolika je povrsina pravkutnika.

Rjesenje: Prije samog racuna probajmo sa skice zakljuciti sto zapravo trebamo racunati:



Znamo da je povrsina pravokutnika dana kao umnozak duljina njegovih stranica, $P = a \cdot b$. Promatrajuci sliku mozemo zakljuciti da ako odredimo udaljenost tocke A od pravaca koji predstavljaju dvije stranice pravokutnika dobit cemo duljine njegovih stranica.

Napomena: Dakle pravci na kojima leze stranice moraju biti medjucosno okomiti. Kad bi bili paralelni nikako nebi mogli odrediti jednu od duljina stranica. Slicna stvar se mora dogoditi i s danom tockom, ona se ne smije nalaziti ni na jednom pravcu jer kad bi se nalazila na jednom od pravaca nebi mogli odrediti duljine obje stranice pravokutnika vec samo jedne.

Dakle zadatak nam je odrediti udaljenost tocke A do pravca $x + 2y - 3 = 0$ i $2x - y + 3 = 0$. Udaljenost tocke $T(x_0, y_0)$ od pravca p ... $Ax + By + C = 0$ racuna se prema izrazu $d(T,p) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Prvo odredjujem udaljenost tocke A od pravaca $x + 2y - 3 = 0$, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} \overbrace{1}^{A} x + \overbrace{2}^{B} y \overbrace{-3}^{C} = 0 \\ A(\overbrace{8}^{x_A}, \overbrace{5}^{y_B}) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad a = d(T,p) = \frac{|Ax_A + By_A + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$a = \frac{|1 \cdot 8 + 2 \cdot 5 - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}}$$

$$a = \frac{|8 + 10 - 3|}{\sqrt{1 + 4}}$$

$$a = \frac{|15|}{\sqrt{5}}$$

$$a = \frac{15}{\sqrt{5}}$$

Racinaliziram dobiveni razlomak mnozeci brojnik i nazivnik s $\sqrt{5}$, slijedi:

$$a = \frac{15}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$a = \frac{15\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2}$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$a = \frac{{}^{3}\cancel{15}\sqrt{5}}{\cancel{5}_{1}}$$

$$a = 3\sqrt{5} \text{ jedinicnih duzina}$$

Dakle duljina jedne od stranica pravokutnika, a, jest $3\sqrt{5}$ jedinicnih duzina. Perostaje jos odrediti duljinu druge stranice. To cu napraviti tako da odredim udaljenost tocke A od drugog pravca, durgim rijecima od pravca $2x-y+3=0$. Racunam:

$$\left.\begin{array}{l}\overbrace{2}^{A}x\overbrace{-1}^{B}y+\overbrace{3}^{C}=0\\ A(\overbrace{8}^{x_A},\overbrace{5}^{y_B})\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad b=d\left(T,p\right)=\frac{|Ax_A+By_A+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$b=\frac{|2\cdot 8-1\cdot 5+3|}{\sqrt{2^2+\left(-1\right)^2}}$$

$$b=\frac{|16-5+3|}{\sqrt{4+1}}$$

$$b=\frac{|14|}{\sqrt{5}}$$

$$b=\frac{14}{\sqrt{5}}$$

Racinaliziram dobiveni razlomak mnozeci brojnik i nazivnik s $\sqrt{5}$, slijedi:

$$b=\frac{14}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$b=\frac{14\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2}$$

$$b=\frac{14\sqrt{5}}{5}$$

$$b=\frac{14\sqrt{5}}{5}\text{ jedinicnih duzina}$$

Dakle duljina druge stranice pravokutnika, b, jest $\frac{14\sqrt{5}}{5}$ jedinicnih duzina. Preostaje samo odrediti povrsinu pravokutnika, racunam:

$$P=\overbrace{a}^{3\sqrt{5}}\cdot\underbrace{b}_{\frac{14\sqrt{5}}{5}}$$

$$P=\frac{3\sqrt{5}}{1}\cdot\frac{15\sqrt{5}}{5}$$

$$P=\frac{3\sqrt{5}\cdot 14\sqrt{5}}{5}$$

$$P=\frac{42\left(\sqrt{5}\right)^2}{5}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade:

$$P = \frac{42 \cdot^{1} \cancel{5}}{\cancel{5}_{1}}$$

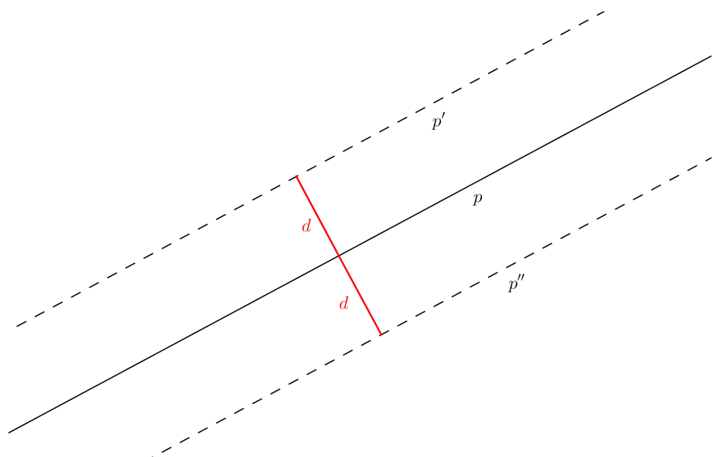
$$P = 42 \text{ kv. jedinica}$$

Dakle povrsina pravokutnika danog uvjetima zadatka jest 42 kv. jedinice i time je zadatak rijesen.

⋆

Zadatak 11: (str. 68) Napisi jednadzbu pravca paralelonog s pravcem $3x + 4y - 11 = 0$ i od njega je udaljen za $d = 5$ jedinicnih duljina.

Rjesenje: Prije samog racuna probajmo sa skice zakljuciti sto zapravo trebamo racunati:



Prisjetimo se da za dva paralelna pravca vrijdi da su im koeficijenti smjera jendaki ili ako su implicitnom obliku $Ax + By + C = 0$ tada mora vrijediti $A_1 \cdot B_2 = A_2 \cdot B_1$. To ubiti znaci da ce trazeni pravac imati imati koeficijente A i B jednake kao i pravac dan u tekstu zadatka, a od njega ce se razlikovat samo po koeficijentu C. Postavlja se pitanje kako odrediti koeficijent C.

Napomena: Neka su dana dva paralelna pravca p_1 ... $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i p_2 ... $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ za koje vrijedi $A_1 = A_2$ i $B_1 = B_2$ (razmislimo li malo to se uvijek moze postici za paralelne pravce). Tada se udaljenost medju njima racuna perma sljedecem izrazu:

$$d\left(p_1, p_2\right) = \frac{\left|C_2 - C_1\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}$$

Dakle primjenimo li izraz iz napomene mozemo odrediti koeficijent C_2 i tako doorediti jednadzbe pravaca koji su paralelni pravcu danom u tekstu zadatka. Racunam:

$$\left.\begin{array}{l}\overbrace{3}^{A_1}x+\overbrace{4}^{B_1}y\overbrace{-11}^{C_1}=0\\ d\left(p_1,p_2\right)=5\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad d\left(p_1,p_2\right)=\frac{|C_2-C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}$$

$$\overbrace{d\left(p_1,p_2\right)}^{5}=\frac{|C_2-\overbrace{C_1}^{-11}|}{\sqrt{\underbrace{A_1}_{3}{}^2+\underbrace{B_1}_{4}{}^2}}$$

$$5=\frac{|C_2-(-11)|}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

$$5=\frac{|C_2+11|}{\sqrt{9+16}}$$

$$5=\frac{|C_2+11|}{\sqrt{25}}$$

$$5=\frac{|C_2+11|}{5}$$

Pomnozimo dobiveni izraz s 5, slijedi:

$$5=\frac{|C_2+11|}{5}\ /\cdot 5$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$5\cdot 5=\frac{|C_2+11|}{{}_1\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{5}^1}{1}$$

$$25=|C_2+11|$$

Da bi rijesili dobivenu jednadzbu s apsolutnim vrijednostima, rastavimo je na dva slucaja:

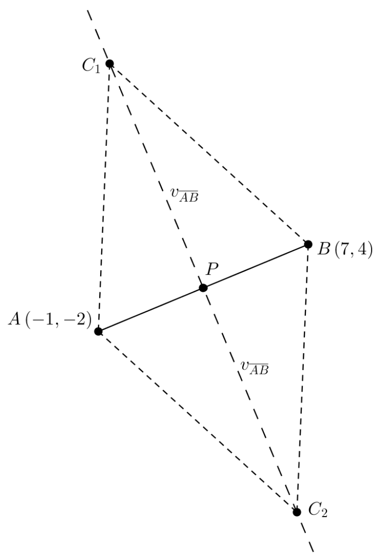
$$\begin{array}{ccc}\text{Slucaj 1} & & \text{Slucaj 2}\\ 25=C_2+11 & \text{ili} & 25=-\left(C_2+11\right)\\ 25-11=C_2 & \text{ili} & 25=-C_2-11\\ 25-11=C_2 & \text{ili} & 25=-C_2-11\\ C_2=14 & \text{ili} & C_2=-25-11\\ & & C_2=-36\end{array}$$

Preostaje samo jos napisati jednadzbe trazenih pravaca, kao sto smo vec primjetili jedina razlika izmedju trazenih pravaca i u teksu zadanog pravca biti ce u slobodnom keoficijentu C. Dakle jednadzbe trazenih pravaca su $3x+4y+14=0$ i $3x+4y-36=0$ i time je zadatak rijesen.

⋆

Zadatak 14: (str. 68) Trokut ΔABC je jednakokracan, njegova je osnovica duzina $\overline{AB}$. $A(-1,-2)$, $B(7,4)$. Duljina visine na osnovicu trokuta jednaka je 5 jednicnih duljina. Odredi koordinate vrha C.

Rjesenje: Prije samog racuna probajmo sa skice zakljuciti sto zapravo trebamo racunati:



Prisjetimo se da visina na osnovicu $v_{\overline{AB}}$ u jednakokracnom trokutu dijeli osnovicu $\overline{AB}$ na pola sto u sustini znaci da mozemo odrediti pravac na kojem lezi visina na osnovicu $v_{\overline{AB}}$. No to znaci da tada znamo pravac na kojem leze vrhovi C_1 i C_2 trokuta ΔANC. Kako bi to odredili moramo svakako odrediti koordinate tocke P. To cemo uciniti prema izrazu za odredjivanje polovista duzine $\overline{T_1T_2}$ kojoj su poznate koordinate krajnjih tocka $T_1(x_1,y_1)$ i $T_2(x_2,y_2)$ oblika $P(x_P,y_P)=P\left(\dfrac{x_{T_1}+x_{T_2}}{2},\dfrac{y_{T_1}+y_{T_2}}{2}\right)$, racunam:

$$\left.\begin{array}{l} A(\overbrace{-1}^{x_A},\overbrace{-2}^{y_A}) \\ A(\overbrace{\ 7\ }^{x_B},\overbrace{\ 4\ }^{y_B}) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad (P(x_P,y_P)=P\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

$$x_P=\frac{\overbrace{x_A}^{-1}+\overbrace{x_B}^{7}}{2} \quad \text{i} \quad y_P=\frac{\overbrace{y_A}^{-2}+\overbrace{y_B}^{4}}{2}$$

$$x_P = \frac{-1+7}{2} \quad \text{i} \quad y_P = \frac{-2+4}{2}$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$x_P = \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{2}_{1}} \quad \text{i} \quad y_P = \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{2}_{1}}$$

$$x_P = 3 \quad \text{i} \quad y_P = 1$$

Dakle koordinate tocke P su $P\,(3,1)$. Nadalje kako bi odredili pravac na kojem lezi visina $v_{\overline{AB}}$ trebamo odrediti koeficijent smjera tog pravca. No taj pravac je okomit na pravac na kojem lezi stranica $\overline{AB}$, no to znaci da za njihove koeficijente mora vrijediti identitet $k_{v_{\overline{AB}}} = -\dfrac{1}{k_{\overline{AB}}}$. Sto znaci da trebam odrediti koeficijent pravca na kojem lezi stranica $\overline{AB}$ trokuta ΔABC. Prisjetimo se da ako su dane dvie tocke pravca $T_1\,(x_1, y_1)$ i $T_2\,(x_2, y_2)$ tada se njegov koeficijent racuna prema izrazu $k_{(T_1T_2)} = \dfrac{y_{T_2} - y_{T_1}}{x_{T_2} - x_{T_1}}$. Racunam:

$$\left.\begin{array}{l} A(\overbrace{-1}^{x_A}, \overbrace{-2}^{y_A}) \\ A(\overbrace{\;7\;}^{x_B}, \overbrace{\;4\;}^{y_B}) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad k_{\overline{AB}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$k_{\overline{AB}} = \frac{\overbrace{y_B}^{4} - \overbrace{y_A}^{-2}}{\underbrace{x_B}_{7} - \underbrace{x_A}_{-1}}$$

$$k_{\overline{AB}} = \frac{4-(-2)}{7-(-1)}$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$k_{\overline{AB}} = \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{8}_{4}}$$

$$k_{\overline{AB}} = \frac{3}{4}$$

Nadalje preko izraza $k_{v_{\overline{AB}}} = -\dfrac{1}{k_{\overline{AB}}}$ dolazim do koeficijenta smjera pravca $k_{v_{\overline{AB}}}$.
Racunam:

$$k_{v_{\overline{AB}}} = -\frac{1}{\underbrace{k_{\overline{AB}}}_{\frac{3}{4}}}$$

Rijesim dobiveni dvojni razlomak prema poznatom pravilu vanjski s vanjskim, unutarnji s unutarnjim:

$$k_{v_{\overline{AB}}} = -\left(\frac{\frac{1}{1}}{\frac{3}{4}}\right)$$

$$k_{v_{\overline{AB}}} = -\frac{1 \cdot 4}{1 \cdot 3}$$

$$k_{v_{\overline{AB}}} = -\frac{4}{3}$$

Sada kada smo odredili koordinate tocke P kroz koju prolazi pravac na kojem lezi visina $v_{\overline{AB}}$ i njegov keoficijent smjera $k_{v_{\overline{AB}}}$, odredjujemo njegovu jednadzbu. Prisjetimo se da ako je dana tocka $T\left(x_T, y_T\right)$ kojom pravac prolazi i njegov koeficijent smjera k njegovu jednadzbu racunamo preko izraza $y - y_T = k\left(x - x_T\right)$.
Racunam:

$$\left.\begin{array}{l} P(\overbrace{3}^{x_P}, \overbrace{1}^{y_P}) \\ k_{v_{\overline{AB}}} = -\frac{4}{3} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad y - y_P = k_{v_{\overline{AB}}}\left(x - x_P\right)$$

$$y - \overbrace{y_P}^{1} = \overbrace{k_{v_{\overline{AB}}}}^{-\frac{4}{3}}(x - \overbrace{x_P}^{3})$$

$$y - 1 = -\frac{4}{3}\left(x - 3\right)$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$y - 1 = -\frac{4}{3}x - \frac{4}{\cancel{3}_1} \cdot \left(-\cancel{3}^1\right)$$

$$y - 1 = -\frac{4}{3}x + 4$$

$$y = -\frac{4}{3}x + 4 + 1$$

$$v_{\overline{AB}} \ldots y = -\frac{4}{3} + 5$$

Ostavit cemo jednadzbu u eksplicitnom obliku jer kako znamo da vrhovi C_1, odnosno C_2 moraju biti na pravcu koji sadrzi visinu $v_{\overline{AB}}$ znamo da u njihove koordinate oblika $C\left(x, -\frac{4}{3}x + 5\right)$.
Iz teksta zadatka slijedi da udaljenost vrhova C_1 i C_2 od pravca koji sadrzi osnovicu $\overline{AB}$ trokuta ΔABC mora iznostiti 5 jedinicnih duljina. Prisjetimo se da udaljenost tocke $T\left(x_1, y_1\right)$ od pravaca $p \ldots Ax + By + C = 0$ racuna prema izrazu $d\left(T, p\right) = \frac{\left|Ax_1 + By_1 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. No u tu svrhu trebamo jos odrediti jednadzbu pravaca koji sadrzi osnovicu $\overline{AB}$ trokuta ΔABC. No znamo njegov

koeficijent smjera jer smo ga ranije morali odrediti, on iznosi $k_{\overline{AB}} = \frac{3}{4}$, a znamo i da taj pravac mora prolaziti tockom A. Prisjetimo se da ako je dana tocka $T\left(x_T, y_T\right)$ kojom pravac prolazi i njegov koeficijent smjera k njegovu jednadzbu racunamo preko izraza $y - y_T = k\left(x - x_T\right)$. Racunam:

$$\left.\begin{array}{l} A(\overbrace{-1}^{x_A}, \overbrace{-2}^{y_A}) \\ k_{\overline{AB}} = \frac{3}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y - y_A = k_{\overline{AB}}\left(x - x_A\right)$$

$$\begin{aligned} y - \overbrace{y_A}^{-2} &= \overbrace{k_{\overline{AB}}}^{\frac{3}{4}}(x - \overbrace{x_A}^{-1}) \\ y - (-2) &= \frac{3}{4}\left(x - (-1)\right) \\ y + 2 &= \frac{3}{4}\left(x + 1\right) \end{aligned}$$

Pomnozim cijelu jednadzbu s 4 jer mi u konacnici treba implicitan oblik jednadzbe doticnog pravca, slijedi:

$$y + 2 = \frac{3}{4}\left(x + 1\right) \ / \cdot 4$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$\begin{aligned} y \cdot 4 + 2 \cdot 4 &= \frac{3}{{}_1\cancel{4}}\left(x + 1\right) \cdot \frac{\cancel{4}^1}{1} \\ 4y + 8 &= 3\left(x + 1\right) \\ 4y + 8 &= 3x + 3 \\ (AB)\ \ldots\ 3x - 4y - 5 &= 0 \end{aligned}$$

Preostaje jos samo uvrstiti koordinate tocake $C\left(x, -\frac{4}{3} + 5\right)$ i jednadzbu pravca (AB) u izraz za racunanje udaljenosti tocke od pravaca $d\left(T, p\right) = \frac{\left|Ax_1 + By_1 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} C(\overbrace{x}^{x_C}, \overbrace{-\frac{4}{3}x + 5}^{y_C}) \\ (AB)\ \ldots\ \overbrace{3}^{A}\ x\ \overbrace{-4}^{B}\ y\ \overbrace{-5}^{C} = 0 \\ d\left(C, (AB)\right) = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad d\left(C, (AB)\right) = \frac{\left|Ax_C + By_C + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\overbrace{d\left(C, (AB)\right)}^{5} = \frac{\left|3 \cdot x - 4\left(-\frac{4}{3}x + 5\right) - 5\right|}{\sqrt{3^2 + \left(-4\right)^2}}$$

$$5 = \frac{\left|3x + \dfrac{16}{3}x - 20 - 5\right|}{\sqrt{9+16}}$$

Zapisem 3 kao $\dfrac{9}{3}$, slijedi:

$$5 = \frac{\left|\dfrac{9}{3}x + \dfrac{16}{3}x - 25\right|}{\sqrt{25}}$$

$$5 = \frac{\left|\dfrac{25}{3}x - 25\right|}{5}$$

Izlucim 5 u zagradi brojnika na desnoj strani, slijedi:

$$5 = \frac{\left|5\left(\dfrac{5}{3}x - 5\right)\right|}{5}$$

$$5 = \frac{|5|\left|\dfrac{5}{3}x - 5\right|}{5}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade:

$$5 = \frac{{}^{1}\cancel{5}\left|\dfrac{5}{3}x - 5\right|}{\cancel{5}_{1}}$$

$$5 = \left|\frac{5}{3}x - 5\right|$$

Da bi rijesili dobivenu jednadzbu s apsolutnim vrijednostima, rastavimo je na dva slucaja:

$$\begin{array}{ccc} \text{Slucaj 1} & & \text{Slucaj 2} \\ 5 = \dfrac{5}{3}x - 5 & \text{ili} & 5 = -\left(\dfrac{5}{3}x - 5\right) \\ & & 5 = -\dfrac{5}{3}x + 5 \end{array}$$

Pomnozimo obje jednadzbe s 3, slijedi:

$$5 = \frac{5}{3}x - 5 \;/\cdot 3 \qquad \text{ili} \qquad 5 = -\frac{5}{3}x + 5 \;/\cdot 3$$

Pokratim sto se pokratiti dade, slijedi:

$$5 \cdot 3 = \frac{5}{{}_{1}\cancel{3}}x \cdot \frac{\cancel{3}^{1}}{1} - 5 \cdot 3 \qquad \text{ili} \qquad 5 \cdot 3 = -\frac{5}{{}_{1}\cancel{3}}x \cdot \frac{\cancel{3}^{1}}{1} + 5 \cdot 3$$

$$15 = 5x - 15 \quad \text{ili} \quad 15 = -5x + 15$$
$$5x = 15 + 15 \quad \text{ili} \quad 5x = 15 - 15$$
$$5x = 30 \quad \text{ili} \quad 5x = 0$$

Pomnozim obje jednadzbe s $\frac{1}{5}$, slijedi:

$$5x = 30 \ / \cdot \frac{1}{5} \quad \text{ili} \quad 5x = 0 \ / \cdot \frac{1}{5}$$

Pokratim sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{5}x}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{5}_1} = \frac{{}^{6}\cancel{30}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{5}_1} \quad \text{ili} \quad \frac{{}^{1}\cancel{5}x}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{5}_1} = 0 \cdot \frac{1}{5}$$
$$x_1 = 6 \quad \text{ili} \quad x_2 = 0$$

Preostaje samo jos odrediti y koordinate vrhova C_1 i C_2, prisjetimo se da za njih mora vrijediti $y = -\frac{4}{3}x + 5$. Racunam:

$$y_1 = -\frac{4}{3} \overbrace{x_1}^{6} + 5 \quad \text{ili} \quad y_2 = -\frac{4}{3} \overbrace{x_2}^{0} + 5$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

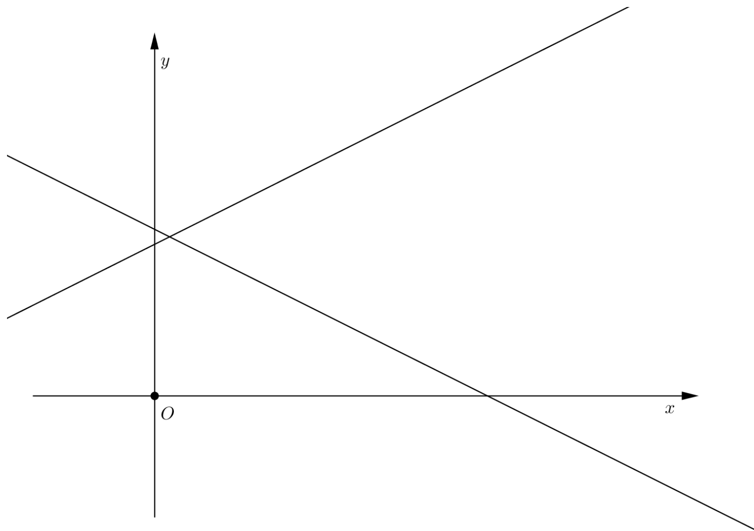
$$y_1 = -\frac{4}{{}_{1}\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{6}^{2}}{1} + 5 \quad \text{ili} \quad y_2 = -\frac{4}{3} \cdot 0 + 5$$
$$y_1 = -4 \cdot 2 + 5 \quad \text{ili} \quad y_2 = 5$$
$$y_1 = -8 + 5$$
$$y_1 = -3$$

Dakle time smo dobili koordinate dviju tocka $C_1\,(6, -3)$ i $C_2\,(0, 5)$ koje zadovoljavaju uvjete zadatka cime je problem rijesen.

⋆

Zadatak 16: (str. 68) Odredi simetralu tupog kuta sto ga odredjuju pravci $2x + 4y - 11 = 0$ i $x - 2y + 5 = 0$.

Rjesenje: Prije samog racuna probajmo sa skice zakljuciti sto zapravo trebamo racunati (skice su u ovim zadacima dosta bitne da se zna lakse odrediti trazena jednadzba simetrale):



Prisjetimo se da ako su dane jednadzbe pravaca u implicintom obliku p_1 ... $A_1x + B_1 + C_1 = 0$ i p_2 ... $A_2x + B_2 + C_2 = 0$ tada simetrale kutova koje zatvaraju pravci p_1 i p_2 odredjuju prema izrazu $\dfrac{|A_1x + B_1 + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \dfrac{|A_2x + B_2 + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$.

Racunam:

$$\left.\begin{array}{l} p_1 \ldots \overbrace{2}^{A_1} x + \overbrace{4}^{B_1} y \overbrace{-11}^{C_1} = 0 \\ p_2 \ldots \overbrace{1}^{A_2} x \overbrace{-2}^{B_2} y + \overbrace{5}^{C_2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{|A_1x + B_1 + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2 + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

$$\frac{|2x + 4y - 11|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{|x - 2y + 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}}$$

$$\frac{|2x + 4y - 11|}{\sqrt{4 + 16}} = \frac{|x - 2y + 5|}{\sqrt{1 + 4}}$$

$$\frac{|2x + 4y - 11|}{\sqrt{20}} = \frac{|x - 2y + 5|}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{|2x + 4y - 11|}{2\sqrt{5}} = \frac{|x - 2y + 5|}{\sqrt{5}}$$

Pomnozim cijelu jednadzbu s $2\sqrt{5}$, slijedi:

$$\frac{|2x + 4y - 11|}{2\sqrt{5}} = \frac{|x - 2y + 5|}{\sqrt{5}} \ / \cdot 2\sqrt{5}$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

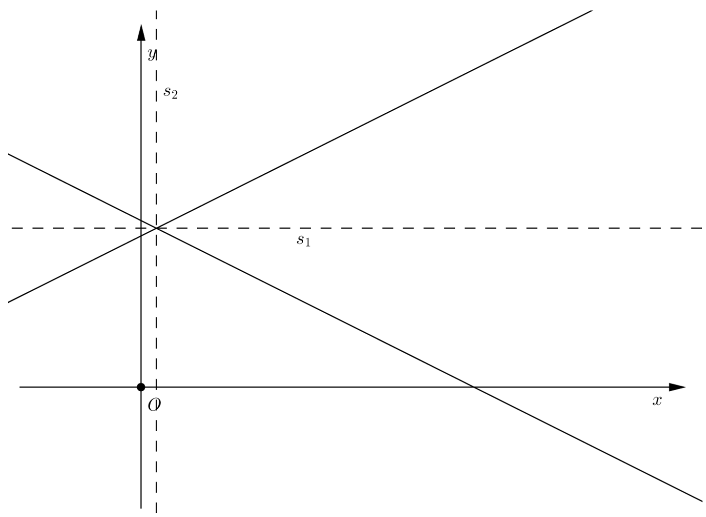
$$\frac{|2x + 4y - 11|}{{}_1\cancel{2\sqrt{5}}} \cdot \frac{\cancel{2\sqrt{5}}^1}{1} = \frac{|x - 2y + 5|}{{}_1\cancel{\sqrt{5}}} \cdot \frac{\cancel{2\sqrt{5}}^2}{1}$$

$$|2x+4y-11| = 2\,|x-2y+5|$$

Da bi rijesili dobivenu jednadzbu s apsolutnim vrijednostima, rastavimo je na dva slucaja:

$$\begin{array}{ccc} \text{Slucaj 1} & & \text{Slucaj 2} \\ 2x+4y-11 = 2\,(x-2y+5) & \text{ili} & 2x+4y-11 = -2\,(x-2y+5) \\ \cancel{2x}+4y-11 = \cancel{2x}-4y+10 & \text{ili} & 2x+\cancel{4y}-11 = -2x+\cancel{4y}-10 \\ 4y+4y-11-10 = 0 & \text{ili} & 2x+2x-11+10 \\ s_1 \text{ ... } 8y-21=0 & \text{ili} & s_2 \text{ ... } 4x-1=0 \end{array}$$

Pogledajmo opet sliku:



Ono sto mozemo zakljuciti jest da trazimo jednadzbu pravca oblika $x = a$, sto nas navodi na zakljkucak da je trazena jednadzba simetrale upravo $4x-1=0$. Time je zadatak rijesen.

⋆

<u>Zadatak 22</u>: (str. 68) Na pravcu $y = x - 3$ odredi tocku jednako odaljenu od pravaca $y = 7x - 11$ i $y = -x + 5$.

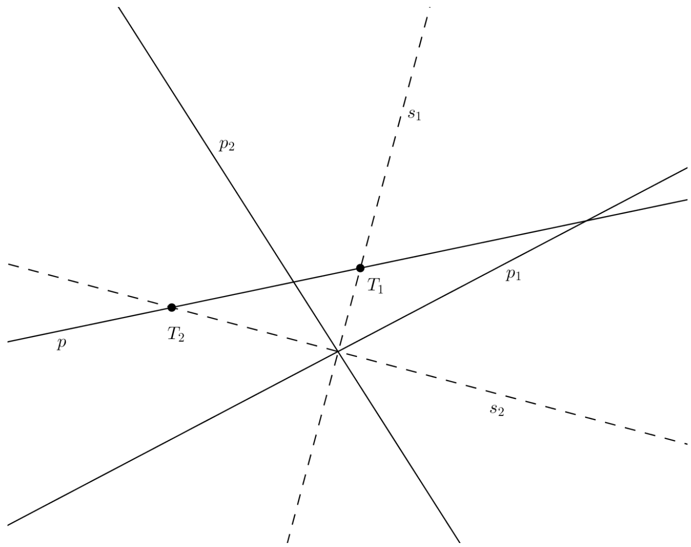
<u>Rjesenje</u>: Oznacimo dane pravce:

$$p \text{ ... } y = x-3$$

$$p_1 \text{ ... } y = 7x-11$$

$$p_2 \text{ ... } y = -x+5$$

Prije samog racuna probajmo sa skice zakljuciti sto zapravo trebamo racunati:



Dakle ideja je sljedeca, odredit cemo simetrale kutocva sto ga odredjuju pravci p_1 i p_2 i tada potraziti sjcista pravca p s simetralama. Prisjetimo se da ako su dane jednadzbe pravaca u implicintom obliku p_1 ... $A_1x + B_1 + C_1 = 0$ i p_2 ... $A_2x + B_2 + C_2 = 0$ tada simetrale kutova koje zatvaraju pravci p_1 i p_2 odredjuju prema izrazu $\frac{|A_1x+B_1+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} = \frac{|A_2x+B_2+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$. U tu svrhu moram prvo pretvoriti jednadzbe pravaca p_1 i p_2 iz eksplicitnog u implicitni oblik: Racunam:

$$p_1 \ldots y = 7x - 11 \quad \Rightarrow \quad 7x - y - 11 = 0$$

$$p_2 \ldots y = -x + 5 \quad \Rightarrow \quad x + y - 5 = 0$$

Odredimo nadalje simetrale kutova koje zatvaraju pravci p_1 i p_2, racunam:

$$\left.\begin{array}{l} p_1 \ldots \overbrace{7}^{A_1} x \overbrace{-1}^{B_1} y \overbrace{-11}^{C_1} = 0 \\ p_2 \ldots \overbrace{1}^{A_2} x + \overbrace{1}^{B_2} y \overbrace{-5}^{C_2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{|A_1x+B_1+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} = \frac{|A_2x+B_2+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

$$\frac{|7x-y-11|}{\sqrt{7^2+(-1)^2}} = \frac{|x+y-5|}{\sqrt{1^2+1^2}}$$

$$\frac{|7x-y-11|}{\sqrt{49+1}} = \frac{|x+y-5|}{\sqrt{1+1}}$$

$$\frac{|7x-y-11|}{\sqrt{50}} = \frac{|x+y-5|}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{|7x-y-11|}{5\sqrt{2}} = \frac{|x+y-5|}{\sqrt{2}}$$

Pomnozim cijelu jednadzbu s $5\sqrt{2}$, slijedi:

$$\frac{|7x-y-11|}{5\sqrt{2}} = \frac{|x+y-5|}{\sqrt{2}} \ / \cdot 5\sqrt{2}$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$\frac{|7x-y-11|}{{}_1\cancel{5\sqrt{2}}} \cdot \frac{\cancel{5\sqrt{2}}^1}{1} = \frac{|x-2y+5|}{{}_1\cancel{\sqrt{2}}} \cdot \frac{\cancel{5\sqrt{2}}^5}{1}$$

$$|7x-y-11| = 5\,|x-2y+5|$$

Da bi rijesili dobivenu jednadzbu s apsolutnim vrijednostima, rastavimo je na dva slucaja:

$$\begin{array}{ccc}
\text{Slucaj 1} & & \text{Slucaj 2} \\
7x-y-11 = 5\,(x+y-5) & \text{ili} & 7x-y-11 = -5\,(x+y-5) \\
7x-y-11 = 5x+5y-25 & \text{ili} & 7x-y-11 = -5x-5y+25 \\
7x-5x-y-5y-11+25 = 0 & \text{ili} & 7x+5x-y+5y-11-25 = 0 \\
2x-6y+14 = 0 & \text{ili} & 12x+4y-36 = 0
\end{array}$$

Pomnozimo lijevu jednadzbu s $\frac{1}{2}$, dok desnu pomnozimo s $\frac{1}{4}$, slijedi:

$$2x-6y+14 = 0 \ / \cdot \frac{1}{2} \qquad \text{ili} \qquad 12x+4y-36 = 0 \ / \cdot \frac{1}{4}$$

$$\frac{{}^1\cancel{2}x}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{2}_1} - \frac{{}^3\cancel{6}y}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{2}_1} + \frac{{}^7\cancel{14}}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{2}_1} = 0 \qquad \text{ili} \qquad \frac{{}^3\cancel{12}x}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{2}_1} + \frac{{}^1\cancel{4}y}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{2}_1} - \frac{{}^9\cancel{36}}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{4}_1} = 0$$

$$s_1 \ldots x-3y+7 = 0 \qquad \text{ili} \qquad s_2 \ldots 3x+y-9 = 0$$

Dakle simetrale kutova koji su odredjeni pravcima p_1 i p_2 su $s_1 \ldots x-3y+7=0$ i $s_2 \ldots 3x+y-9=0$. Preostaje jos samo odrediti sjecista simetrala s_1 i s_2 s prvacem p. Pronadjimo dakle prvo sjeciste pravaca s_1 i p. Prije svega prebacim jednadzbu pravca p iz eksplicitnog u implicitni oblik:

$$p \ldots y = x-3 \quad \Rightarrow \quad x-y-3 = 0$$

Nastavljam racun, slijedi:

$$\begin{cases} x-3y+7=0 \\ x-y-3=0 \end{cases}$$

Pomnozim drugu jednadzbu s -3:

$$\begin{cases} x-3y+7=0 \\ x-y-3=0 \ / \cdot (-3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-3y+7=0 \\ x\cdot(-3)-y\cdot(-3)-3\cdot(-3)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y + 7 = 0 \\ -3x + 3y + 9 = 0 \end{cases}$$

Zbrojimo dobivene jednadzbe, slijedi:

$$-2x + 16 = 0$$

$$2x = 16$$

Pomnozimo cijelu jednadzbu s $\frac{1}{2}$, slijedi:

$$2x = 16 \ / \cdot \frac{1}{2}$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$\frac{{}^{1}\cancel{2}x}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1} = \frac{{}^{8}\cancel{16}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1}$$

$$x = 8$$

Uvrstimo dobivenu koordinatu u drugu jednadzbu kako bi dobili vrijednost koordinate y, racunam:

$$\overbrace{x}^{8} + y + 3 = 0$$

$$8 - y - 3 = 0$$

$$-y + 5 = 0$$

$$y = 5$$

Dakle jedno trazeno rjesenje jest tocka T_1 s koordinatama $T_1\,(8, 5)$. Preostaje jos odrediti koordinate druge tocke, sto cemo uciniti rijesivsi sustav jednadzbi koje predstavljaju pravce s_2 i p, racunam:

$$\begin{cases} 3x + y - 9 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

Zbrojimo dobivene jednadzbe, slijedi:

$$2x - 6 = 0$$

$$2x = 6$$

Pomnozimo cijelu jednadzbu s $\frac{1}{4}$, slijedi:

$$2x = 6 \ / \cdot \frac{1}{2}$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$\frac{{}^{1}\cancel{2}x}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1} = \frac{{}^{3}\cancel{6}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1}$$

$$x = 3$$

Uvrstimo dobivenu koordinatu u drugu jednadzbu kako bi dobili vrijednost koordinate y, racunam:

$$\overbrace{x}^{3} + y + 3 = 0$$

$$3 - y - 3 = 0$$

$$y = 0$$

Dakle dobili smo dvije jedndazbe koje zadovoljavaju uvjete zadataka i to su $T_1\,(8,5)$ i $T_2\,(3,0)$. Time je zadatak rijesen.

⋆