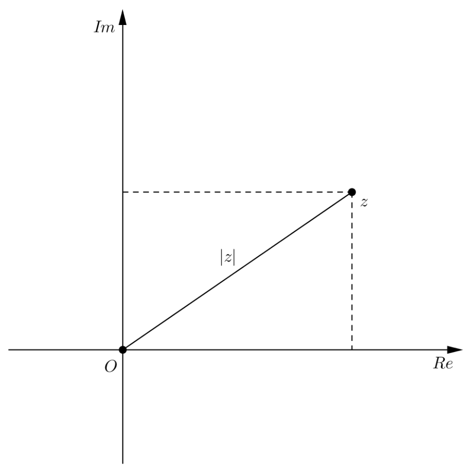
1.6 Trigonometrijski prikaz kompleksnih brojeva (staro izdanje knjige)

Zadatak 4: (str. 67) Odredi skup svih tocaka z u kompleksnoj ravnini koje se mogu prikazati u obliku $z = \cos t + i \sin t$.

Rjesenje: Prisjetimo se da za kompleksan broj z vrijedi:

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2$$

Pri cemu je $\overline{z}$ kompleksan broj koji je dobiven kompleksnim konjugiranjem broja z, dok je $|z|$ modul kompleksnog broja cija je geometrijska interpretacija zapravo udaljenost tocke pridruzene kompleksnom broju z do ishodista.



Ideja jest pomnoziti izraz dan u tekstu zadatka s $\overline{z}$. No prije nego to ucinimo pogledajmo cemu je zapravo jednako $\overline{z}$. Prisjetimo se da je kompleksno konjugiranje zapravo operacija koja mijenja predznak imaginarnog dijela kompleksnog broja. Imajuci to na umu vrijedi:

$$\overline{z} = \overline{\cos t + i \sin t} = \cos t - i \sin t$$

Pomnozimo dakle jednakost iz teksta zadatka s $\overline{z}$, slijedi:

$$z = \cos t + i \sin t \;/ \cdot \overline{z}$$

$$z \cdot \overline{z} = (\cos t + i \sin t) \cdot \overline{z}$$

Lijeva je strana jednakosti prema pocetnom razmatarnju sada jednaka $|z|^2$, dok na desnoj strani izraz $\overline{z}$ zamijenim s $\cos t - i \sin t$, slijedi:

$$|z|^2 = (\cos t + i \sin t)\,(\cos t - i \sin t)$$

Izraz na desnoj strani jednakosti prepoznam kao razliku kvadrata te ga sredjujem prema izrazu $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, slijedi:

$$|z|^2 = (\cos t)^2 - (i \sin t)^2$$

Drugi clan sume na desnoj strani jednakosti raspisem prema izrazu za mnozenje potencija istih eksponenata, odnosno prema $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, slijedi:

$$|z|^2 = \cos^2 t - i^2 (\sin t)^2$$

Nadalje prisjetim se da je kvadrat imaginane jedinice i jednak -1, odnosno da vrijedi $i^2 = -1$, slijedi:

$$|z|^2 = \cos^2 t - \underbrace{i^2}_{-1} \sin^2 t$$

$$|z|^2 = \cos^2 t - (-1) \cdot \sin^2 t$$

$$|z|^2 = \cos^2 t + \sin^2 t$$

Prisjetim se nadalje da opcenito vrijedi temeljni trigonometrijski identitet, odnosno $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, slijedi:

$$|z|^2 = \underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{1}$$

$$|z|^2 = 1$$

Korjenujem dobiveni izraz, slijedi:

$$|z|^2 = 1 \ /\sqrt{\ }$$

$$\pm |z| = \sqrt{1}$$

Izostavit cemo mogucnost da je rezultat negativan jer smo rekli da je $|z|$ zapravo udaljenost u geometrijskom smislu.

$$|z| = 1$$

Dakle kako smo rekli da $|z|$ predstavlja udaljenost tocke pridruzene broju z od ishodista, ovdje zapravo govorimo o brojevima cije su pridruzene tocke udaljene za 1 od ishodista. Drugim rijecima govorim o kruznici cije je srediste u ishodistu koordinatnog sustava radijusa 1. Time je zadatak rijesen.

☙ ✧ ❧

Zadatak 5: (str. 67) Neka je $w = \dfrac{z-1}{z+1}$, $z \neq \pm 1$. Dokazi da je $\mathrm{Re}\, w = 0$ ako i samo ako je $|z| = 1$.

Rjesenje: Opcenito kompleksan broj je oblika $z = x + yi$ pri cemu su x i y

realni brojevi. Odredimo cemu je jednak w. Da bismo to napravili u izraz za w uvrstavamo $x + yi$ umjesto z, slijedi:

$$w = \frac{\overbrace{z}^{x+yi} - 1}{\underbrace{z}_{x+yi} + 1} = \frac{x + yi - 1}{x + yi + 1} = (\star)$$

Poredajmo malo poredak sumanada u brojniku i nazivniku, slijedi:

$$(\star) = \frac{x - 1 + yi}{x + 1 + yi} = (\star\star)$$

Da bismo podijelili kompleksne brojeve moramo i brojnik i nazivnik pomnoziti s kompleksnom konjugacijom nazivnika, slijedi:

$$(\star\star) = \frac{x - 1 + yi}{x + 1 + yi} \cdot \frac{\overline{x + 1 + yi}}{\overline{x + 1 + yi}} = (\spadesuit)$$

Prisjetimo se da kompleksno konjugiranje zapravo mijenja predznak imaginarnom dijelu kompleksnog broja. Imajuci to na umu slijedi:

$$(\spadesuit) = \frac{x - 1 + yi}{x + 1 + yi} \cdot \frac{\overbrace{\overline{x + 1 + yi}}^{x+1-yi}}{\underbrace{\overline{x + 1 + yi}}_{x+1-yi}} = \frac{x - 1 + yi}{x + 1 + yi} \cdot \frac{x + 1 - yi}{x + 1 - yi} =$$

$$= \frac{x - 1 + yi}{x + 1 + yi} \cdot \frac{x + 1 - yi}{x + 1 - yi} = \frac{(x - 1 + yi)(x + 1 - yi)}{[(x + 1) + yi][(x + 1) - yi]} = (\spadesuit\spadesuit)$$

Izraz u nazivniku prepoznajem kao razliku kvadrata te ga sredjujem prema izrazu $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, slijedi:

$$(\spadesuit\spadesuit) = \frac{(x - 1 + yi)(x + 1 - yi)}{(x + 1)^2 - (yi)^2} = (\clubsuit)$$

Prvo clan sume u nazvniku rapisem prema pravilu za kvadriranje binoma, odnonos prema $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. Dok drugi clan sume rapisujem prema izrazu za mnozenje potencija istih eksponenata, odnosno prema $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$, slijedi:

$$(\clubsuit) = \frac{(x - 1 + yi)(x + 1 - yi)}{x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - y^2 i^2} = (\clubsuit\clubsuit)$$

Prisjetimo se da je kvadrat imaginarne jedinice jednak -1, odnosno vrijedi $i^2 = -1$, slijedi:

$$(\clubsuit\clubsuit) = \frac{(x - 1 + yi)(x + 1 - yi)}{x^2 + 2x + 1 - y^2 \underbrace{i^2}_{-1}} = \frac{(x - 1 + yi)(x + 1 - yi)}{x^2 + 2x + 1 - y^2 \cdot (-1)} =$$

$$= \frac{(x-1+yi)\,(x+1-yi)}{x^2+2x+1+y^2} = (\diamondsuit)$$

Rijesavamo se zagrada u brojniku razlomka prema pravilu svaki sa svakim, slijedi:

$$(\diamondsuit) = \frac{x\cdot x + x\cdot 1 + x\cdot(-yi) - 1\cdot x - 1\cdot 1 - 1\cdot(-yi) + yi\cdot x + yi\cdot 1 + yi\cdot(-yi)}{x^2+2x+1+y^2} =$$

$$= \frac{x^2 + x - xyi - x - 1 + yi + xyi + yi - (yi)^2}{x^2+2x+1+y^2} = (\diamondsuit\diamondsuit)$$

Posljednji clan sume u brojniku razlomka rapisujem prema izrazu za mnozenje potencija istih eksponenata, odnosno prema $a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n$, slijedi:

$$(\diamondsuit\diamondsuit) = \frac{x^2 + x - xyi - x - 1 + yi + xyi + yi - y^2 i^2)^2}{x^2+2x+1+y^2} = (\triangle)$$

Prisjetimo se da je kvadrat imaginarne jedinice jednak -1, odnosno vrijedi $i^2 = -1$, slijedi:

$$(\triangle) = \frac{x^2 + x - xyi - x - 1 + yi + xyi + yi - y^2\ \overbrace{i^2}^{-1}\ )^2}{x^2+2x+1+y^2} =$$

$$= \frac{x^2 + x - xyi - x - 1 + yi + xyi + yi - y^2\cdot(-1)}{x^2+2x+1+y^2} =$$

$$= \frac{x^2 + x - xyi - x - 1 + yi + xyi + yi + y^2}{x^2+2x+1+y^2} = (\triangle\triangle)$$

Pokratimo suprotne izraze u brojniku razlomka te zbrojimo istovjetne, slijedi:

$$(\triangle\triangle) = \frac{x^2 + \cancel{x} \cancel{- xyi} \cancel{- x} - 1 + yi + \cancel{xyi} + yi + y^2}{x^2+2x+1+y^2} = \frac{x^2 - 1 + 2yi + y^2}{x^2+2x+1+y^2} = (\heartsuit)$$

Promijenimo poredak clanova sume u brojniku nazivnika tako da clanovi koji ne sadrze i budu prvi, dok oni koji sadrze i budu posljednji, slijedi:

$$(\heartsuit) = \frac{x^2 + \cancel{x} \cancel{- xyi} \cancel{- x} - 1 + yi + \cancel{xyi} + yi + y^2}{x^2+2x+1+y^2} = \frac{x^2 + y^2 - 1 + 2yi}{x^2+2x+1+y^2} = (\heartsuit\heartsuit)$$

Zapisimo dobiveni izraz malo drugacije, slijedi:

$$(\heartsuit\heartsuit) = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+2x+1+y^2} + \frac{2yi}{x^2+2x+1+y^2} =$$

$$= \frac{x^2+y^2-1}{x^2+2x+1+y^2} + \frac{2y}{x^2+2x+1+y^2}\cdot\frac{i}{1} =$$

$$= \frac{x^2+y^2-1}{x^2+2x+1+y^2} + \frac{2y}{x^2+2x+1+y^2}\ i$$

Dakle vrijedi:

$$w = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + 2x + 1 + y^2} + \frac{2y}{x^2 + 2x + 1 + y^2}\ i$$

Trebamo odrediti $\operatorname{Re} w$, dakle realni dio kompleksnog broja w no to je dio broja koji ne sadrzi i. Vrijedi:

$$\operatorname{Re} w = \operatorname{Re}\left(\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + 2x + 1 + y^2} + \frac{2y}{x^2 + 2x + 1 + y^2}\ i\right) =$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + 2x + 1 + y^2}$$

Preostaje jos samo pokazati da vrijedi $\operatorname{Re} w = 0$ ako i samo ako vrijedi $|z| = 1$. Krenimo tako da pogledamo cemu je jednak $\operatorname{Re} w = 0$, vrijedi:

$$\operatorname{Re} z = 0$$

$$\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + 2x + 1 + y^2} = 0$$

Nadalje prisjetimo se da je razlomak jednak 0 onda kad je njegov brojnik jednak 0 (nazivnik ne smije biti jednak nulu jer u tom slucaju raclomak nije dobro definiran), slijedi:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Prebacimo 1 na desnu stranu, slijedi:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Nadalje, prisjetim se da za kompleksan broj $z = x + yi$, njegov modul, odnosno $|z|$, racunamo prema izrazu $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Imajuci to na umu, korjenujem dobiveni izraz, slijedi:

$$x^2 + y^2 = 1 \ /\sqrt{\ }$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1$$

Izraz na desnoj strani perpoznajem kao modul kompleksnog broja oblika $z = x + yi$, dakle slijedi:

$$|z| = 1$$

Uzeli smo samo pozitivnu vrijednost za korijen na desnoj strani jer govorimo o modulu kompleksnog broja koji je uvijek pozitivan po definiciji. Time smo pokazali da ako vrijedi $\operatorname{Re} w = 0$ onda mora vrijediti $|z| = 1$.

Krenimo sada od jednakosti $|z| = 1$, imajuci na umu da za kompleksan broj

$z = x + yi$, njegov modul, odnosno $|z|$, racunamo prema izrazu $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Imajuci to na umu, slijedi:

$$\underbrace{|z|}_{\sqrt{x^2+y^2}} = 1$$

Kvadriramo cijelu jednakost, slijedi:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 \; / \; ^2$$

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = 1^2$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

Prebacimo 1 na lijevu stranu, slijedi:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\dfrac{1}{x^2 + 2x + 1 + y^2}$, slijedi:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \; / \cdot \frac{1}{x^2 + 2x + 1 + y^2}$$

$$\frac{x^2 + y^2 - 1}{1} \cdot \frac{1}{x^2 + 2x + 1 + y^2} = 0 \cdot \frac{1}{x^2 + 2x + 1 + y^2}$$

$$\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + 2x + 1 + y^2} = 0$$

Prepoznajemo izraz na desnoj stani kao $\operatorname{Re} z$ do kojeg smo prije dosli, slijedi:

$$\underbrace{\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + 2x + 1 + y^2}}_{\operatorname{Re} z} = 0$$

$$\operatorname{Re} z = 0$$

Time smo dobili i drugu tvrdnju da ako vrijedi $|z| = 1$ mora vrijediti $\operatorname{Re} w = 0$. Time smo pokazali sto smo trebali te je time zadatak rijesen.

☙ ✧ ❧

✾ Zadatak 7: (str. 67) Odredi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi $\overline{z} = z^3$.

Rjesenje: Krenut cemo tako da jednakost danu u zadatku pomnozimo s z, slijedi:

$$\overline{z} = z^3 \; / \cdot z$$

$$\overline{z} \cdot z = z^3 \cdot z$$

Desnu stranu jednakosti sredimo prema izrazu za mnozenje potencija istih baza, odnosno prema $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, slijedi:

$$\overline{z}z = z^3 \cdot z^1$$

$$\overline{z}z = z^{3+1}$$

$$\overline{z}z = z^4$$

Prisjetimo se da za svaki kompleksan broj z vrijedi $z \cdot \overline{z} = |z|^2$. Imajuci to na umu dalje slijedi:

$$\underbrace{\overline{z}z}_{|z|^2} = z^4$$

$$|z|^2 = z^4$$

Korjenujemo cijelu jednakost, slijedi:

$$|z|^2 = z^4 \;/\sqrt{}$$

$$\sqrt{|z|^2} = \sqrt{z^4}$$

$$\pm |z| = z^2$$

Nadalje, broj z je opcenito oblika $z = x + yi$, pri cemu su x i y realni brojevi. Imajuci to na umu zmijenimo broj z u jednakosti s $x + yi$, slijedi:

$$\pm |\underbrace{z}_{x+yi}| = \underbrace{z}_{x+yi}{}^2$$

$$\pm |x + yi| = (x + yi)^2$$

Ako je kompleksan broj oblika $z = x + yi$ tada njegovu apsolutnu vrijednost, odnosno modul, racunamo preko izraza $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Nadalje izraz na desnoj stani raspisujemo prema pravilu za kvadrat binoma, odnosno prema izrazu $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, slijedi:

$$\pm \underbrace{|x + yi|}_{\sqrt{x^2+y^2}} = x^2 + 2 \cdot x \cdot yi + (yi)^2$$

$$\pm \sqrt{x^2 + y^2} = x^2 + 2xyi + (yi)^2$$

Posljednji clan sume na desnoj strani raspisemo prema pravilu za mnozenje potencija istih baza, odnosno prema izrazu $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$, slijedi:

$$\pm \sqrt{x^2 + y^2} = x^2 + 2xyi + y^2 i^2$$

Nadalje prisjetim se da je kvadrat imaginarne jednice jednak -1, odnosno da vrijedi $i^2 = -1$, slijedi:

$$\pm \sqrt{x^2 + y^2} = x^2 + 2xyi + y^2 \underbrace{i^2}_{-1}$$

$$\pm\sqrt{x^2+y^2} = x^2 + 2xyi + y^2 \cdot (-1)$$
$$\pm\sqrt{x^2+y^2} = x^2 + 2xyi - y^2$$

Grupiram realne dijelove kompleksnog broja s desne stane jednakosti, slijedi:

$$\pm\sqrt{x^2+y^2} = x^2 - y^2 + 2xyi$$

Oznacimo kompleksan broj na lijevoj strani jednakosti s w_1, dok onaj na desnoj oznacimo s w_2, slijedi:

$$\underbrace{\pm\sqrt{x^2+y^2}}_{w_1} = \underbrace{x^2 - y^2 + 2xyi}_{w_2}$$

Vrijedi:

$$\operatorname{Re} w_1 = \pm\sqrt{x^2+y^2} \qquad \operatorname{Re} w_2 = x^2 - y^2$$
$$\operatorname{Im} w_1 = 0 \qquad \operatorname{Im} w_2 = 2xy$$

Nadalje prisjetimo se da su dva kompleksna broja w_1 i w_2 jednaka ako i samo ako vrijedi $\operatorname{Re} w_1 = \operatorname{Re} w_2$ te $\operatorname{Im} w_1 = \operatorname{Im} w_2$. Imajuci to na umu dobijamo sljedeci sustav jednadzbi:

$$\begin{cases} \pm\sqrt{x^2+y^2} = x^2 - y^2 \\ 0 = 2xy \end{cases}$$

Iz druge jednadzbe direktno zakljucujemo da postoje dva slucaja ili je $x = 0$ ili je $y = 0$ (umnozak dvaju brojeva daje 0 samo ako je bar jedan on njih jednak 0).

Slucaj prvi: Pozabavimo se prvo slucajem kad je $x = 0$, tada prva jednadzba poprima oblik:

$$\pm\sqrt{\underbrace{x}_{0}{}^2 + y^2} = \underbrace{x}_{0}{}^2 - y^2$$
$$\pm\sqrt{0^2+y^2} = 0^2 - y^2$$
$$\pm\sqrt{y^2} = -y^2$$
$$\pm(\pm y) = -y^2$$

Ako malo razmislimo produkt na lijevoj strani jednakosti svest ce se na $\pm y$, slijedi:

$$\pm y = -y^2$$

Prebacimo sve izraze s desne strane jednakosti na lijevu, slijedi:

$$y^2 \pm y = 0$$

Nadalje izlucimo y iz oba izraza lijeve strane jednakosti, slijedi:

$$y\,(y \pm 1) = 0$$

No to nas opet navodi na sljedeci zakljucak (umnozak dvaju brojeva daje 0 samo ako je bar jedan on njih jednak 0):

$$y = 0 \quad \text{ili} \quad y \pm 1 = 0$$

Iz prve jednadzbe citamo prvo rjesenje, to je uredjeni par $(x, y) = (0, 0)$, sto prevedeno u komplesne brojeve ciji je oblik $z = x + yi$ (kako smo ih oznacili u procesu rjesavanja) znaci da je jedno rjesenje kompleksan broj $z_1 = 0$.

Druga pak se jednadzba dijeli na dva slucaja, slijedi:

$$y - 1 = 0 \quad \text{ili} \quad y + 1 = 0$$

Prebacimo poznanice s lijeve na desnu stranu jednakosti, slijedi:

$$y = 1 \quad \text{ili} \quad y = -1$$

Na taj nacin dobili smo jos dva urednjena para kao rjesenja problema, a to su $(x, y) = (0, 1)$ i $(x, y) = (0, -1)$. Prevedeno u komplesne brojeve ciji je oblik $z = x + yi$ (kako smo ih oznacili u procesu rjesavanja) znaci da su jos dva rjesenja kompleksni brojevi $z_2 = i$ i $z_3 = -i$.

Slucaj drugi: Pozabavimo se nadalje slucajem kad je $y = 0$, tada prva jednadzba poprima oblik:

$$\pm\sqrt{x^2 + \underbrace{y}_{0}{}^2} = x^2 - \underbrace{y}_{0}{}^2$$

$$\pm\sqrt{x^2 + 0^2} = x^2 - 0^2$$
$$\pm\sqrt{x^2} = x^2$$
$$\pm(\pm x) = x^2$$

Ako malo razmislimo produkt na lijevoj strani jednakosti svest ce se na $\pm x$, slijedi:

$$\pm x = x^2$$

Prebacimo sve izraze s lijeve strane jednakosti na desnu, slijedi:

$$0 = x^2 \pm x$$

$$x^2 \pm x = 0$$

Nadalje izlucimo x iz oba izraza lijeve strane jednakosti, slijedi:

$$x(x \pm 1) = 0$$

No to nas opet navodi na sljedeci zakljucak (umnozak dvaju brojeva daje 0 samo ako je bar jedan on njih jednak 0):

$$x = 0 \quad \text{ili} \quad x \pm 1 = 0$$

Iz prve jednadzbe citamo prvo rjesenje, to je uredjeni par $(x, y) = (0, 0)$, sto prevedeno u komplesne brojeve ciji je oblik $z = x + yi$ (kako smo ih oznacili u procesu rjesavanja) znaci da je jedno rjesenje kompleksan broj $z_4 = 0$. No to rjesenje smo vec dobili rijesavajuci prethodni slucaj pa cemo ga zanemariti.

Druga pak se jednadzba dijeli na dva slucaja, slijedi:

$$x - 1 = 0 \quad \text{ili} \quad x + 1 = 0$$

Prebacimo poznanice s lijeve na desnu stranu jednakosti, slijedi:

$$x = 1 \quad \text{ili} \quad x = -1$$

Na taj nacin dobili smo jos dva urednjena para kao rjesenja problema, a to su $(x, y) = (1, 0)$ i $(x, y) = (-1, 0)$. Prevedeno u komplesne brojeve ciji je oblik $z = x + yi$ (kako smo ih oznacili u procesu rjesavanja) znaci da su jos dva rjesenja kompleksni brojevi $z_4 = 1$ i $z_5 = -1$.

Dakle dobili smo pet razlicitih rjesenja, a to su $z_1 = 0$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$, $z_4 = 1$ i $z_5 = -1$. Time je zadatak rijesen.

✲ Zadatak 8: (str. 67) 2) Odredi skup svih kompleksnih brojeva z odredjenih uvjetom:

$$|z - i| + |z + i| = 4$$

Rjesenje: Prisjetimo se da izraz oblika $|z_2 - z_1|$ za neke kompleksne brojeve z_1 i z_2 daje njihovu medjusobnu udaljenost. No promatrajuci izraz u zadataku to znaci da ja trazim sve one kompleksne brojeve ciji su zbrojevi udaljenosti od kompleksnih brojeva i i $-i$ jednaki 4. Zadatak cemo rijesiti algebarski, a na kraju dati geometrijski prikaz dobivenog skupa brojeva opisanog krajnjom jednadzbom.

Opcenito je kompleksan broj z oblika $z = x + yi$ gdje su x i y realni brojevi. Imajuci to na umu jednakost dana u zadataku poprima sljedeci oblik:

$$|\underbrace{z}_{x+yi} - i| + |\underbrace{z}_{x+yi} + i| = 4$$

$$|x + yi - i| + |x + yi + i| = 4$$

Izlucimo imaginarnu jedinicu i iz druga dva clana sume unutar obje apsolutne vrijednosti, slijedi:

$$|x + (y - 1)\, i| + |x + (y + 1)\, i| = 4$$

Prisjetimo se da ako je kompleksan broj oblika $z = x+yi$ tada njegovu apsolutnu vrijednost, odnosno modul, racunamo preko izraza $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, slijedi:

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = 4$$

Prebacimo drugi clan sume s lijeve strane jednakosti na desnu stranu te novodobivenu jednakost kvadriramo, slijedi:

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 4 - \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \ /\ ^2$$

$$\left(\sqrt{x^2 + (y-1)^2}\right)^2 = \left(4 - \sqrt{x^2 + (y+1)^2}\right)^2$$

Desnu stranu jednakosti raspisat cemo prema pravilu za kvadrat binoma, odnosno prema izrazu $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, slijedi:

$$x^2 + (y-1)^2 = 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{x^2 + (y+1)^2} + \left(\sqrt{x^2 + (y+1)^2}\right)^2$$

$$x^2 + (y-1)^2 = 16 - 8\sqrt{x^2 + (y+1)^2} + x^2 + (y+1)^2$$

Posljednje clanove suma s obje strane jednakosti raspisujem prema pravilu za kvadrat binoma, odnosno prema izrazu $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, slijedi:

$$x^2 + y^2 - 2 \cdot y \cdot 1 + 1^2 = 16 - 8\sqrt{x^2 + (y+1)^2} + x^2 + y^2 + 2 \cdot y \cdot 1 + 1^2$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 16 - 8\sqrt{x^2 + (y+1)^2} + x^2 + y^2 + 2y + 1$$

Pokratimo istovjetne izraze na objema stranama, slijedi:

$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 2y + \cancel{1} = 16 - 8\sqrt{x^2 + (y+1)^2} + \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 2y + \cancel{1}$$

$$-2y = 16 - 8\sqrt{x^2 + (y+1)^2} + 2y$$

Korijen s desne strane jednakosti prebacit cemo na lijevu, a sve ostale izraze na desnu stranu, slijedi:

$$8\sqrt{x^2 + (y+1)^2} = 16 + 2y + 2y$$

$$8\sqrt{x^2 + (y+1)^2} = 16 + 4y$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{4}$, slijedi:

$$8\sqrt{x^2 + (y+1)^2} = 16 + 4y \ / \cdot \frac{1}{4}$$

$$8\sqrt{x^2+(y+1)^2}\cdot\frac{1}{4}=16\cdot\frac{1}{4}+4y\cdot\frac{1}{4}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^2\cancel{8}\sqrt{x^2+(y+1)^2}}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{4}_1}=\frac{{}^4\cancel{16}}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{4}_1}+\frac{{}^1\cancel{4}y}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{4}_1}$$

$$2\sqrt{x^2+(y+1)^2}=4+y$$

Kvadriramo dobivenu jednakost, slijedi:

$$2\sqrt{x^2+(y+1)^2}=4+y\ /\ ^2$$

$$\left(2\sqrt{x^2+(y+1)^2}\right)^2=(4+y)^2$$

Lijevu stranu jednakosti raspisujemo prema pravilu za mnozenje potencija istih eksponenata, odnosno prema izrazu $a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$. Nadaje desnu stranu jednakosti rapisujemo prema pravilu za kvadrat binoma, odnosno prema izrazu $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$, slijedi:

$$2^2\left(\sqrt{x^2+(y+1)^2}\right)^2=4^2+2\cdot 4\cdot y+y^2$$

$$4\left(x^2+(y+1)^2\right)=16+8y+y^2$$

Raspisemo drugi clan sume unutar zagrade izraza na lijevoj strani jednakosti prema pravilu za kvadrat binoma, odnosno prema izrazu $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$, slijedi:

$$4\left(x^2+y^2+2\cdot y\cdot 1+1^2\right)=16+8y+y^2$$
$$4\left(x^2+y^2+2y+1\right)=16+8y+y^2$$

Rijesimo se zagrade na lijevoj strani jednakosti, slijedi:

$$4x^2+4y^2+8y+4=16+8y+y^2$$

Pokratime istovjetne izraze na obje strane jednakosti, slijedi:

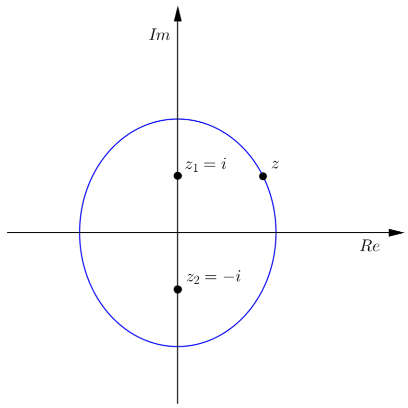
$$4x^2+4y^2+\cancel{8y}+4=16+\cancel{8y}+y^2$$
$$4x^2+4y^2+4=16+y^2$$

Prebacimo sve nepoznanice na lijevu stranu jednakosti, a sve poznanice na desnu, slijedi:

$$4x^2+4y^2-y^2=16-4$$
$$4x^2+3y^2=12$$

Prisjetimo li se da je jednadzba elipse opcenito oblika $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, zakljucujemo da je uvjetom danim u zadataku opisan skup kompleknih brojeva koji cine elipsu cija je jednadzba $4x^2+3x^2=12$. Time je zadatak rijesen.

Dan je i graficki prikaz tog skupa (obojen plavom bojom).



Zadatak 8: (str. 67) 4) Odredi skup svih kompleksnih brojeva z odredjenih uvjetom:

$$\mathrm{Re}\,(1+z) = |z|$$

Rjesenje: Opcenito je kompleksan broj z oblika $z = x + yi$ gdje su x i y realni brojevi. Imajuci to na umu jednakost dana u zadataku poprima sljedeci oblik:

$$\mathrm{Re}\,(1+\underbrace{z}_{x+yi}) = |\underbrace{z}_{x+yi}|$$

$$\mathrm{Re}\,(1+x+yi) = |x+yi|$$

Funkcija Re na lijevoj strani daje realan dio kompleksnog broja. Nadalje, prisjetimo se da ako je kompleksan broj oblika $z = x + yi$ tada njegovu apsolutnu vrijednost, odnosno modul, racunamo preko izraza $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, slijedi:

$$1 + x = \sqrt{x^2+y^2}$$

Kvadriramo dobivenu jednakost, slijedi:

$$(1+x)^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$$

Izraz na lijevoj strani jednakosti raspisujemo prema pravilu za kvadrat binoma, odnosno prema izrazu $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, slijedi:

$$1^2 + 2\cdot 1\cdot x^2 = x^2 + y^2$$

$$1 + 2x + x^2 = x^2 + y^2$$

Pokratimo istovjetne izraze s lijeve i desne strane jednakosti, slijedi:

$$1 + 2x + \cancel{x^2} = \cancel{x^2} + y^2$$

$$1 + 2x = y^2$$

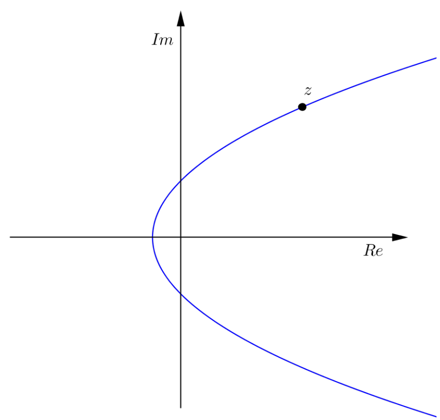
$$y^2 = 2x + 1$$

Izlucimo 2 iz oba clana sume na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$y^2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Postavlja se pitanje kakav skup tocaka predstavlja ova jednadzba. Prisjetimo se da je opcenito jednadzba parabole cije je tjeme u tocki $T(x_0, y_0)$ dano s $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$. Drugim rijecima dobivenom jednakoscu opisana je parabola. Time je zadatak rijesen.

Dan je i graficki prikaz tog skupa (obojen plavom bojom).



☙ ✧ ❧

✠ Zadatak 8: (str. 67) 8) Odredi skup svih kompleksnih brojeva z odredjenih uvjetom:

$$\operatorname{Im} \frac{z - 2}{z - 2i} = 0$$

Rjesenje: Opcenito je kompleksan broj z oblika $z = x + yi$ gdje su x i y realni brojevi. Imajuci to na umu jednakost dana u zadataku poprima sljedeci oblik:

$$\operatorname{Im} \frac{\overbrace{z}^{x+yi} - 2}{\underbrace{z}_{x+yi} - 2i} = 0$$

$$\operatorname{Im} \frac{x+yi-2}{x+yi-2i} = 0$$

Izlucimo imaginarnu jedinicu i iz posljednja dva clana sume u nazivniku razlomka ispod funkcije Im, slijedi:

$$\operatorname{Im} \frac{x-2+yi}{x+(y-2)\,i} = 0$$

Da bismo odredili imaginarni dio izraza ispod funkcije Im prvo moramo odrediti cemu je jednako $\frac{x-2+yi}{x+(y-2)\,i}$. To je u sustini dijeljenje dvaju kompleksnih brojeva. Prisjetimo se da kompleksne brojeve dijelimo tako da brojnik i nazivnik mnozimo s kompleksnom konjugacijom kompleksnog broja u nazivniku. Pritom spomenimo da ako je dan kompleksan broj oblika $z = x + yi$ tada je njegova kompleksna konjugacija, odnosno $\overline{z}$ jednaka $\overline{z} = x - yi$. Racunamo:

$$\frac{x-2+yi}{z+(y-2)\,i} = \frac{x-2+yi}{x+(y-2)\,i} \cdot \frac{x-(y-2)\,i}{x-(y-2)\,i} =$$

$$= \frac{[x-2+yi]\cdot[x-(y-2)\,i]}{[x+(y-2)\,i]\cdot[x-(y-2)\,i]} = (\star)$$

Izraz u nazivniku dobivenog razlomka prepoznajemo kao razliku kvadrata, te rapisujemo prema izrazu $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Izraz u brojniku razlomka raspisujemo prema pravilu rijesavanja zagrada, odnosno mnozenjem svakog clana prve zagrade sa svakim clanom druge zagrade. Nastavljamo racun:

$$(\star) = \frac{x\cdot x + x\cdot[-(y-2)\,i] - 2\cdot x - 2\cdot[-(y-2)\,i] + yi\cdot x + yi\cdot[-(y-2)\,i]}{x^2 - [(y-2)\,i]^2} = (\star\star)$$

Drugi clan sume u nazivniku brojnika raspisemo prema pravilu za mnozenje potencija istih eksponenata, odnosno prema izrazu $a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n$, slijedi:

$$(\star\star) = \frac{x^2 - x\,(y-2)\,i - 2x + 2\,(y-2)\,i + xyi - y\,(y-2)\,i^2}{x^2 - (y-2)^2\,i^2} = (\clubsuit)$$

Prisjetimo se da je kvadrat imaginarne jedinice jednak -1, odnosno da vrijedi $i^2 = -1$, slijedi:

$$(\clubsuit) = \frac{x^2 - x\,(y-2)\,i - 2x + 2\,(y-2)\,i + xyi - y\,(y-2)\,\overbrace{i^2}^{-1}}{x^2 - (y-2)^2\,\underbrace{i^2}_{-1}} =$$

$$= \frac{x^2 - x\,(y-2)\,i - 2x + 2\,(y-2)\,i + xyi - y\,(y-2)\cdot(-1)}{x^2 - (y-2)^2\cdot(-1)} =$$

$$= \frac{x^2 - x\,(y-2)\,i - 2x + 2\,(y-2)\,i + xyi + y\,(y-2)}{x^2 + (y-2)^2} = (\clubsuit\clubsuit)$$

Izraz u nazivniku necemo vise raspisivati, dok izraze u brojniku grupiramo tako da oni bez imagianrne jedinice budu prvi, dok oni koji sadrze imaginarnu jedinicu budu na zacelju sume, slijedi:

$$(\clubsuit\clubsuit) = \frac{x^2 - 2x + y\,(y-2) - x\,(y-2)\,i + 2\,(y-2)\,i + xyi}{x^2 + (y-2)^2} = (\spadesuit)$$

Izlucimo imaginarnu jedinicu i iz posljednja tri clana sume u brojniku, slijedi:

$$(\spadesuit) = \frac{x^2 - 2x + y\,(y-2) + \left[-x\,(y-2) + 2\,(y-2) + xy\right] i}{x^2 + (y-2)^2} = (\spadesuit\spadesuit)$$

Rapisemo jos malo izraz u brojniku nazivnika, slijedi:

$$(\spadesuit\spadesuit) = \frac{x^2 - 2x + y^2 - 2y + (-xy + 2x + 2y - 4 + xy)\,i}{x^2 + (y-2)^2} = (\diamondsuit)$$

Pokratimo suprotne izraze u zagradi brojnika razlomka, slijedi:

$$(\diamondsuit) = \frac{x^2 - 2x + y^2 - 2y + (\cancel{-xy} + 2x + 2y - 4 + \cancel{xy})\,i}{x^2 + (y-2)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 2x + y^2 - 2y + (2x + 2y - 4)\,i}{x^2 + (y-2)^2} = (\diamondsuit\diamondsuit)$$

Dobiveni razlomak zapisemo u malo drugacijem obliku, vrijedi:

$$(\diamondsuit\diamondsuit) = \frac{x^2 - 2x + y^2 - 2y}{x^2 + (y-2)^2} + \frac{(2x + 2y - 4)\,i}{x^2 + (y-2)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 2x + y^2 - 2y}{x^2 + (y-2)^2} + \frac{2x + 2y - 4}{x^2 + (y-2)^2}\; i$$

Vracamo se na glavni zadatak imajuci na umu sto smo izracunali, slijedi:

$$\mathrm{Im} \quad \underbrace{\frac{x - 2 + yi}{x + (y-2)\,i}}_{\frac{x^2-2x+y^2-2y}{x^2+(y-2)^2} + \frac{2x+2y-4}{x^2+(y-2)^2}\; i} \quad = 0$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{x^2 - 2x + y^2 - 2y}{x^2 + (y-2)^2} + \frac{2x + 2y - 4}{x^2 + (y-2)^2}\; i\right) = 0$$

Prisjetimo se da je imaginarni dio broja z izraz uz imaginarnu jedinicu, dakle vrijedi:

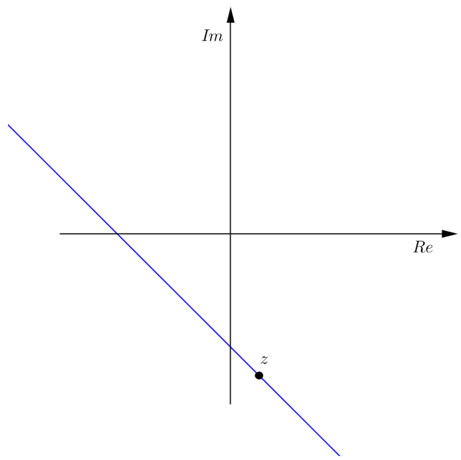
$$\frac{2x + 2y - 4}{x^2 + (y-2)^2} = 0$$

Nadalje razlomak je jednak 0 ako i samo ako je njegov brojnik jednak 0, dakle mora vrijediti:

$$2x + 2y - 4 = 0$$

Ovaj izraz prepoznajemo kao implicitni oblik jednadzbe pravca, dakle izrazom u zadataku opisan je pravac. Time je zadatak rijesen.

Dan je i graficki prikaz tog skupa (obojen plavom bojom).



> Napomena: Primjetimo da smo racunima u ovom zadatku gotovo rijesili i Zadatak 8 pod 7).

Zadatak 9: (str. 67) 2) Odredi skup svih kompleksnih brojeva z odredjenih uvjetom:

$$|z - 3i + 2| > 2$$

Rjesenje: Opcenito je kompleksan broj z oblika $z = x + yi$ gdje su x i y realni brojevi. Imajuci to na umu nejednakost dana u zadataku poprima sljedeci oblik:

$$|\underbrace{z}_{x+yi} - 3i + 2| > 2$$

$$|x + yi - 3i + 2| > 2$$

$$|x + 2 + yi - 3i| > 2$$

Izlucim imaginarnu jedinicu iz posljednja dva clana sume pod apsolutnom vrijednoscu na lijevoj strani nejednakosti, slijedi:

$$|x + 2 + (y - 3)\,i| > 2$$

Prisjetimo se da ako je kompleksan broj oblika $z = x+yi$ tada njegovu apsolutnu vrijednost, odnosno modul, racunamo preko izraza $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, slijedi:

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2} > 2$$

Kvadriram cijelu nejednakost. Pritome je bitno napomenuti da to mogu uciniti bez brige da cu poremetiti smjer nejednakosti. Naime lijeva strana nejednakosti je sigurno pozitivna jer se radi o udaljenosti geometrijski gledano, a udaljenosti su uvijek pozitivne. Slijedi:

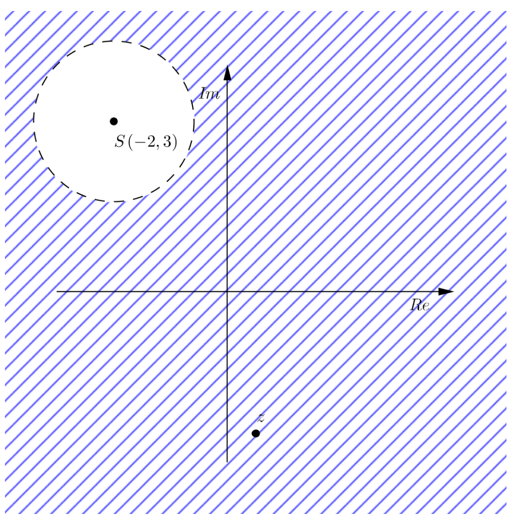
$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2} > 2 \ / \ ^2$$

$$\left(\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2}\right)^2 > 2^2$$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 > 4$$

Prisjetimo se da je kruznica cije je srediste tocka $S\,(p,q)$, a radijus jednak r dana jednadzbom $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$. Dakle u nasem slucaju radi se o koncentricnim kruznicama cije je srediste tocka $S\,(-2,3)$, a radijusi strogo veci od 2. Ili drugim rijecima to je skup tocaka koje se nalaze izvan kruznice cije je srediste tocka $S\,(-2,3)$, a radijus joj je jednak 2. Time je zadatak rijesen.

Dan je i graficki prikaz tog skupa (osjencan plavom bojom).



☙ ✧ ❧

Zadatak 9: (str. 67) 5) Odredi skup svih kompleksnih brojeva z odredjenih uvjetom:

$$|z| > 2 + \operatorname{Im} z$$

Rjesenje: Opcenito je kompleksan broj z oblika $z = x + yi$ gdje su x i y realni brojevi. Imajuci to na umu nejednakost dana u zadataku poprima sljedeci oblik:

$$|\underbrace{z}_{x+yi}| > 2 + \mathrm{Im}\underbrace{z}_{x+yi}$$

$$|x + yi| > 2 + \mathrm{Im}\,(x + yi)$$

Prisjetimo se da ako je kompleksan broj oblika $z = x+yi$ tada njegovu apsolutnu vrijednost, odnosno modul, racunamo preko izraza $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Nadalje funkcija Im daje izraz uz imaginarnu jedinicu i u kompleksnom broju ako je kompleksan broj oblika $z = x + yi$. Umajuci na umu te dvije cinjenice slijedi:

$$\sqrt{x^2 + y^2} > 2 + y$$

Kvadriramo dobiveni izraz, slijedi:

$$\sqrt{x^2 + y^2} > 2 + y \;/\;^2$$

Ovdje se postavlja jedno pitanje. U slucaju da je desna strana nejednakosti negativna jeli moguce da desna strana po apsolutnoj vrijednosti bude veca od lijeve jer bi se u tom slucaju kvadriranjem poremetila nejednakost. No to nije moguce jer u slucaju kad je desna strana negativna, njezina apsolutna vrijednost biti ce uvijek manja od apsolutne vrijednosti samog y (a lijeva strana bit ce uvijek veca ili jednaka apsolutnoj vrijednosti od y, ovisno o velicini od x). Dakle kvadriranjem necemo poremetiti nejednakost. Nastavljamo s racunom:

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = (2 + y)^2$$

Lijevu stranu raspisujemo po pravilu za kvadriranje binoma, ondnosno prema izrazu $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, slijedi:

$$x^2 + y^2 > 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot y + y^2$$

$$x^2 + y^2 > 4 + 4y + y^2$$

Pokratimo istovjetne izraze s obje strane nejednakosti, slijedi:

$$x^2 + \cancel{y^2} > 4 + 4y + \cancel{y^2}$$

$$x^2 > 4 + 4y$$

Zmijenimo strane nejednakosti pritom pazeci da promijenimo i znak nejednakosti, slijedi:

$$4y + 4 < x^2$$

Prebacimo 4 na desnu stranu nejednakosti, slijedi:

$$4y < x^2 - 4$$

Pomnozimo cijelu nejednakost s $\frac{1}{4}$, slijedi:

$$4y < x^2 - 4 \ / \cdot \frac{1}{4}$$

$$4y \cdot \frac{1}{4} < \left(x^2 - 4\right) \cdot \frac{1}{4}$$

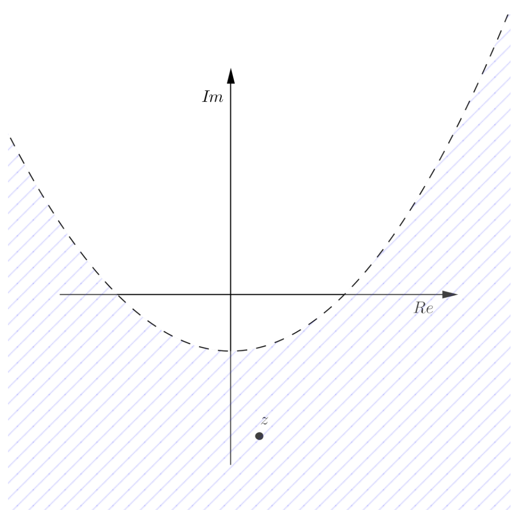
Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{4}y}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{4}_1} < \frac{\left(x^2 - 4\right)}{1} \cdot \frac{1}{4}$$

$$y < \frac{x^2 - 4}{4}$$

Izraz na desnoj strani prepoznajemo kao parabolu. Drugim rijecima ovdje se govori o skupu tocaka koji se nalazi ispod parabole dane jednadzbom $y = \frac{x^2 - 4}{4}$. Time je zadatak rijesen.

Dan je i graficki prikaz tog skupa (osjencan plavom bojom).



Zadatak 9: (str. 67) 6) Odredi skup svih kompleksnih brojeva z odredjenih uvjetom:

$$|2z| > \left|1 + z^2\right|$$

Rjesenje: Prije svega primjetimo da izraz $1 + z^2$ mozemo zapisati na malo drugaciji nacin, naime mora vrijediti:

$$1 + z^2 = 1 - (zi)^2$$

Raspisimo desnu stranu jednakosti kako bi se uvijerili da to zaista jest tako. Drugi clan te sume (izraza desne strane jednakosti) raspisat cemo prema pravilu za mnozenje potencija istih eksponenata, odnosno prema izrazu $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$, slijedi:

$$1 - (zi)^2 = 1 - z^2 i^2 = (\star)$$

Nadalje prisjetimo se da je kvadrat imaginarne jednice i jednak -1, odnosno da vrijedi $i^2 = -1$, slijedi:

$$(\star) = 1 - z^2 \underbrace{i^2}_{-1} = 1 - z^2 \cdot (-1) = 1 + z^2$$

Dakle tvrdnja je tocna, odnosno vrijedi:

$$1 + z^2 = 1 - (zi)^2$$

Nadalje prepoznam da je izraz na lijevoj strani jednakosti zapravo razlika kvadrata (1 mozemo prikazati kao 1^2), koje raspisujemo prema pavilu za razliku kvadrata, odnosno prema izrazu $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, slijedi:

$$1 + z^2 = 1 - (zi)^2 = 1^2 - (zi)^2 = (1 - zi)(1 + zi)$$

Dakle zapravo vrijedi sljedeca jednakost:

$$1 + z^2 = (1 - zi)(1 + zi)$$

S njom cemo se vratiti u nejednakost danu u zadatku, slijedi:

$$|2z| > |\underbrace{1 + z^2}_{(1-zi)(1+zi)}|$$

$$|2z| > |(1 - zi)(1 + zi)|$$

Nadalje kako za funkciju apsolutne vrijednosti vrijedi $|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$, nejednakost prelazi u sljedeci oblik:

$$|2z| > |1 - zi| \cdot |1 + zi|$$

Opcenito je kompleksan broj z oblika $z = x + yi$ gdje su x i y realni brojevi. Imajuci to na umu nejednakost poprima sljedeci oblik:

$$|2\underbrace{z}_{x+yi}| > |1 - \underbrace{z}_{x+yi}i| \cdot |1 + \underbrace{z}_{x+yi}i|$$

$$|2(x + yi)| > |1 - (x + yi)i| \cdot |1 + (x + yi)i|$$

Raspisemo izraze pod apsolutnim vrijednostima na obje strane nejednakosti tako da se rijesimo zagrada, slijedi:

$$|2x + 2y| > \left|1 - xi - yi^2\right| \cdot \left|1 + xi + yi^2\right|$$

Prisjetimo se nadalje da je kvadrat imaginarne jedinice i jednak -1, odnosno da vrijedi $i^2 = -1$, slijedi:

$$|2x + 2y| > |1 - xi - y\underbrace{i^2}_{-1}| \cdot |1 + xi + y\underbrace{i^2}_{-1}|$$

$$|2x + 2y| > |1 - xi - y \cdot (-1)| \cdot |1 + xi + y \cdot (-1)|$$

$$|2x + 2y| > |1 - xi + y| \cdot |1 + xi - y|$$

Poredamo malo drugacije clanove sume u apsolutnim vrijednostima na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$|2x + 2y| > |1 + y - xi| \cdot |1 - y + xi|$$

Prisjetimo se da ako je kompleksan broj oblika $z = x+yi$ tada njegovu apsolutnu vrijednost, odnosno modul, racunamo preko izraza $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, slijedi:

$$\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2} > \sqrt{(1 + y)^2 + x^2} \cdot \sqrt{(1 - y)^2 + x^2}$$

Kvadriramo cijelu nejednakost. Primjetimo da se time smjer nejednakosti nece poremetiti, jer svi clanovi nejednakosti koju kvadriramo su geometrijski gledano udaljenosti, a one su uvijek pozitivne. Nastavljamo racun:

$$(2x)^2 + (2y)^2 > \left[(1 + y)^2 + x^2\right] \cdot \left[(1 - y)^2 + x^2\right]$$

Clanove sume na desnoj strani nejednakosti rapisujemo prema pravilu za potenciranje potencija istih eksponenata, odnosno prema izrazu $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$. Na desnoj strani cemo se rijesiti zagrada prema pravilu mnozenja svakog clana prve zagrade sa svakim clanom druge zagrade. Nastavljam racun:

$$2^2x^2 + 2^2y^2 > (1 + y)^2 \cdot (1 - y)^2 + (1 + y)^2 \cdot x^2 + (1 - y)^2 \cdot x^2 + \left(x^2\right)^2$$

Izlucit cemo izraz x^2 iz srednja dva clana sume na desnoj strani nejednakosti, slijedi:

$$4x^2 + 4y^2 > (1 + y)^2 \cdot (1 - y)^2 + x^2 \left[(1 + y)^2 + (1 - y)^2\right] + \left(x^2\right)^2$$

Prvi clan sume na desnoj strani nejednakosti raspisati cemo prema pravilu za mnozenje potencija istih eksponenata, odnosno prema izrazu $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$. Nadalje oba clana sume u uglatim zagradama izraza na desnoj strani nejednakosti prema pravilu za kvadriranje binoma odnosno prema izrazu $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. Slijedi:

$$4x^2 + 4y^2 > [(1 + y) \cdot (1 - y)]^2 + x^2 \left(1 + 2 \cdot 1 \cdot y + y^2 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot y + y^2\right) + \left(x^2\right)^2$$

$$4x^2 + 4y^2 > [(1 + y) \cdot (1 - y)]^2 + x^2 \left(1 + 2y + y^2 + 1 - 2y + y^2\right) + \left(x^2\right)^2$$

Izraz pod kvadratom prvog clana sume na desnoj strani nejednakosti prepoznajemo kao razliku kvadrata, koju respisujemo prema izrazu $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$. Nadalje pokratit cemo suprotne izraze u zagradi dugog clana na desnoj strani nejednakosti. Nastavljamo racun, slijedi:

$$4x^2 + 4y^2 > \left(1-y^2\right)^2 + x^2\left(1 + \cancel{2y} + y^2 + 1 \cancel{-2y} + y^2\right) + \left(x^2\right)^2$$

$$4x^2 + 4y^2 > \left(1-y^2\right)^2 + x^2\left(1 + y^2 + 1 + y^2\right) + \left(x^2\right)^2$$

$$4x^2 + 4y^2 > \left(1-y^2\right)^2 + x^2\left(2 + 2y^2\right) + \left(x^2\right)^2$$

Prebacit cemo $4x^2$ s lijeve strane nejednakosti na desnu stranu nejednakosti, slijedi:

$$4y^2 > \left(1-y^2\right)^2 + x^2\left(2 + 2y^2\right) + \left(x^2\right)^2 - 4x^2$$

$$4y^2 > \left(1-y^2\right)^2 + x^2\left(2 + 2y^2\right) - 4x^2 + \left(x^2\right)^2$$

Iz srednja dva clana sume na desnoj strani jednakosti izlucuim x^2, slijedi:

$$4y^2 > \left(1-y^2\right)^2 + x^2\left(2 + 2y^2 - 4\right) + \left(x^2\right)^2$$

U zagradi srednjeg clana sume na desnoj strani nejednakosti malo promijenimo poredak njezinih clanova, slijedi:

$$4y^2 > \left(1-y^2\right)^2 + x^2\left(2y^2 + 2 - 4\right) + \left(x^2\right)^2$$

$$4y^2 > \left(1-y^2\right)^2 + x^2\left(2y^2 - 2\right) + \left(x^2\right)^2$$

Iz clanova sume pod kvadratom kod prvog clana sume na desnoj strani nejednakosti izlucimo broj -1. Iz clanova sume u zagradi drugog clana sume na desnoj strani nejednakosti izlucimo broj 2. Slijedi:

$$4y^2 > \left[(-1)\left(-1+y^2\right)\right]^2 + x^2 \cdot 2 \cdot \left(y^2 - 1\right) + \left(x^2\right)^2$$

$$4y^2 > \left[(-1)\left(y^2-1\right)\right]^2 + 2x^2\left(y^2 - 1\right) + \left(x^2\right)^2$$

Prvi clan sume na desnoj strani nejednakosti raspisemo prema pravilu za mnozenje potencija istih eksponenata, odnosno prema izrazu $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$, slijedi:

$$4y^2 > \underbrace{(-1)^2}_{1}\left(y^2-1\right)^2 + 2x^2\left(y^2 - 1\right) + \left(x^2\right)^2$$

$$4y^2 > 1 \cdot \left(y^2-1\right)^2 + 2x^2\left(y^2 - 1\right) + \left(x^2\right)^2$$

$$4y^2 > \left(y^2-1\right)^2 + 2x^2\left(y^2 - 1\right) + \left(x^2\right)^2$$

Izraz na desnoj strani nejednakosti prepoznajem kao kvadrat binoma te rapisujem prema izrazu $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, slijedi:

$$4y^2 > \underbrace{\left(y^2-1\right)^2 + 2x^2\left(y^2 - 1\right) + \left(x^2\right)^2}_{\left(y^2-1+x^2\right)^2}$$

$$4y^2 > \left(y^2 - 1 + x^2\right)^2$$

Promijenimo poredak clanovima sume u zagradi na desnoj strani nejednakosti, slijedi:

$$4y^2 > \left(x^2 + y^2 - 1\right)^2$$

Zamijemo izraze na lijevoj i densoj strani nejednakosti pritom pazeci da okrenemo znak nejednakosti, slijedi:

$$\left(x^2 + y^2 - 1\right)^2 < 4y^2$$

Korjenujemo cijelu nejdnakost, slijedi:

$$\left(x^2 + y^2 - 1\right)^2 < 4y^2 \; /\sqrt{}$$

$$\sqrt{\left(x^2 + y^2 - 1\right)^2} < \sqrt{4y^2}$$

Ovdje napominjem da je dovoljno samo s jedne strane nejednakosti nakon korijenovanja staviti predznak $\pm$. Nastavljam racun:

$$x^2 + y^2 - 1 < \pm 2y$$

Ovdje se pojavljuju dva slucaja:

$$x^2 + y^2 - 1 < -2y \quad \text{ili} \quad x^2 + y^2 - 1 < 2y$$

<u>Slucaj prvi</u>: Pozabavimo se prvo nejednadzbom:

$$x^2 + y^2 - 1 < -2y$$

Prebacimo $-2y$ s desne strane nejednakosti na lijevu, slijedi:

$$x^2 + y^2 - 1 + 2y < 0$$

Priomijenimo poredak clanova sume na lijevoj strani nejednakosti, slijedi:

$$x^2 + y^2 + 2y - 1 < 0$$

Kad bi umjesto -1 stajala 1 posljednja tri clana sume cinila bi kvadrat binoma. Da to postignemo broj -1 prikazat cemo kao $-1 = 1 - 2$, slijedi:

$$x^2 + y^2 + 2y + 1 - 2 < 0$$

Broj -2 prebacimo s lijeve strane nejednakosti na desnu, slijedi:

$$x^2 + y^2 + 2y + 1 < 2$$

Posljednja tri clana sume na lijevoj strani nejednakosti sad prepoznajem kao kvadrat binoma i raspisujemo preko izraza $\left(a \pm b\right)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, slijedi:

$$x^2 + \underbrace{y^2 + 2y + 1}_{(y+1)^2} < 2$$

$$x^2 + (y+1)^2 < 2$$

Prisjetimo se da je kruznica cije je srediste tocka $S(p,q)$, a radijus jednak r dana jednadzbom $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$. Dakle u nasem slucaju radi se o koncentricnim kruznicama cije je srediste tocka $S(0,-1)$, a radijusi strogo manji od $\sqrt{2}$. Ili drugim rijecima to je skup tocaka koje se nalaze unutar kruznice cije je srediste tocka $S(0,-1)$, a radijus joj je jednak $\sqrt{2}$.

Slucaj drugi: Pozabavimo se prvo nejednadzbom:

$$x^2 + y^2 - 1 < 2y$$

Prebacimo $2y$ s desne strane nejednakosti na lijevu, slijedi:

$$x^2 + y^2 - 1 - 2y < 0$$

Priomijenimo poredak clanova sume na lijevoj strani nejednakosti, slijedi:

$$x^2 + y^2 - 2y - 1 < 0$$

Kad bi umjesto -1 stajala 1 posljednja tri clana sume cinila bi kvadrat binoma. Da to postignemo broj -1 prikazat cemo kao $-1 = 1 - 2$, slijedi:

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 - 2 < 0$$

Broj -2 prebacimo s lijeve strane nejednakosti na desnu, slijedi:

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 < 2$$

Posljednja tri clana sume na lijevoj strani nejednakosti sad prepoznajem kao kvadrat binoma i raspisujemo preko izraza $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, slijedi:

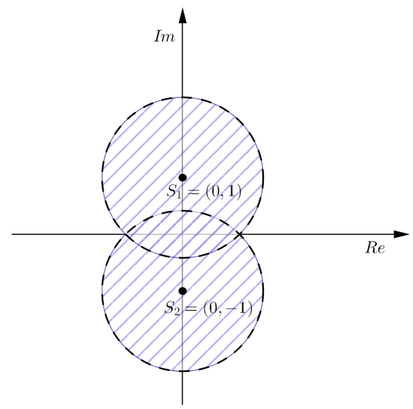
$$x^2 + \underbrace{y^2 - 2y + 1}_{(y-1)^2} < 2$$

$$x^2 + (y-1)^2 < 2$$

Prisjetimo se da je kruznica cije je srediste tocka $S(p,q)$, a radijus jednak r dana jednadzbom $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$. Dakle u nasem slucaju radi se o koncentricnim kruznicama cije je srediste tocka $S(0,1)$, a radijusi strogo manji od $\sqrt{2}$. Ili drugim rijecima to je skup tocaka koje se nalaze unutar kruznice cije je srediste tocka $S(0,1)$, a radijus joj je jednak $\sqrt{2}$.

Konacno rjesenje jest unija skupova opisanih u prvom i drugom slucaju, i time je zadatak rijesen.

Dan je i graficki prikaz tog skupa (osjencano plavom bojom).



Im
Re
$S_1 = (0, 1)$
$S_2 = (0, -1)$