



Realni brojevi

 **Zadatak 6:** (str. 46) Prosječna starost igrača jedne nogometne momčadi, njih jedanaestorice, je 25.5 godina. Ako je isključen igrač star 20.5 godina, kolika je prosječna starost igrača koji su ostali?

 **Rjesenje:** Oznacimo s G starost svih igrača zajedno. Ako je njihova prosječna starost jednaka 25.5 godina onda mora vrijediti jednakost:

$$\frac{G}{11} = 25.5$$

Mnozeci jednakost s 11 odredit cemo ukupnu starost svih igrača, racunamo:

$$\frac{G}{11} = 25.5 \quad / \cdot 11$$

$$\frac{G}{11} \cdot 11 = 25.5 \cdot 11$$

Pokratimo sto se pokratiti daje, slijedi:

$$\frac{G}{\cancel{11}} \cdot \frac{\cancel{11}}{1} = 280.5$$

$$\frac{G}{1} = 280.5$$

$$G = 280.5$$

Neka je isključen igrač starosti 20.5 godina, tada je njihova nova ukupna starost, oznacimo je s G' , jednaka:

$$G' = G - 20.5$$

Uvrstimo poznate vrijednosti:

$$G' = G - 20.5 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \overset{280.5}{\curvearrowright} \\ G' = 280.5 - 20.5 \\ G' = 260 \end{array}$$

Kako se sada broj igrača umanjio za jedan, ukupno ih je 10 pa je njihova prosječna starost $A_{G'}$ jednaka:

$$A_{G'} = \frac{G'}{10}$$

Uvrstimo poznate vrijednosti:

$$A_{G'} = \frac{G'}{10} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \overset{260}{\curvearrowright} \\ A_{G'} = \frac{260}{10} \end{array}$$

Pokratimo sto se pokratiti daje, slijedi:


$$A_{G'} = \frac{26 \cdot \cancel{260}}{\cancel{10}1}$$


$$A_{G'} = \frac{26}{1}$$

$$A_{G'} = 26$$

Dakle trenutna starost momcadi jednaka je 260 godina. Time je zadatak riješen.



 **Zadatak 10:** (str. 46) Prosječna visina 25 učenika u nekom razredu iznosi 168 cm. Kad se Jura izdvoji, prosječna visina ostalih iznosi 167.5 cm. Koliko je visok Jura?

 **Rjesenje:** Oznacimo sa V visinu svih učenika, sa A_V prosječnu visinu svih učenika, sa V' visinu svih učenika izuzevsi Juru, a sa $A_{V'}$ prosječnu visinu svih učenika izuzevsi Juru. Vrijede sljedeće jednakosti:

$$A_V = \frac{V}{25} \quad \text{i} \quad A_{V'} = \frac{V'}{24}$$

preostaje 24-ero učenika
nakon što izuzmemo Juru

Uvrstimo poznate vrijednosti:

$$\begin{array}{ccc}
 167.5 & \curvearrowright & \\
 & \searrow & \\
 & A_V = \frac{V}{25} & \text{i} \quad A_{V'} = \frac{V'}{24} \\
 & & \swarrow \quad \curvearrowleft \\
 & & 168
 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$168 = \frac{V}{25} \quad \text{i} \quad 167.5 = \frac{V'}{24}$$

Pomnožimo lijevu jednakost s 25, a desnu s 24, slijedi:

$$168 = \frac{V}{25} \Big/ \cdot 25 \quad \text{i} \quad 167.5 = \frac{V'}{24} \Big/ \cdot 24$$

$$168 \cdot 25 = \frac{V}{25} \cdot 25 \quad \text{i} \quad 167.5 \cdot 24 = \frac{V'}{24} \cdot 24$$

Pokratimo sto se pokratiti daje, slijedi:

$$4200 = \frac{V}{\cancel{1}25} \cdot \frac{\cancel{25}^1}{1} \quad \text{i} \quad 4020 = \frac{V'}{\cancel{1}24} \cdot \frac{\cancel{24}^1}{1}$$

$$4200 = \frac{V \cdot 1}{1 \cdot 1} \quad \text{i} \quad 4020 = \frac{V' \cdot 1}{1 \cdot 1}$$

$$4200 = \frac{V}{1} \quad \text{i} \quad 4020 = \frac{V'}{1}$$

$$4200 = V \quad \text{i} \quad 4020 = V'$$

Sada je jasno da je Jurina visina jednaka:


$$v_{Jura} = V - V'$$


Odnosno njegova visina je sigurno jednaka ukupnoj visini svih učenika umanjenoj za ukupnu visinu svih učenika bez Jure. Uvrstimo poznate vrijednosti:

$$\begin{array}{ccc}
 4200 & \curvearrowright & 4020 \\
 & \searrow & \swarrow \\
 v_{Jura} = V - V' & \Rightarrow & v_{Jura} = 4200 - 4020 \\
 & & v_{Jura} = 180 \text{ cm}
 \end{array}$$

Dakle Jurina visina jednaka je 180 cm. Time je zadatak riješen.



 **Zadatak 17:** (str. 46) U nekoj skoli 55% učenika su djevojčice. Ostalo su dječaci i njih je za 60 manje nego djevojčica. Koliko je učenika u toj skoli?

 **Rjesenje:** S nepoznanicom x označimo cemo ukupan broj učenika, sa d broj djevojčica, a sa m broj dječaka. Prije svega očito je da broj djevojčica i dječaka ukupno jednak broju svih učenika, odnosno mora vrijediti:

$$d + m = x$$

Kako je 55% ukupnog broja učenika djevojčica, njihov je broj jednak:

$$d = 55\% \cdot x$$

Buduci da je $p\%$ skraćeni zapis razlomka $\frac{p}{100}$, jednakost poprima sljedeći oblik:

$$d = \textcircled{55\%} \cdot x \quad \Rightarrow \quad d = \frac{55}{100} \cdot x$$

Pokratimo sto se pokratiti daje, slijedi:

$$d = \frac{11\cancel{55}}{100\cancel{20}} \cdot x$$

$$d = \frac{11}{20} \cdot \frac{x}{1}$$

$$d = \frac{11 \cdot x}{20 \cdot 1}$$

$$d = \frac{11x}{20}$$

Preko prve jednakosti određujemo čemu je jednak broj dječaka, slijedi:

$$d + m = x \quad \Rightarrow \quad \frac{11x}{20} + m = x$$

Prebacimo prvi član sume na lijevoj strani jednakosti na desnu, slijedi:

$$\frac{11x}{20} + m = x \quad \Rightarrow \quad m = x - \frac{11x}{20}$$

Svedemo razlomke na desnoj strani jednakosti na zajednicki nazivnik 20, slijedi:

$$m = \frac{x \cdot 20 - 11x \cdot 1}{20}$$

$$m = \frac{20x - 11x}{20}$$

$$m = \frac{9x}{20}$$

Posto je dječaka za 60 manje od djevojčica mora vrijediti:

$$m + 60 = d$$

Uvrstimo poznate vrijednosti, slijedi:

$$\frac{9x}{20} + 60 = d \quad \Rightarrow \quad \frac{9x}{20} + 60 = \frac{11x}{20}$$

Pomnožimo cijelu jednakost sa 20, slijedi:

$$\frac{9x}{20} + 60 = \frac{11x}{20} \quad / \cdot 20$$

$$\frac{9x}{20} \cdot 20 + 60 \cdot 20 = \frac{11x}{20} \cdot 20$$

Pokratimo sto se pokratiti daje, slijedi:

$$\begin{aligned}\frac{9x}{120} \cdot \frac{20^1}{1} + 1200 &= \frac{11x}{120} \cdot \frac{20^1}{1} \\ \frac{9x \cdot 1}{1 \cdot 1} + 1200 &= \frac{11x \cdot 1}{1 \cdot 1} \\ \frac{9x}{1} + 1200 &= \frac{11x}{1} \\ 9x + 1200 &= 11x\end{aligned}$$

Prebacimo $9x$ s lijeve na desnu stranu jednakosti, slijedi:

$$\begin{aligned}(9x) + 1200 = 11x &\Rightarrow 1200 = 11x - 9x \\ &1200 = 2x\end{aligned}$$

Pomnožimo cijelu jednakost s $\frac{1}{2}$, slijedi:


$$\begin{aligned}1200 = 2x &\Big/ \cdot \frac{1}{2} \\ 1200 \cdot \frac{1}{2} &= 2x \cdot \frac{1}{2}\end{aligned}$$


Pokratimo sto se pokratiti daje, slijedi:

$$\begin{aligned}\frac{600 \cdot 1200}{1} \cdot \frac{1}{2} &= \frac{1 \cdot x \cdot 1}{1} \cdot \frac{1}{2} \\ \frac{600 \cdot 1}{1 \cdot 1} &= \frac{1 \cdot x \cdot 1}{1 \cdot 1} \\ \frac{600}{1} &= \frac{x}{1} \\ 600 &= x\end{aligned}$$

Dakle skolu polazi ukupno 600 učenika. Time je zadatak riješen.



 **Zadatak 27:** (str. 47) U nekom razredu 60% učenika uci njemacki jezik, 80% uci engleski. Svaki ucenik uci barem jedan od ovih dvaju stranih jezika. Koliki postotak ucenika ovog razreda uci oba ova jezika?

 **Rjesenje:** Neka je x ukupan broj ucenika u razredu. Dakle ako 60% ucenika uci njemacki jezik, oznacimo taj broj s x' , tada mora vrijediti:

$$x' = 60\% \cdot x$$

Buduci da je $p\%$ skraceni zapis razlomka $\frac{p}{100}$, jednakost poprima sljedeci oblik:

$$x' = \overset{\frac{60}{100}}{\textcircled{60\%}} \cdot x \Rightarrow x' = \frac{60}{100} \cdot x$$

Pokratimo sto se pokratiti daje, slijedi:

$$x' = \frac{360}{1005} \cdot x$$

$$x' = \frac{3}{5} \cdot \frac{x}{1}$$

$$x' = \frac{3 \cdot x}{5 \cdot 1}$$

$$x' = \frac{3x}{5}$$

To je broj učenika koji uci barem njemacki jezik (dakle jedino sto znamo je da oni sigurno uce njemacki jezik, a mozda i engleski). Oduzmemo li taj broj od x dobit cemo ostatak učenika koji sigurno ne uci njemacki jezik. No kako moraju birati izmedju njemackog i engleskog jezika, a njemacki ne uce, tada uce samo engleski jezik. Oznacimo taj broj s x'' , vrijedi:

$$x'' = x - x'$$

Uvrstimo poznate vrijednosti, slijedi:

$$x'' = x - x' \Rightarrow x'' = x - \frac{3x}{5}$$

Članove sume na desnoj strani jednakosti svedemo na zajednicki nazivnik 5, slijedi:

$$x'' = \frac{x \cdot 5 - 3x \cdot 1}{5}$$

$$x'' = \frac{5x - 3x}{5}$$

$$x'' = \frac{2x}{5}$$

Dakle učenika koji uce samo engleski jezik je ukupno $\frac{2x}{5}$. Na slican nacin odredit cemo i broj učenika koji uci samo njemacki jezik.

Nadalje ako 80% učenika uci engleski jezik, oznacimo taj broj s y' , tada mora vrijediti:

$$y' = 80\% \cdot x$$

Buduci da je $p\%$ skraceni zapis razlomka $\frac{p}{100}$, jednakost poprima sljedeci oblik:

$$y' = \textcircled{80\%} \cdot x \Rightarrow y' = \frac{80}{100} \cdot x$$

Pokratimo sto se pokratiti daje, slijedi:

$$y' = \frac{80}{100} \cdot x$$

$$y' = \frac{4}{5} \cdot \frac{x}{1}$$

$$y' = \frac{4 \cdot x}{5 \cdot 1}$$

$$y' = \frac{4x}{5}$$

To je broj učenika koji uci barem engleski jezik (dakle jedino sto znamo je da oni sigurno uce engleski jezik, a mozda i njemacki). Oduzmemo li taj broj od x dobit cemo ostatak učenika koji sigurno ne uci engleski jezik. No kako moraju birati izmedju njemackog i engleskog jezika, a engleski ne uce, tada uce samo njemacki jezik. Oznacimo taj broj s x'' , vrijedi:

$$y'' = x - y'$$

Uvrstimo poznate vrijednosti, slijedi:

$$y'' = x - y' \Rightarrow x'' = x - \frac{4x}{5}$$

Clanove sume na desnoj strani jednakosti svedemo na zajednicki nazivnik 5, slijedi:

$$y'' = \frac{x \cdot 5 - 4x \cdot 1}{5}$$

$$y'' = \frac{5x - 4x}{5}$$

$$y'' = \frac{x}{5}$$

Dakle učenika koji uce samo njemacki jezik je ukupno $\frac{x}{5}$. Preostaje jos samo odrediti broj učenika koji uce oba jezika, a to cemo dobiti tako da od ukupnog broja učenika oduzmemo one koji uce samo njemacki, odnosno engleski jezik, oznacimo taj broj s x_{oba} . Dakle mora vrijediti:

$$x_{\text{oba}} = x - x'' - y''$$

Uvrstimo poznate vrijednosti, slijedi:

$$x_{\text{oba}} = x - x'' - y'' \Rightarrow x_{\text{oba}} = x - \frac{2x}{5} - \frac{x}{5}$$

Svedemo sve članove sume na desnoj strani jednakosti na zajednički nazivnik 5, slijedi:

$$x_{\text{oba}} = \frac{x \cdot 5 - 2x \cdot 1 - x \cdot 1}{5}$$

$$x_{\text{oba}} = \frac{5x - 2x - x}{5}$$

$$x_{\text{oba}} = \frac{2x}{5}$$

Dakle oba jezika uci $\frac{2x}{5}$ učenika. Proširimo taj razlomak s 20, slijedi:

$$x_{\text{oba}} = \frac{2x \cdot 20}{5 \cdot 20}$$

$$x_{\text{oba}} = \frac{40x}{100}$$

Izdvojimo x kao poseban faktore, slijedi:

$$x_{\text{oba}} = \frac{40}{100} \cdot x$$

Prepoznamo prvi razlomak kao postotak. Buduci da je $p\%$ skraceni zapis razlomka $\frac{p}{100}$ zakljucujemo da se ovdje radi o sljedecem:

$$x_{\text{oba}} = \frac{40}{100} \cdot x \Rightarrow x_{\text{oba}} = 40\% \cdot x$$

Dakle u konacnici zakljucujemo da 40% učenika uci oba strana jezika. Time je zadatak rijesen.

