Rjesenja nekih zadataka iz poglavlja 7.6 Skalarni produkt

Zadatak 12: (str. 36) Neka je $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=2$ i $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$, $\vec{a}^2=\vec{b}^2=4$, $\vec{c}^2=6$. Ako je $\vec{p}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, odredi $|\vec{p}|$, $|\vec{q}|$, $\angle(\vec{p},\vec{q})$.

Rjesenje: Prisjetimo se cinjenice da za neki vektor $\vec{v}$ vrijedi jednakost:

$$\vec{v}^2=\vec{v}\cdot\vec{v}=|\vec{v}|^2$$

Dakle racunamo:

$$|\vec{p}|^2=\overbrace{\vec{p}}^{2\vec{a}-\vec{b}}\cdot\overbrace{\vec{p}}^{2\vec{a}-\vec{b}}=\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)=(\star)$$

Rijesimo se zagrade mnozenjem svakog clana prve zagrade svakim clanom druge zagrade, slijedi:

$$(\star)=2\vec{a}\cdot2\vec{a}+2\vec{a}\cdot\left(-\vec{b}\right)+\left(-\vec{b}\right)\cdot2\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)\cdot\left(-\vec{b}\right)=$$

$$=4\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}^2=(\star\star)$$

Prisjetimo se da vrijedi komutativnost skalarnog produkta vektora, odnosno $\vec{v}\cdot\vec{u}=\vec{u}\cdot\vec{v}$, slijedi:

$$(\star\star)=4\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\overbrace{\vec{b}\cdot\vec{a}}^{\vec{a}\cdot\vec{b}}+\vec{b}^2=$$

$$=4\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=$$

$$=4\vec{a}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=(\star\star\star)$$

Uvrstimo podatke dane u tekstu zadatka, slijedi:

$$(\star\star\star)=4\overbrace{\vec{a}^2}^{4}-4\overbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}^{1}+\overbrace{\vec{b}^2}^{4}=$$

$$=4\cdot4-4\cdot1+4=16-4+4=16$$

Dakle vrijedi:

$$|\vec{p}|^2=16$$

Korijenujemo izraz, slijedi:

$$|\vec{p}|^2=16\ /\sqrt{\ }$$

$$|\vec{p}|=4$$

Velicina vektora $\vec{p}$ jednaka je 4, provedimo isti postupak za vektor $\vec{q}$, racunamo:

$$|\vec{q}|^2=\overbrace{\vec{q}}^{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}\cdot\overbrace{\vec{q}}^{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}=\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=(\spadesuit)$$

Rijesimo se zagrade mnozenjem svakog clana prve zagrade svakim clanom druge zagrade, slijedi:

$$(\spadesuit) = \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c}=$$

$$=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}=(\spadesuit\spadesuit)$$

Prisjetimo se da vrijedi komutativnost skalarnog produkta vektora, odnosno $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$, slijedi:

$$(\spadesuit\spadesuit)=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\overbrace{\vec{b}\cdot\vec{a}}^{\vec{a}\cdot\vec{b}}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\overbrace{\vec{c}\cdot\vec{a}}^{\vec{a}\cdot\vec{c}}+\overbrace{\vec{c}\cdot\vec{b}}^{\vec{b}\cdot\vec{c}}=$$

$$=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}=$$

$$=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{c}+2\vec{b}\cdot\vec{c}=(\spadesuit\spadesuit\spadesuit)$$

Uvrstimo podatke dane u tekstu zadatka, slijedi:

$$(\spadesuit\spadesuit\spadesuit)=\overbrace{\vec{a}^2}^{4}+\overbrace{\vec{b}^2}^{4}+\overbrace{\vec{c}^2}^{6}+2\,\overbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}^{1}+2\,\overbrace{\vec{a}\cdot\vec{c}}^{2}+2\,\overbrace{\vec{b}\cdot\vec{c}}^{0}=$$

$$=4+4+6+2\cdot 1+2\cdot 2+2\cdot 0=4+4+6+2+4+0=20$$

Dakle vrijedi:

$$|\vec{q}|^2=20$$

Korijenujemo izraz, slijedi:

$$|\vec{q}|^2=20\ /\sqrt{\ }$$

$$|\vec{q}|=\sqrt{20}$$

Velicina vektora $\vec{q}$ jednaka je $\sqrt{20}$. Prisjetimo se da kut izmedju dvaju vektora $\vec{u}$ i $\vec{v}$ racunamo prema izrazu:

$$\cos\left[\angle\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right]=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}$$

Sto znaci da moramo jos odrediti skalarni umnozak izmedju vektora $\vec{p}$ i $\vec{q}$, racunamo:

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=(\diamondsuit)$$

Rijesimo se zagrade mnozenjem svakog clana prve zagrade svakim clanom druge zagrade, slijedi:

$$(\diamondsuit)=2\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{c}+\left(-\vec{b}\right)\cdot\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)\cdot\vec{b}+\left(-\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=$$

$$=2\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}^2-\vec{b}\cdot\vec{c}=(\diamondsuit\diamondsuit)$$

Prisjetimo se da vrijedi komutativnost skalarnog produkta vektora, odnosno $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, slijedi:

$$(\diamondsuit\diamondsuit) = 2\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} - \overbrace{\vec{b} \cdot \vec{a}}^{\vec{a}\cdot\vec{b}} - \vec{b}^2 - \vec{b} \cdot \vec{c} =$$

$$= 2\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b}^2 - \vec{b} \cdot \vec{c} =$$

$$= 2\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b}^2 - \vec{b} \cdot \vec{c} = (\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit)$$

Uvrstimo podatke dane u tekstu zadatka, slijedi:

$$(\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit) = 2\overbrace{\vec{a}^2}^{4} + 2\overbrace{\vec{a} \cdot \vec{b}}^{1} + \overbrace{\vec{a} \cdot \vec{c}}^{2} - \overbrace{\vec{b}^2}^{4} - \overbrace{\vec{b} \cdot \vec{c}}^{0} =$$

$$2 \cdot 4 + 1 + 2 \cdot 2 - 4 + 0 = 8 + 1 + 4 - 4 = 9$$

Dakle skalarni umnozak vektora $\vec{p}$ i $\vec{q}$ jednak je 9. Preostaje jos samo odrediti kut izmedju vektora $\vec{p}$ i $\vec{q}$, racunamo:

$$\cos\left[\angle\left(\vec{p}, \vec{q}\right)\right] = \frac{\overbrace{\vec{p} \cdot \vec{q}}^{9}}{\underbrace{\overset{4}{|\vec{p}|}}\underbrace{\overset{\sqrt{20}}{|\vec{q}|}}}$$

$$\cos\left[\angle\left(\vec{p}, \vec{q}\right)\right] = \frac{9}{4 \cdot \sqrt{20}} \ / \cos^{-1}$$

$$\angle\left(\vec{p}, \vec{q}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{9}{4\sqrt{20}}\right)$$

$$\angle\left(\vec{p}, \vec{q}\right) = 58^\circ 47' 37''$$

Dakle velicina vektora $\vec{p}$ jednaka je 4, velicina vektora $\vec{q}$ jednaka je $\sqrt{20}$, a velicina kuta $\angle\left(\vec{p}, \vec{q}\right)$ jednaka je $58^\circ 47' 37''$. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 15: (str. 36) Odredi kut izmedju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ako je $|\vec{a}| = 2\left|\vec{b}\right|$ te ako je vektor $2\vec{a} + \vec{b}$ okomit na vektor $\vec{a} - 3\vec{b}$.

Rjesenje: Prisjetimo se da kut izmedju dvaju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ racunamo prema izrazu:

$$\cos\left[\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right] = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|}$$

Da bismo rijesili zadatak ono sto trebamo napraviti jest pokusati prikazati skalarni produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ preko velicine vektora $\vec{a}$ ili velicine vektora $\vec{b}$. Naime primjetimo da je veza izmedju velicina vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vec dana u zadatku.

U tu svrhu prisjetimo se cinjenice da ako su vektori $\vec{u}$ i $\vec{v}$ okomiti tada je njihov skalarni produkt jendak 0. Imajuci to na umu u nasem slucaju mora vrijediti:

$$\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)=0$$

Rijesimo se zagrade mnozenjem svakog clana prve zagrade svakim clanom druge zagrade, slijedi:

$$2\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\left(-3\vec{b}\right)+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\left(-3\vec{b}\right)=0$$

$$2\vec{a}^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}-3\vec{b}^2=0$$

Prisjetimo se cinjenice da za neki vektor $\vec{v}$ vrijedi jednakost $\vec{v}^2=\vec{v}\cdot\vec{v}=|\vec{v}|^2$, sada jednakost poprima sljedeci oblik:

$$2\left|\vec{a}\right|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}-3\left|\vec{b}\right|^2=0$$

Nadalje prisjetimo se da vrijedi komutativnost skalarnog produkta vektora, odnosno $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$, slijedi:

$$2\left|\vec{a}\right|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+\overbrace{\vec{b}\cdot\vec{a}}^{\vec{a}\cdot\vec{b}}-3\left|\vec{b}\right|^2=0$$

$$2\left|\vec{a}\right|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}-3\left|\vec{b}\right|^2=0$$

$$2\left|\vec{a}\right|^2-5\vec{a}\cdot\vec{b}-3\left|\vec{b}\right|^2=0$$

Prisjetimo se nadalje da je u zadataku zadano da vrijedi:

$$|\vec{a}|=2\left|\vec{b}\right|$$

Kvadriramo cijelu jednakost, slijedi:

$$|\vec{a}|=2\left|\vec{b}\right|\ /^2$$

$$|\vec{a}|^2=\left(2\left|\vec{b}\right|\right)^2$$

Raspisemo desnu stranu jednakosti prema izrazu za mnozenje potencija istih eksponenata, odnosno prema $a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$, slijedi:

$$|\vec{a}|^2=2^2\left|\vec{b}\right|^2$$

$$|\vec{a}|^2=4\left|\vec{b}\right|^2$$

Primjenimo dobivenu jednakost na jednakost do koje smo dosli ranije, slijedi:

$$2\overbrace{|\vec{a}|^2}^{4|\vec{b}|^2} - 5\vec{a}\cdot\vec{b} - 3\left|\vec{b}\right|^2 = 0$$

$$2\cdot 4\left|\vec{b}\right|^2 - 5\vec{a}\cdot\vec{b} - 3\left|\vec{b}\right|^2 = 0$$

$$8\left|\vec{b}\right|^2 - 5\vec{a}\cdot\vec{b} - 3\left|\vec{b}\right|^2 = 0$$

$$5\left|\vec{b}\right|^2 - 5\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

Prebacimo izraz $5\vec{a}\cdot\vec{b}$ s lijeve na desnu stranu jednakosti, slijedi:

$$5\left|\vec{b}\right|^2 = 5\vec{a}\cdot\vec{b}$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{5}$, slijedi:

$$5\left|\vec{b}\right|^2 = 5\vec{a}\cdot\vec{b}\ /\cdot\frac{1}{5}$$

$$5\left|\vec{b}\right|^2\cdot\frac{1}{5} = 5\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\frac{1}{5}$$

Pokratimo sto se poktatiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^1\cancel{5}\left|\vec{b}\right|^2}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{5}_1} = \frac{{}^1\cancel{5}\vec{a}\cdot\vec{b}}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{5}}$$

$$\frac{\left|\vec{b}\right|^2}{1} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{1}$$

$$\left|\vec{b}\right|^2 = \vec{a}\cdot\vec{b}$$

Time smo skalarni produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ prikazali preko velicine vektora $\vec{b}$. Preostaje jos samo odrediti kut izmedju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, racunamo:

$$\cos\left[\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right] = \frac{\overbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}^{|\vec{b}|^2}}{\underbrace{|\vec{a}|}_{2|\vec{b}|}\left|\vec{b}\right|}$$

$$\cos\left[\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right] = \frac{\left|\vec{b}\right|^2}{2\left|\vec{b}\right|\left|\vec{b}\right|}$$

$$\cos\left[\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right]=\frac{\left|\vec{b}\right|^2}{2\left|\vec{b}\right|^2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\cos\left[\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right]=\frac{{}^{1}\cancel{\left|\vec{b}\right|^2}}{2\cancel{\left|\vec{b}\right|^2}_{1}}$$

$$\cos\left[\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right]=\frac{1}{2}\ /\cos^{-1}$$

$$\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=60^\circ$$

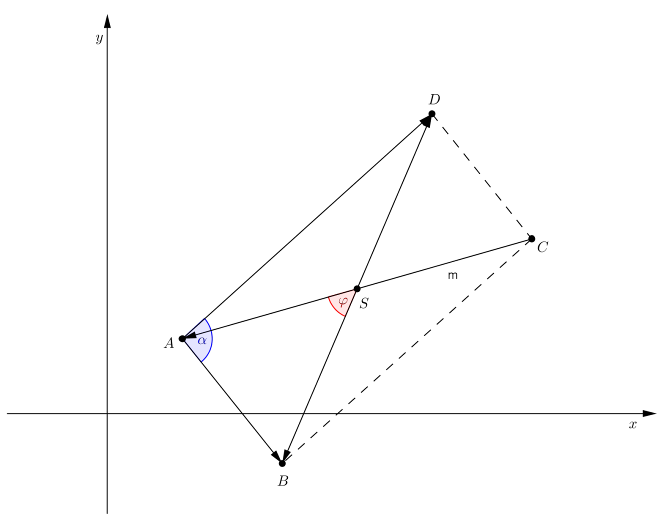
Dakle kut izmedju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednak je 60°. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 21: (str. 36) Dva su uzastopna vrha paralelograma $ABCD$ tocke $A\,(3,3)$ i $B\,(7,-2)$. Tocka $S\,(10,5)$ sjeciste je dijagonala paralelograma.

1) Koliki kut zatvaraju dijagonale paralelograma?

2) Koliki su unutarnji kutovi paralelograma paralelograma?

Rjesenje: Prije svega promotrimo sliku:



Promatrajuci sliku dolazim do zakljucka da za pocetak moram odrediti kut izmedju vektora $\overrightarrow{SA}$ i $\overrightarrow{SB}$, jer je to zapravo kut izmjedju dijagonala. Da bih to mogao uciniti prvo moram odrediti kako ti vektori izgledaju. Prisjetim se da vektor kojem su zadane pocetna tocka $T_1\left(x_1, y_1\right)$ i zavrsna tocka $T_2\left(x_2, y_2\right)$:

$$\overrightarrow{T_1T_2} = \left(x_2 - x_1\right)\vec{i} + \left(y_2 - y_1\right)\vec{j}$$

Imajuci to na umu odredim vektore $\overrightarrow{SA}$ i $\overrightarrow{SB}$. Prvo cemo odrediti oblik vektora $\overrightarrow{SA}$, slijedi:

$$\overrightarrow{SA} = \left(x_A - x_S\right)\vec{i} + \left(y_A - y_S\right)\vec{j}$$

$$\overrightarrow{SA} = (3 - 10)\vec{i} + (3 - 5)\vec{j}$$

$$\overrightarrow{SA} = -7\vec{i} + (-2)\vec{j}$$

$$\overrightarrow{SA} = -7\vec{i} - 2\vec{j}$$

Nadalje odredjujemo oblik vektora $\overrightarrow{SB}$, slijedi:

$$\overrightarrow{SA} = \left(x_B - x_S\right)\vec{i} + \left(y_B - y_S\right)\vec{j}$$

$$\overrightarrow{SA} = (7 - 10)\vec{i} + (-2 - 5)\vec{j}$$

$$\overrightarrow{SA} = -3\vec{i} + (-7)\vec{j}$$

$$\overrightarrow{SA} = -3\vec{i} - 7\vec{j}$$

Prisjetimo se da kut izmedju dvaju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ racunamo prema izrazu:

$$\cos\left[\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right] = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|}$$

Dakle vrijedi:

$$\cos\left[\angle\left(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}\right)\right] = \frac{\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SA}}{\left|\overrightarrow{SA}\right|\left|\overrightarrow{SB}\right|}$$

$$\cos\left[\angle\left(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}\right)\right] = \frac{\left(-7\vec{i} - 2\vec{j}\right) \cdot \left(-3\vec{i} - 7\vec{j}\right)}{\left|-7\vec{i} - 2\vec{j}\right|\left|-3\vec{i} - 7\vec{j}\right|}$$

Nadalje prisjetimo se da skalarno mnozenje dvaju vektora oblika $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ i $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}$ provodimo pomocu jednakosti $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_xb_x + a_yb_y$, dok njihovu velicinu racunamo prema izrazu $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$, slijedi:

$$\cos\left[\angle\left(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}\right)\right] = \frac{-7 \cdot (-3) + \cdot (-2) \cdot (-7)}{\sqrt{(-7)^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + (-7)^2}}$$

$$\cos\left[\angle\left(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right)\right]=\frac{21+14}{\sqrt{49+4}\cdot\sqrt{9+49}}$$

$$\cos\left[\angle\left(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right)\right]=\frac{35}{\sqrt{53}\cdot\sqrt{58}}$$

$$\cos\left[\angle\left(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right)\right]=0.631\ /\cos^{-1}$$

$$\angle\left(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right)=\cos^{-1}0.631$$

$$\angle\left(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right)=50^\circ 51' 22''$$

Dakle kut izmedju dijagonala iznosi $50^\circ 51' 22''$. Time je prvi dio zadatka rjesen.

Preostaje odrediti unutranje kutove paralelograma. Za to nam trebaju vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$. Vektoru $\overrightarrow{AB}$ poznate se i pocetna i krajnja tocka, dok za vektor $\overrightarrow{AD}$ nedostaju koordinate tocke D. Odredimo prvo vektor $\overrightarrow{AB}$ prema izrazu prema kojem smo odredili i vektore $\overrightarrow{SA}$ i $\overrightarrow{SB}$, racunamo:

$$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A)\,\vec{i}+(y_B-y_A)\,\vec{j}$$

$$\overrightarrow{AB}=(7-3)\,\vec{i}+(-2-3)\,\vec{j}$$

$$\overrightarrow{AB}=4\vec{i}+(-5)\,\vec{j}$$

$$\overrightarrow{AB}=4\vec{i}-5\vec{j}$$

Nadalje odredimo vektor $\overrightarrow{AD}$. Umjesto racunanja koordinata tocke D, promotrimo sliku te pokusajmo vektor $\overrightarrow{AD}$ prikazati pomocu vektora koje smo dosada vec odredili, uocimo da mora vrijediti:

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$$

No kako tocka S raspolavlja dijagonale vrijedi $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BS}$, slijedi:

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overbrace{\overrightarrow{BD}}^{2\overrightarrow{BS}}$$

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BS}$$

Vektori $\overrightarrow{SB}$ i $\overrightarrow{BS}$ su suprotni, dakle mora vrijedi $\overrightarrow{BS}=-\overrightarrow{SB}$, slijedi:

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+2\,\overbrace{\overrightarrow{BS}}^{-\overrightarrow{SB}}$$

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+2\left(-\overrightarrow{SB}\right)$$

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{SB}$$

Uvrstimo prije odredjene vektore u dobivenu jednakost, slijedi:

$$\overrightarrow{AD} = \overbrace{\overrightarrow{AB}}^{4\vec{i}-5\vec{j}} -2 \overbrace{\overrightarrow{SB}}^{-3\vec{i}-7\vec{j}}$$

$$\overrightarrow{AD} = 4\vec{i} - 5\vec{j} - 2\left(-3\vec{i} - 7\vec{j}\right)$$

$$\overrightarrow{AD} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + 6\vec{i} + 14\vec{j}$$

$$\overrightarrow{AD} = 10\vec{i} + 9\vec{j}$$

Preostaje odrediti kut izmedju vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$. Prisjetimo se da kut izmedju dvaju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ racunamo prema izrazu:

$$\cos\left[\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right] = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|}$$

Dakle vrijedi:

$$\cos\left[\angle\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\right] = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|}$$

$$\cos\left[\angle\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\right] = \frac{\left(4\vec{i}-5\vec{j}\right)\cdot\left(10\vec{i}+9\vec{j}\right)}{\left|4\vec{i}-5\vec{j}\right|\left|10\vec{i}+9\vec{j}\right|}$$

Nadalje prisjetimo se da skalarno mnozenje dvaju vektora oblika $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ i $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}$ provodimo pomocu jednakosti $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y$, dok njihovu velicinu racunamo prema izrazu $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$, slijedi:

$$\cos\left[\angle\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\right] = \frac{4\cdot 10 + \cdot(-5)\cdot 9}{\sqrt{4^2+(-5)^2}\cdot\sqrt{10^2+9^2}}$$

$$\cos\left[\angle\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\right] = \frac{40-45}{\sqrt{16+25}\cdot\sqrt{100+81}}$$

$$\cos\left[\angle\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\right] = \frac{-5}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{181}}$$

$$\cos\left[\angle\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\right] = -0.058 \;/\cos^{-1}$$

$$\angle\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right) = \cos^{-1} -0.058$$

$$\angle\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right) = 93°19'39''$$

Prisjetimo se da je zbroj dvaju susjednih unutrajih kutova paralelograma jednak 180°, odnosno da mora vrijedi:

$$\overbrace{\angle\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)}^{93^\circ 19' 39''} + \angle\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) = 180^\circ$$

$$93^\circ 19' 39'' + \angle\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) = 180^\circ$$

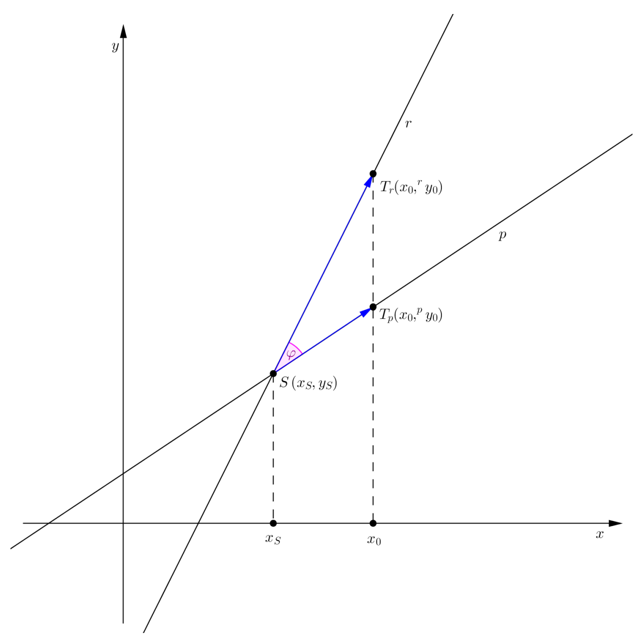
$$\angle\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) = 180^\circ - 93^\circ 19' 39''$$

$$\angle\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) = 86^\circ 40' 21''$$

Dakle unutrarnji kutovi danog paralelograma iznose $93^\circ 19' 39''$ i $86^\circ 40' 21''$. Time je i drugi dio zadatka rjesen.

Zadatak 21: (str. 36) 3) Koliki je kut izmedju pravaca $2x - 3y + 3 = 0$ i $2x - y - 3 = 0$?

Rjesenje: Prije svega promotrimo sliku:



Neka je:

$$p \text{ ... } 2x - 3y + 3 = 0$$

$$r \text{ ... } 2x - y - 3 = 0$$

Dakle odredit cemo sjeciste danih pravaca. Nakon toga odrediti cemo na svakom pravcu po jednu tocku koja se nalazi desno od sjecista. Neka su to tocke T_p i T_r. Tada je kut izmedju pravaca p i r zaparvo jednak kutu izmedju vektora $\overrightarrow{ST_p}$ i $\overrightarrow{ST_r}$.

Odredimo za pocetak koordinate sjecista danih dvaju pravaca. Rjesavamo sustav jednadzbi:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 3 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

Oduzmimo dane jednadzbe, slijedi:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 3 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases} \quad /-$$

$$2x - 3y + 3 - (2x - y - 3) = 0 - 0$$

$$2x - 3y + 3 - 2x + y + 3 = 0$$

$$-2y + 6 = 0$$

Prabacimo broj 6 s lijeve na desnu stranu jednakosti, slijedi:

$$-2y = -6$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\dfrac{1}{-2}$, slijedi:

$$-2y = -6 \ / \cdot \frac{1}{-2}$$

$$-2y \cdot \frac{1}{-2} = -6 \cdot \frac{1}{-2}$$

Pokratim sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{-2}y}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{-2}} = \frac{{}^{3}\cancel{-6}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{-2}_1}$$

$$\frac{y}{1} = \frac{3}{1}$$

$$y = 3$$

Uvrstimo vrijednost y u prvu jednadzbu, slijedi:

$$2x - 3\overbrace{y}^{3} + 3 = 0$$

$$2x - 3 \cdot 3 + 3 = 0$$

$$2x - 9 + 3 = 0$$

$$2x - 6 = 0$$

Prabacimo broj 6 s lijeve na desnu stranu jednakosti, slijedi:

$$2x = 6$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{2}$, slijedi:

$$2x = 6 \ / \cdot \frac{1}{2}$$

$$2x \cdot \frac{1}{2} = 6 \cdot \frac{1}{2}$$

Pokratim sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{2}x}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{{}^{3}\cancel{6}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_{1}}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{3}{1}$$

$$x = 3$$

Dakle sjeciste ima koordinate $S\,(3,3)$. Odredimo sada tocke koje se nalaze na pravcima p i r, a cije su x koordinate recimo jednake 6. Odredimo prvo y koordinatu tocke $T_p\,(6, p_0^y)$. Kako ta tocka lezi na pravcu p, njezine koordinate moraju zadovoljavati jednadzbu pravca p, dakle mora vrijediti:

$$2\overbrace{x}^{6} - 3\overbrace{y}^{{}^{p}y_0} + 3 = 0$$

$$2 \cdot 6 - 3^{p}y_0 + 3 = 0$$

$$12 - 3^{p}y_0 + 3 = 0$$

$$15 - 3^{p}y_0 = 0$$

Prabacimo broj 15 s lijeve na desnu stranu jednakosti, slijedi:

$$-3^{p}y_0 = -15$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{-3}$, slijedi:

$$-3^{p}y_0 = -15 \ / \cdot \frac{1}{-3}$$

$$-3^{p}y_0 \cdot \frac{1}{-3} = -15 \cdot \frac{1}{-3}$$

Pokratim sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{-3}^{p}y_0}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{-3}} = \frac{{}^{5}\cancel{-15}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{-3}_{1}}$$

$$\frac{{}^{p}y_0}{1} = \frac{5}{1}$$
$${}^{p}y_0 = 5$$

Dakle tocka T_p ima koordinate $T_p\,(6,5)$.
Slican postupak provodim i za tocku T_r. Odredimo y koordinatu tocke $T_r\,(6, r_0^y)$. Kako ta tocka lezi na pravcu r, njezine koordinate moraju zadovoljavati jednadzbu pravca r, dakle mora vrijediti:

$$2\overbrace{x}^{6} - \overbrace{y}^{{}^{r}y_0} - 3 = 0$$

$$2 \cdot 6 -^{r} y_0 - 3 = 0$$

$$12 -^{r} y_0 - 3 = 0$$

$$9 -^{r} y_0 = 0$$

Prabacimo broj 9 s lijeve na desnu stranu jednakosti, slijedi:

$$-^{r}y_0 = -9$$

Pomnozimo cijelu jednakost s -1, slijedi:

$$-^{r}y_0 = -9 \;/ \cdot (-1)$$

$$-^{r}y_0 \cdot (-1) = -9 \cdot (-1)$$

$${}^{r}y_0 = 9$$

Dakle tocka T_r ima koordinate $T_p\,(6,9)$.
Nadalje potrebno je odrediti vektore $\overrightarrow{ST_p}$ i $\overrightarrow{ST_r}$. Prisjetim se da vektor kojem su zadane pocetna tocka $T_1\,(x_1, y_1)$ i zavrsna tocka $T_2\,(x_2, y_2)$:

$$\overrightarrow{T_1T_2} = (x_2 - x_1)\,\vec{i} + (y_2 - y_1)\,\vec{j}$$

Imajuci to na umu odredim vektore $\overrightarrow{ST_p}$ i $\overrightarrow{ST_r}$. Prvo cemo odreidti oblik vektora $\overrightarrow{ST_p}$, slijedi:

$$\overrightarrow{ST_p} = \left(x_{T_p} - x_S\right)\vec{i} + \left(y_{T_p} - y_S\right)\vec{j}$$
$$\overrightarrow{ST_p} = (6-3)\,\vec{i} + (5-3)\,\vec{j}$$
$$\overrightarrow{ST_p} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$$

Nadalje odredjujemo oblik vektora $\overrightarrow{ST_r}$, slijedi:

$$\overrightarrow{ST_r} = (x_{T_r} - x_S)\,\vec{i} + (y_{T_r} - y_S)\,\vec{j}$$

$$\overrightarrow{ST_r} = (6-3)\,\vec{i} + (9-3)\,\vec{j}$$

$$\overrightarrow{ST_r} = 3\vec{i} + 6\vec{j}$$

Preostaje jos samo odrediti kut izmedju vektora $\overrightarrow{ST_p}$ i $\overrightarrow{ST_r}$. Prisjetimo se da kut izmedju dvaju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ racunamo prema izrazu:

$$\cos\left[\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right]=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|}$$

Dakle vrijedi:

$$\cos\left[\angle\left(\overrightarrow{ST_p},\overrightarrow{ST_p}\right)\right]=\frac{\overrightarrow{ST_p}\cdot\overrightarrow{ST_r}}{\left|\overrightarrow{ST_p}\right|\left|\overrightarrow{ST_r}\right|}$$

$$\cos\left[\angle\left(\overrightarrow{ST_p},\overrightarrow{ST_r}\right)\right]=\frac{\left(3\vec{i}+2\vec{j}\right)\cdot\left(3\vec{i}+6\vec{j}\right)}{\left|3\vec{i}+2\vec{j}\right|\left|3\vec{i}+6\vec{j}\right|}$$

Nadalje prisjetimo se da skalarno mnozenje dvaju vektora oblika $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}$ i $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}$ provodimo pomocu jednakosti $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y$, dok njihovu velicinu racunamo prema izrazu $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$, slijedi:

$$\cos\left[\angle\left(\overrightarrow{ST_p},\overrightarrow{ST_r}\right)\right]=\frac{3\cdot 3+\cdot 2\cdot 6}{\sqrt{3^2+2^2}\cdot\sqrt{3^2+6^2}}$$

$$\cos\left[\angle\left(\overrightarrow{ST_p},\overrightarrow{ST_r}\right)\right]=\frac{9+12}{\sqrt{9+4}\cdot\sqrt{9+36}}$$

$$\cos\left[\angle\left(\overrightarrow{ST_p},\overrightarrow{ST_r}\right)\right]=\frac{21}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{45}}$$

$$\cos\left[\angle\left(\overrightarrow{ST_p},\overrightarrow{ST_r}\right)\right]=0.868\ /\cos^{-1}$$

$$\angle\left(\overrightarrow{ST_p},\overrightarrow{ST_r}\right)=\cos^{-1}0.868$$

$$\angle\left(\overrightarrow{ST_p},\overrightarrow{ST_r}\right)=29^\circ 44' 42''$$

Dakle kut kojeg zatvaraju pravci p i r iznosi $29^\circ 44' 42''$. Time je zadatak rjesen.

☙ ✧ ❧

⌘ Zadatak 31: (str. 37) Ako za vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$, $\vec{a}\neq 0$, $\vec{b}\neq 0$ vrijedi $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$, ti su vektori okomiti. Dokazi!

Rjesenje: Krenimo od jednakosti koja je dana u zadatku, dakle od:

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$$

Kvadriramo cijelu jednakost, slijedi:

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\vec{a}-\vec{b}\right| \ /^2$$

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2$$

Prisjetimo se cinjenice da za neki vektor $\vec{v}$ vrijedi jednakost:

$$\vec{v}^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{v}|^2$$

Imajuci to na umu jednakost poprima sljedeci oblik:

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$$

Rijesimo se zagrada na obijema stanama mnozeci svaki clan prve zagrade sa svakim clanom druge zagrade, slijedi:

$$\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\left(-\vec{b}\right)+\left(-\vec{b}\right)\cdot\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)\cdot\left(-\vec{b}\right)$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$$

Pokratimo istovjetne izraze na lijevoj idesnoj strani jednakosti, slijedi:

$$\cancel{\vec{a}\cdot\vec{a}}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\cancel{\vec{b}\cdot\vec{b}} = \cancel{\vec{a}\cdot\vec{a}}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}+\cancel{\vec{b}\cdot\vec{b}}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a} = -\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}$$

Prisjetimo se da vrijedi komutativnost skalarnog produkta vektora, odnosno $\vec{v}\cdot\vec{u} = \vec{u}\cdot\vec{v}$, slijedi:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\overbrace{\vec{b}\cdot\vec{a}}^{\vec{a}\cdot\vec{b}} = -\vec{a}\cdot\vec{b}-\overbrace{\vec{b}\cdot\vec{a}}^{\vec{a}\cdot\vec{b}}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b} = -\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}$$

Prebacimo sve izraze s desne strane jednakosti na live, slijedi:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

$$4\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{4}$, slijedi:

$$4\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \ /\cdot\frac{1}{4}$$

$$4\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\frac{1}{4} = 0\cdot\frac{1}{4}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{4}\vec{a}\cdot\vec{b}}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{4}_{1}}=0$$

$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{1}=0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

Dakle ako vrijedi jednakost koja je zadana u zadatku tada je skalarni umnozak vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednak 0. No ako je skalarni produkt nekih vektora jednak nuli tada su oni nuzno medjusovno okomiti. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 32: (str. 37) Kut izmedju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ iznosi $120°$. Ako je $|\vec{a}|=2\left|\vec{b}\right|$, te ako je vektor $\vec{a}+k\vec{b}$ okomit na vektor $\vec{a}-\vec{b}$, koliki je k?

Rjesenje: Krenimo od cinjenice da je skalarni umnozak okomitih vektora jednak 0, dakle mora vrijediti:

$$\left(\vec{a}+k\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$$

Rijesimo se zagrada na lijevoj strani jednakosti tako da pomnozim svaki clan prve zagrade sa svakim clanom druge zagrade, slijedi:

$$\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\left(-\vec{b}\right)+k\vec{b}\cdot\vec{a}+k\vec{b}\cdot\left(-\vec{b}\right)=0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+k\vec{b}\cdot\vec{a}-k\vec{b}\cdot\vec{b}=0$$

Prisjetimo se cinjenice da za neki vektor $\vec{v}$ vrijedi jednakost:

$$\vec{v}^{2}=\vec{v}\cdot\vec{v}=|\vec{v}|^{2}$$

Imajuci to na umu jednakost poprima sljedeci oblik:

$$|\vec{a}|^{2}-\vec{a}\cdot\vec{b}+k\vec{b}\cdot\vec{a}-k\left|\vec{b}\right|^{2}=0$$

Nadalje prisjetimo se da vrijedi komutativnost skalarnog produkta vektora, odnosno $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$, slijedi:

$$|\vec{a}|^{2}-\vec{a}\cdot\vec{b}+k\overbrace{\vec{b}\cdot\vec{a}}^{\vec{a}\cdot\vec{b}}-k\left|\vec{b}\right|^{2}=0$$

$$|\vec{a}|^{2}-\vec{a}\cdot\vec{b}+k\vec{a}\cdot\vec{b}-k\left|\vec{b}\right|^{2}=0$$

Izlucimo $\vec{a} \cdot \vec{b}$ iz druga dva clana sume, slijedi:

$$|\vec{a}|^2 + (-1+k)\,\vec{a} \cdot \vec{b} - k\left|\vec{b}\right|^2 = 0$$

Nadalje prisjetimo se da skalarni produkt dvaju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kojima znam velicine i kut koji medjusobno zatvaraju racunamo prema izrazu $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos\left[\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right]$. Dalje racunam:

$$|\vec{a}|^2 + (-1+k)\,|\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos 120^\circ - k\left|\vec{b}\right|^2 = 0$$

Primjenimo cinjenicu da vrijedi $|\vec{a}| = 2\left|\vec{b}\right|$ danu u zadatku, slijedi:

$$\underbrace{|\vec{a}|}_{2|\vec{b}|}{}^2 + (-1+k)\underbrace{|\vec{a}|}_{2|\vec{b}|}\left|\vec{b}\right| \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - k\left|\vec{b}\right|^2 = 0$$

$$\left(2\left|\vec{b}\right|\right)^2 + (-1+k)\,2\left|\vec{b}\right|\left|\vec{b}\right| \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - k\left|\vec{b}\right|^2 = 0$$

Prvi clan sume raspisemo prema izrazu za mnozenje potencija istih eksponenata, odnosno prema $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$. Takodjer pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$2^2\left|\vec{b}\right|^2 + (-1+k) \cdot \frac{\cancel{2}^{1}}{1} \cdot \left|\vec{b}\right|\left|\vec{b}\right| \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{2}_1}\right) - k\left|\vec{b}\right|^2 = 0$$

$$4\left|\vec{b}\right|^2 + (-1+k) \cdot \frac{1}{1} \cdot \left|\vec{b}\right|^2 \cdot \left(-\frac{1}{1}\right) - k\left|\vec{b}\right|^2 = 0$$

$$4\left|\vec{b}\right|^2 - (-1+k)\left|\vec{b}\right|^2 - k\left|\vec{b}\right|^2 = 0$$

Izlucimo $\left|\vec{b}\right|^2$ iz svih clanova sume, slijedi:

$$\left|\vec{b}\right|^2 (4 - (-1+k) - k) = 0$$

$$\left|\vec{b}\right|^2 (4 + 1 - k - k) = 0$$

$$\left|\vec{b}\right|^2 (5 - 2k) = 0$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\dfrac{1}{\left|\vec{b}\right|^2}$, slijedi:

$$\left|\vec{b}\right|^2 (5 - 2k) = 0 \;/ \cdot \frac{1}{\left|\vec{b}\right|^2}$$

$$\left|\vec{b}\right|^2 (5-2k) \cdot \frac{1}{\left|\vec{b}\right|^2} = 0 \cdot \frac{1}{\left|\vec{b}\right|^2}$$

Pokratimo sto se pokaratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^1\cancel{\left|\vec{b}\right|^2}(5-2k)}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{\left|\vec{b}\right|^2}_1} = 0$$

$$\frac{5-2k}{1} = 0$$

$$5-2k = 0$$

Prebacimo broj 5 s lijeve na desnu stranu jednakosti, slijedi:

$$-2k = -5$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{-2}$, slijedi:

$$-2k = -5 \;/ \cdot \frac{1}{-2}$$

$$-2k \cdot \frac{1}{-2} = -5 \cdot \frac{1}{-2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^1\cancel{-2}k}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{-2}_1} = \frac{\cancel{-}5}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{-}2}$$

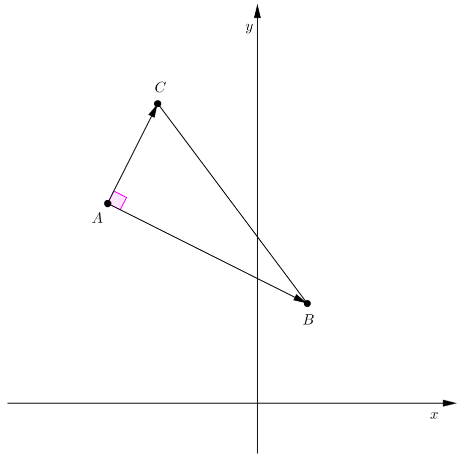
$$\frac{k}{1} = \frac{5}{2}$$

$$k = \frac{5}{2}$$

Dakle da bi uvjet iz zadatka bio zadovoljen k mora biti jednak $\frac{5}{2}$. Time je zadatak rjesen.

Zadatak 41: (str. 37) Trokut s vrhovima $A(-3,4)$, $B(1,2)$ i $C(-2,6)$ je pravokutan. Primjenom skalarnog umnoska provjeri ovu tvrdnju.

Rjesenje: Prije svega promotrimo sliku:



Iz slike mozemo uociti da bi pravi kut trebao biti kod vrha A. Sto znaci da cemo mi pokazati da je skalarni umnozak vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ jednak nuli sto povlaci da su oni medjusobno okomiti, a to pak onda znaci da trokut $\triangle ABC$ zaista jest pravokutan.
Prisjetim se da vektor kojem su zadane pocetna tocka $T_1\,(x_1, y_1)$ i zavrsna tocka $T_2\,(x_2, y_2)$:

$$\overrightarrow{T_1T_2} = (x_2 - x_1)\,\vec{i} + (y_2 - y_1)\,\vec{j}$$

Imajuci to na umu odredim vektore $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$. Prvo cemo odreidti oblik vektora $\overrightarrow{AB}$, slijedi:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\,\vec{i} + (y_B - y_A)\,\vec{j}$$

$$\overrightarrow{AB} = (1 - (-3))\,\vec{i} + (2 - 4)\,\vec{j}$$

$$\overrightarrow{AB} = (1 + 3)\,\vec{i} + (-2)\,\vec{j}$$

$$\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$$

Nadalje odredjujemo oblik vektora $\overrightarrow{ST_r}$, slijedi:

$$\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A)\,\vec{i} + (y_C - y_A)\,\vec{j}$$

$$\overrightarrow{AC} = (-2 - (-3))\,\vec{i} + (6 - 4)\,\vec{j}$$

$$\overrightarrow{AC} = (-2 + 3)\,\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{i} + 2\vec{j}$$

Preostaje jos samo provjeriti da je skalarni umnozak vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ zaista jednak 0. Racunamo:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(4\vec{i} - 2\vec{j}\right)\left(\vec{i} + 2\vec{j}\right) = (\star)$$

Nadalje prisjetimo se da skalarno mnozenje dvaju vektora oblika $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ i $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}$ provodimo pomocu jednakosti $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$, slijedi:

$$(\star) = 4 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 = 4 - 4 = 0$$

Dakle vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ su zaista okomiti posto im je skalarni produkt jednak nuli, sto znaci da je trokut $\triangle ABC$ pravokutan. Time je zadatak rjesen.