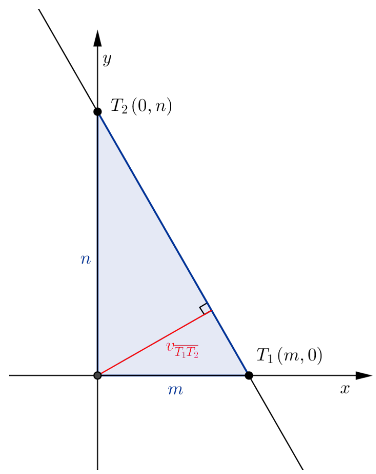
8.2 Segmentni oblik jednadzbe pravca

Zadatak 6: (str. 57) Kolika je udaljenost pravca $\frac{x}{6} - \frac{y}{8} = 1$ od ishodista koordinatnog sustava.

Rjesenje: Prije samog racuna probajmo sa skice zakljuciti sto zapravo trebamo racunati. Bez smanjenja opcenitosti mozemo zakljuciti da graf danog pravca sijece obje osi na pozitivnom dijelu:



Dakle mozemo zakljuciti da je nas zadatak zapravo odrediti visinu na stranicu koja je zapravo odsjecak pravca medju koordinatnim osima u trokutu sto ga cine koordinatne osi i dani pravac. Nadalje mozemo uociti da je jednadzba pravca dana u segmentnom obliku sto zapravo znaci da lako mozemo odrediti, duljine svih stranica trokuta sa slike. Vrijedi:

$$\frac{x}{6} - \frac{y}{8} = 1$$

$$\frac{x}{6} + \left(-\frac{y}{8}\right) = 1$$

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{-8} = 1$$

Dakle kako znamo da opcenito jednadzba pravca u segmentnom obliku izgleda kao:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$

pri cemu je m duljina dijela osi x od ishodista do sjecista pravca s osi x, dok je n duljina dijela osi y od ishodista do sjecista pravca s osi y (vidi sliku!). Ta nas navodi da mora vrijediti:

$$m = 6$$

$$n = -8$$

Nadalje mozemo uociti da je dobiven trokut zapravo pravokutan te da njegovu povrsinu izmedju ostaloga mozemo odrediti na sljedeca dva nacina:

$$P_\Delta = \frac{|m \cdot n|}{2}$$

$$P_\Delta = \frac{\left|\overline{T_1T_2}\right| \cdot v_{\overline{T_1T_2}}}{2}$$

Odredimo prvo cemu je jednako $\left|\overline{T_1T_2}\right|$, naime posto je trokut u pitanju pravokutan vrijedi:

$$\left|\overline{T_1T_2}\right|^2 = m^2 + n^2$$

$$\left|\overline{T_1T_2}\right|^2 = 6^2 + (-8)^2 = 36 + 64$$

$$\left|\overline{T_1T_2}\right|^2 = 100 \ /\sqrt{\ }$$

$$\sqrt{\left|\overline{T_1T_2}\right|^2} = \sqrt{100}$$

$$\left|\overline{T_1T_2}\right| = 10$$

Izjednacimo sada gore navedene izraze za povrsine trokuta:

$$\frac{|m \cdot n|}{2} = \frac{\left|\overline{T_1T_2}\right| \cdot v_{\overline{T_1T_2}}}{2}$$

$$\frac{|6 \cdot (-8)|}{2} = \frac{10 \cdot v_{\overline{T_1T_2}}}{2} \ / \cdot 2$$

$$\frac{|-48|}{{}_1\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}^1}{1} = \frac{10 \cdot v_{\overline{T_1T_2}}}{{}_1\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}^1}{1}$$

$$48 = 10 \cdot v_{\overline{T_1T_2}} \ / \cdot \frac{1}{10}$$

$$48 \cdot \frac{1}{10} = {}^1\cancel{10} \cdot v_{\overline{T_1T_2}} \cdot \frac{1}{\cancel{10}_1}$$

$$v_{\overline{T_1T_2}} = \frac{48}{10}$$

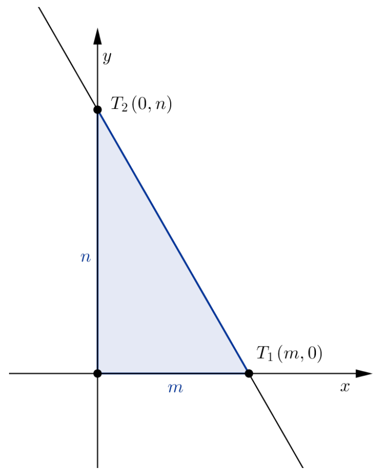
$$v_{\overline{T_1T_2}} = 4.8$$

Dakle udaljenost pravca do ishodista jednaka je 4.8 jedinicnih duzina, time je zadatak rijesen.

⋆

Zadatak 8: (str. 57) Odredi realan broj k tako da duljina odsjecka pravca $2x + ky + 2k = 0$ izmedju koordinatnih osi bude jednaka $\frac{5}{2}$.

Rjesenje: Prije samog racuna probajmo sa skice zakljuciti sto zapravo trebamo racunati. Bez smanjenja opcenitosti mozemo zakljuciti da graf danog pravca sijece obje osi na pozitivnom dijelu:



Dakle ono sto mi moramo odrediti jest k takav da vrijedi:

$$m^2+n^2=\left|\overline{T_1T_2}\right|^2$$

pri cemu znamo da vrijedi $\left|\overline{T_1T_2}\right|=\frac{5}{2}$. Preostaje jos odrediti cemu su jednaki m i n no to cemo uciniti tako da danu jednadzbu pravca iz implicitnog oblika prebacimo u segmentni oblik. To cemo uciniti tako da varijable x i y ostavimo na lijevoj strani dok ostatak prebacimo na desnu stranu te nakon toga cijelu jednadzbu podijelimo s izrazom na desnoj strani. Racunam:

$$2x+ky+2k=0$$

$$2x+ky=-2k\ /\cdot\frac{1}{-2k}$$

$$\frac{{}^{1}\cancel{2}x}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{-2}_{-1}k}+\frac{{}^{1}\cancel{k}y}{1}\cdot\frac{1}{-2\cancel{k}_{1}}=\frac{{}^{1}\cancel{-2k}}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{-2k}_{1}}$$

$$\frac{x}{-k}+\frac{y}{-2}=1$$

Dakle kako znamo da opcenito jednadzba pravca u segmentnom obliku izgleda kao:

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$$

pri cemu je m duljina dijela osi x od ishodista do sjecista pravca s osi x, dok je n duljina dijela osi y od ishodista do sjecista pravca s osi y (vidi sliku!). Ta nas navodi da mora vrijediti:

$$m=-k$$

$$n=-2$$

Uvrstimo sada sve sto znamo u izraz $m^2 + n^2 = \left|\overline{T_1T_2}\right|^2$ da bismo dobili k. Racunam:

$$\underbrace{m}_{-k}{}^2 + \underbrace{n}_{-2}{}^2 = \underbrace{\left|\overline{T_1T_2}\right|}_{\frac{5}{2}}{}^2$$

$$(-k)^2 + (-2)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$k^2 + 4 = \frac{25}{4} \; / \cdot 4$$

$$4 \cdot k^2 + 4 \cdot 4 = \frac{25}{{}_1\cancel{4}} \cdot \frac{{}^1\cancel{4}}{1}$$

$$k^2 + 16 = 25$$

$$k^2 = 25 - 16 = 9$$

$$k^2 = 9 \; / \sqrt{\ }$$

$$\sqrt{k^2} = \sqrt{9}$$

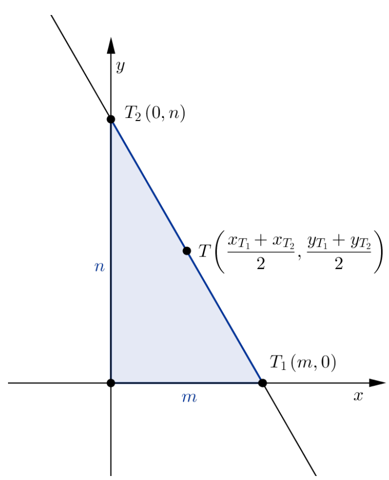
$$\pm k = 3$$

Dakle dobili smo dva rijesenja $k_1 = -3$ i $k_2 = 3$ i time je zadatak rijesen.

⋆

Zadatak 9: (str. 57) Tockom $(3, -1)$ polozi pravac tako da T bude poloviste odsjecka sto ga na pravcu odsijecaju koordinatne osi.

Rjesenje: Prije samog racuna probajmo sa skice zakljuciti sto zapravo trebamo racunati. Bez smanjenja opcenitosti mozemo zakljuciti da graf danog pravca sijece obje osi na pozitivnom dijelu:



Dakle kako znamo da tocka T mora biti poloviste duzine $\overline{T_1T_2}$ mora vrijediti:

$$x_T = \frac{x_{T_1} + x_{T_2}}{2}$$

$$y_T = \frac{y_{T_1} + y_{T_2}}{2}$$

Uvrstimo li x i y koordinate tocaka $T_1(\overbrace{m}^{x_{T_1}}, \overbrace{0}^{y_{T_1}})$, $T_2(\overbrace{0}^{x_{T_2}}, \overbrace{n}^{y_{T_2}})$ i $T(\overbrace{3}^{x_T}, \overbrace{-1}^{y_T})$ u gornje izraze dobivamo:

$$3 = \frac{m+0}{2}$$

$$-1 = \frac{0+n}{2}$$

Rijesim se razlomaka mnozenjem oba izraza s 2:

$$3 = \frac{m}{2} \ / \cdot 2$$

$$-1 = \frac{n}{2} \ / \cdot 2$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$3 \cdot 2 = \frac{m}{{}_1\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}^1}{1}$$

$$-1 \cdot 2 = \frac{n}{{}_1\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}^1}{1}$$

$$6 = m$$

$$-2 = n$$

Prisjetim se da su m i n upravo izrazi iz segmentnog oblika jednadzbe pravca odnosno ako su tocke T_1 i T_2 dane kao na slici tada pravac koji prolazi tim dvjema tockama ima oblik:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$

Dakle trazeni pravac jest:

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{-2} = 1$$

Mnozenjem izraza sa 6 mozemo doci do implicitnog oblika dane jednadzbe pravca:

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{-2} = 1 \ / \cdot 6$$

$$\frac{x}{{}_1\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{6}^1}{1} + \frac{y}{{}_{-1}\cancel{-2}} \cdot \frac{\cancel{6}^3}{1} = 1 \cdot 6$$

$$x - 3y = 6$$

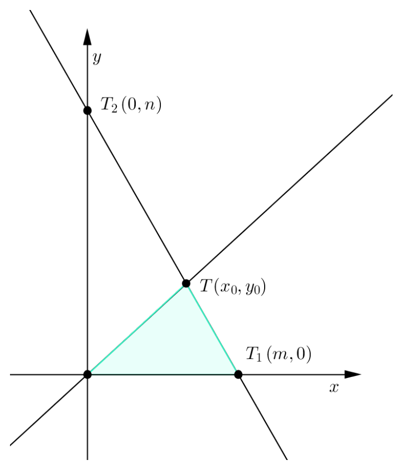
$$x - 3y - 6 = 0$$

Dakle trazena jednadzba pravca u implicitnom obliku jest $x - 3y - 6 = 0$. Time je zadatak rijesen.

⋆

Zadatak 14: (str. 57) Ishodistem kooordinatnog sustava polozi pravac koji ce s pravcem $3x - 4y + 18 = 0$ i osi apscisa zatvarati trokut povrsine 9.

Rjesenje: Prije samog racuna probajmo sa skice zakljuciti sto zapravo trebamo racunati. Bez smanjenja opcenitosti mozemo zakljuciti da graf danog pravca sijece obje osi na pozitivnom dijelu:



Probajmo prvo odrediti kako bi izgledala jednadzba pravac koji prolazi ishodistem koordinatnog sustava i koji sijece dani pravac u nekoj tocki $T(x_0, y_0)$. Opcenito jednadzba pravca kroz dvije tocke $T_1(x_1, y_1)$ i $T_2(x_2, y_2)$ racuna se preko sljedeceg izraza:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

U nasem slucaju tocke T_1 i T_2 su tocke $O(\overbrace{0}^{x_1}, \overbrace{0}^{y_1})$ (ishodiste) i tocka $T(\overbrace{x_0}^{x_2}, \overbrace{y_0}^{y_2})$, dakle vrijedi:

$$y - 0 = \frac{y_0 - 0}{x_0 - 0}(x_0 - 0)$$

$$y = \frac{y_0}{x_0}x$$

Nadalje kako je tocka $T(x_0, y_0)$ na pravcu $3x - 4y + 18 = 0$ njezine kooordinate moraju zadovoljavati njegovu jednadzbu odnosno mora vrijediti:

$$3\overbrace{x}^{x_0} - 4\overbrace{y}^{y_0} + 18 = 0$$

$$3x_0 - 4y_0 + 18 = 0$$

$$4y_0 = 3x_0 + 18$$

Pomnozimo jednadzbu s $\frac{1}{4}$, slijedi:

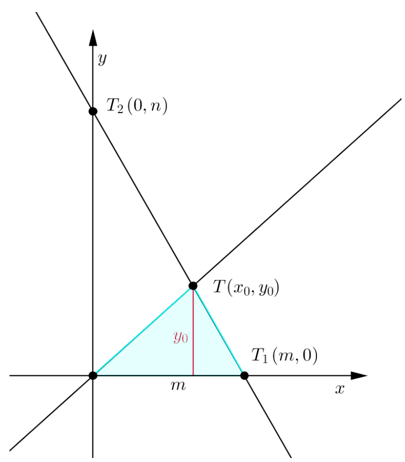
$$4y_0 = 3x_0 + 18 \ / \cdot \frac{1}{4}$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$\frac{{}^{1}\cancel{4}x}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{4}_1} = \frac{3x}{1} \cdot \frac{1}{4} + \frac{{}^{9}\cancel{18}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{4}_2}$$

$$y_0 = \frac{3}{4}x_0 + \frac{9}{2}$$

Dakle jedino preostaje odrediti jednu od koordinata tocke T. U tu svrhu promotrimo opet sliku:



Promatrajuci sliku mozemo uociti da je vidina plavo obojanog trokuta zapravo y_0 koordinata tocke u kojoj se pravci sijeku, dok je osnovica tog trokuta jednaka odsjecku koji odsjeca pravac dan u zadatku na osi x. Dakle povrsina plavo obojanog trokuta jest $P_\Delta = \frac{|m \cdot y_0|}{2}$. Da bismo odredili koliko iznosi y_0 odredimo prvo velicinu odsjecka koji pravac dan u zadatku odsjeca na osi x. U tu svrhu jednadzbu pravca su iz implicitnog pretvoriti u segmentni oblik. Racunam:

$$3x - 4y + 18 = 0$$

$$3x - 4y = -18$$

Pomnozim cijelu ejdnadzbu s $-\frac{1}{18}$, slijedi:

$$3x - 4y = -18 \ / \cdot \left(-\frac{1}{18}\right)$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$\frac{{}^{1}\cancel{3}x}{1}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{18}_6}\right)-\frac{{}^{2}\cancel{4}y}{1}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{18}_9}\right)=\frac{{}^{-1}\cancel{-18}}{1}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{18}_1}\right)$$

$$-\frac{x}{6}+\frac{2y}{9}=1$$

To sredim tako da dobijem segmentni oblik jednadzbe pravca, odnosno da se duljine segmenata jasno vide (kod drugog sumanda s lijeve strane koristim pravilo sredjivanja dvojnog razlomka ali u suprotnu stranu: $\frac{a\cdot d}{b\cdot c}=(\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}})$):

$$\underbrace{\frac{x}{-6}}_{m}+\frac{y}{\frac{9}{2}}=1$$

Sada kada smo odredili m mozemo se vratiti u izraz za povrsinu trokuta $P_\Delta=\frac{|m\cdot y_0|}{2}$, racunam:

$$\underbrace{P_\Delta}_{9}=\frac{|\overbrace{m}^{-6}\cdot y_0|}{2}$$

$$9=\frac{|-6\cdot y_0|}{2}$$

Pomnozim cijelu jednadzbu s 2:

$$9=\frac{|-6\cdot y_0|}{2}\ /\cdot 2$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$9\cdot 2=\frac{|-6\cdot y_0|}{{}_{1}\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}^{1}}{1}$$

$$18=|-6\cdot y_0|$$

$$18=|-6\cdot|\,|y_0|$$

$$18=6\,|y_0|$$

Pomnozim jendadzbu s $\frac{1}{6}$:

$$18=6\,|y_0|\ /\cdot\frac{1}{6}$$

$$\frac{{}^{3}\cancel{18}}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{6}_1}=\frac{{}^{1}\cancel{6}}{1}\,|y_0|\cdot\frac{1}{\cancel{6}_1}$$

$$3=|y_0|$$

$$y_0 = \pm 3$$

Dakle zakljucujemo da y_0 moze biti ili -3 ili 3. Da bih odredio kako mora izgledati jednadzba pravca $y = \frac{y_0}{x_0}x$ potreno je jos odrediti x_0 prema jednakosti, $y_0 = \frac{3}{4}x_0 + \frac{9}{2}$, do koje smo ranije stigli. Racunam:

$$\overbrace{y_0}^{-3} = \frac{3}{4}x_0 + \frac{9}{2} \quad \text{ili} \quad \overbrace{y_0}^{3} = \frac{3}{4}x_0 + \frac{9}{2}$$

$$-3 = \frac{3}{4}x_0 + \frac{9}{2} \quad \text{ili} \quad 3 = \frac{3}{4}x_0 + \frac{9}{2}$$

Pomnozimo obje jednadzbe s 4:

$$-3 = \frac{3}{4}x_0 + \frac{9}{2} \; / \cdot 4 \quad \text{ili} \quad 3 = \frac{3}{4}x_0 + \frac{9}{2} \; / \cdot 4$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$-3 \cdot 4 = \frac{3}{{}_1\cancel{4}}x_0 \cdot \frac{\cancel{4}^1}{1} + \frac{9}{{}_1\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{4}^2}{1} \quad \text{ili} \quad 3 \cdot 4 = \frac{3}{{}_1\cancel{4}}x_0 \cdot \frac{\cancel{4}^1}{1} + \frac{9}{{}_1\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{4}^2}{1}$$

$$-12 = 3x_0 + 18 \quad \text{ili} \quad 12 = 3x_0 + 18$$

$$-12 - 18 = 3x_0 \quad \text{ili} \quad 12 - 18 = 3x_0$$

$$-30 = 3x_0 \quad \text{ili} \quad -6 = 3x_0$$

Pomnozim obje jednadzbe s $\frac{1}{3}$, slijedi:

$$-30 = 3x_0 \; / \cdot \frac{1}{3} \quad \text{ili} \quad -6 = 3x_0 \; / \cdot \frac{1}{3}$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$\frac{{}^{-10}\cancel{-30}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{3}_1} = \frac{{}^1\cancel{3}}{1}x_0 \cdot \frac{1}{\cancel{3}_1} \quad \text{ili} \quad \frac{{}^{-2}\cancel{-6}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{3}_1} = \frac{{}^1\cancel{3}}{1}x_0 \cdot \frac{1}{\cancel{3}_1}$$

$$-10 = x_0 \quad \text{ili} \quad -2 = x_0$$

Kako su trazeni pravci oblika $y = \frac{y_0}{x_0}x$, slijedi:

$$y = \frac{\cancel{-}3}{\cancel{-}10}x \quad \text{ili} \quad y = \frac{3}{-2}x$$

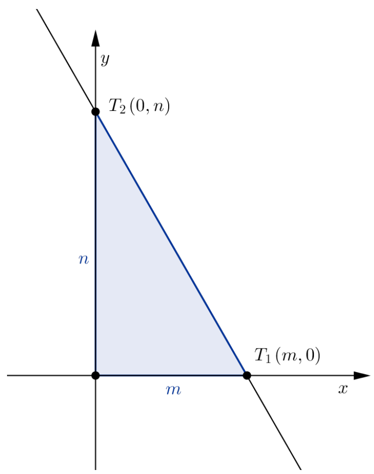
$$y = \frac{3}{10}x \quad \text{ili} \quad y = -\frac{3}{2}x$$

Dakle jednadzbe trazenih pravaca su $y = \frac{3}{10}x$ i $y = -\frac{3}{2}x$. Time je zadatak rijesen.

⋆

Zadatak 18: (str. 57) Razlika duljina odsjecaka sto ih pravac p odsijeca na koordinatnim osima iznosi 2 jedinicne duzine, a povrsina trokuta sto ga pravac p pritom zatvara s koordiantnim osima iznosi 12 kv. jedinica. Odredi jednadzbu pravca p.

Rjesenje: Prije samog racuna probajmo sa skice zakljuciti sto zapravo trebamo racunati. Bez smanjenja opcenitosti mozemo zakljuciti da graf danog pravca sijece obje osi na pozitivnom dijelu:



Dakle ono sto je dano u zadatku jest da je razlika odsjecaka sto ih pravac p odsijeca na koordinatnim osima jednaka 2 jedinicne duljine. Ako je jednadzba pravca p u segmentnom obliku jednaka $\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}=1$ tada prethodni uvjet mozemo zapisati na sljedeci nacin:

$$|m-n|=2$$

Nadalje ono sto znamo da je povrsina trokuta sto ga pravac p zatvara s koordinatnim osima jednaka 12 kv. jedinica. Ako je jednadzba pravca p u segmentnom obliku jednaka $\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}=1$ tada taj uvjet mozemo zapisati na sljedeci nacin:

$$\left.\begin{array}{l} P_\Delta = 12 \\ P_\Delta = \dfrac{|m\cdot n|}{2} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad 12 = \frac{|m\cdot n|}{2}$$

Pomnozimo li taj uvjet s 2, slijedi:

$$12 = \frac{|m\cdot n|}{2} \ / \cdot 2$$

Pokratimo sto se pokratiti dade:

$$12 \cdot 2 = \frac{|m \cdot n|}{{}_1\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}^1}{1}$$

$$24 = |m \cdot n|$$

Dakle dobili smo sljedeci sustav jednadzbi:

$$\begin{cases} |m - n| = 2 \\ |m \cdot n| = 24 \end{cases}$$

Krenimo od prve jednadzbe, $|m - n| = 2$, ona se svodi na dva slucaja:

$$m - n = 2 \quad \text{ili} \quad m - n = -2$$

Usredotocimo se prvo na prvi slucaj!

<u>Slucaj 1</u>: $(m - n = 2)$ Dakle u ovom slucaju vrijedi:

$$m - n = 2$$

$$m = 2 + n$$

Taj izraz uvrstimo u drugu jednadzbu pocetnog sustava:

$$|\overbrace{m}^{2+n} \cdot n| = 24$$

$$|\,(2 + n) \cdot n| = 24$$

$$|2n + n^2| = 24$$

Ovaj izraz se opet svodi na dva slucaja:

$$2n + n^2 = 24 \quad \text{ili} \quad 2n + n^2 = -24$$

$$n^2 + 2n - 24 = 0 \quad \text{ili} \quad n^2 + 2n + 24 = 0$$

Rijesimo prvo kvadratnu jednadzbu $n^2 + 2n - 24 = 0$, prema izrazu za rjesenja kvadratne jednadzbe:

$$n_1, n_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$n_1, n_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24)}}{2 \cdot 1}$$

$$n_1, n_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 96}}{2}$$

$$n_1, n_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{2}$$

$$n_1, n_2 = \frac{-2 \pm 10}{2}$$

Dakle rjesenja su oblika:

$$n_1 = \frac{-2 - 10}{2} = \frac{\cancel{-12}^{-6}}{\cancel{2}_1} \quad \text{i} \quad n_2 = \frac{-2 + 10}{2} = \frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{2}_1}$$

$$n_1 = -6 \quad \text{i} \quad n_2 = 4$$

Kako vrijedi $m = n + 2$ tada dalje slijedi:

$$m_1 = \overbrace{n_1}^{-6} + 2 \quad \text{i} \quad m_2 = \overbrace{n_2}^{4} + 2$$

$$m_1 = -6 + 2 \quad \text{i} \quad m_2 = 4 + 2$$

$$m_1 = -4 \quad \text{i} \quad m_2 = 6$$

Dakle uvrstimo li dobivene rezultate u segmentni oblik jednadzbe pravca p, $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$, dobit cemo dvije jednadzbe pravca za koje vrijedi pocetan uvjet, dakle slijedi:

$$\frac{x}{\underbrace{m_1}_{-4}} + \frac{y}{\underbrace{n_1}_{-6}} = 1 \quad \text{i} \quad \frac{x}{\underbrace{m_2}_{6}} + \frac{y}{\underbrace{n_2}_{4}} = 1$$

$$\frac{x}{-4} + \frac{y}{-6} = 1 \quad \text{i} \quad \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$$

Rijesimo sada drugu kvadratnu jednadzbu $n^2 + 2n + 24 = 0$, prema izrazu za rjesenja kvadratne jednadzbe:

$$n_1, n_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$n_1, n_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24}}{2 \cdot 1}$$

$$n_1, n_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 96}}{2}$$

$$n_1, n_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{-92}}{2}$$

$$n_1, n_2 = \frac{-2 \pm 2\sqrt{23}i}{2}$$

Kako su rjesenja ove kvadratne jednadzbe kompleksni brojevi sto je nemoguce zakljucujem da su jedine jednadzbe pravaca koje zadovoljavaju uvjete prvog slucaja $\frac{x}{-4} + \frac{y}{-6} = 1$ i $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$.

Usredotocimo se sada na drugi slucaj!

Slucaj 2: $(m - n = -2)$ Dakle u ovom slucaju vrijedi:

$$m - n = -2$$

$$m = -2 + n$$

$$m = n - 2$$

Taj izraz uvrstimo u drugu jednadzbu pocetnog sustava:

$$|\overbrace{m}^{n-2} \cdot n| = 24$$

$$|(n-2) \cdot n| = 24$$

$$|n^2 - 2n| = 24$$

Ovaj izraz se opet svodi na dva slucaja:

$$n^2 - 2n = 24 \quad \text{ili} \quad n^2 - 2n = -24$$

$$n^2 - 2n - 24 = 0 \quad \text{ili} \quad n^2 - 2n + 24 = 0$$

Rijesimo prvo kvadratnu jednadzbu $n^2 + 2n - 24 = 0$, prema izrazu za rjesenja kvadratne jednadzbe:

$$n_3, n_4 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$n_3, n_4 = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24)}}{2 \cdot 1}$$

$$n_3, n_4 = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 96}}{2}$$

$$n_3, n_4 = \frac{2 \pm \sqrt{100}}{2}$$

$$n_3, n_4 = \frac{2 \pm 10}{2}$$

Dakle rjesenja su oblika:

$$n_3 = \frac{2 - 10}{2} = \frac{{}^{-4}\cancel{-8}}{\cancel{2}_1} \quad \text{i} \quad n_4 = \frac{2 + 10}{2} = \frac{{}^{6}\cancel{12}}{\cancel{2}_1}$$

$$n_3 = -4 \quad \text{i} \quad n_4 = 6$$

Kako vrijedi $m = n - 2$ tada dalje slijedi:

$$m_3 = \overbrace{n_3}^{-4} - 2 \quad \text{i} \quad m_4 = \overbrace{n_4}^{6} - 2$$

$$m_3 = -4 - 2 \quad \text{i} \quad m_4 = 6 - 2$$

$$m_3 = -6 \quad \text{i} \quad m_4 = 4$$

Dakle uvrstimo li dobivene rezultate u segmentni oblik jednadzbe pravca p, $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$, dobit cemo dvije jednadzbe pravca za koje vrijedi pocetan uvjet, dakle slijedi:

$$\frac{x}{\underbrace{m_3}_{-6}} + \frac{y}{\underbrace{n_3}_{-4}} = 1 \quad \text{i} \quad \frac{x}{\underbrace{m_4}_{4}} + \frac{y}{\underbrace{n_4}_{6}} = 1$$

$$\frac{x}{-6} + \frac{y}{-4} = 1 \quad \text{i} \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$$

Rijesimo sada drugu kvadratnu jednadzbu $n^2 - 2n + 24 = 0$, prema izrazu za rjesenja kvadratne jednadzbe:

$$n_1, n_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$n_1, n_2 = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24}}{2 \cdot 1}$$

$$n_1, n_2 = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 96}}{2}$$

$$n_1, n_2 = \frac{2 \pm \sqrt{-92}}{2}$$

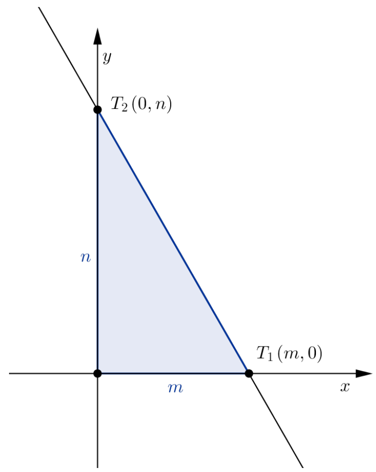
$$n_1, n_2 = \frac{2 \pm 2\sqrt{23}i}{2}$$

Kako su rjesenja ove kvadratne jednadzbe kompleksni brojevi sto je nemoguce zakljucujem da su jedine jednadzbe pravaca koje zadovoljavaju uvjete prvog slucaja $\frac{x}{-6} + \frac{y}{-4} = 1$ i $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$.
Time je zadatak rijesen, dakle cetiri jednadzbe pravaca zadovoljavaju pocetne uvjete i to su $\frac{x}{-4} + \frac{y}{-6} = 1$, $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$, $\frac{x}{-6} + \frac{y}{-4} = 1$ i $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$.

$\star$

Zadatak 20: (str. 57) Odredi koeficijent a tako da duljina odsjecaka pravca $3x + ay + 12 = 0$ izmedju koordinatnih osi bude jednaka 5.

Rjesenje: Prije samog racuna probajmo sa skice zakljuciti sto zapravo trebamo racunati. Bez smanjenja opcenitosti mozemo zakljuciti da graf danog pravca sijece obje osi na pozitivnom dijelu:



Kako je trokut kojeg dani pravac cini se koordinatnim osima pravokutan ono sto vrijedi jest:

$$|T_1T_2|^2 = m^2 + n^2$$

pri cemu su m i n odsjedci sto ih pravac odsjeca na koordiantnim osim. Da bismo odredili cemu su oni jednaki trebamo pretvoriti danu jednadzbu pravca u segmentni oblik, odnosno u oblik $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$. Racunam:

$$3x + ay + 12 = 0$$

$$3x + ay = -12$$

Pomnozimo cijelu jednadzbu s $\frac{1}{-12}$, slijedi:

$$3x + ay = -12 \ / \cdot \frac{1}{-12}$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$\frac{{}^1\cancel{3}x}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{-12}_{-4}} + \frac{ay}{1} \cdot \frac{1}{-12} = \frac{{}^1\cancel{-12}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{-12}_1}$$

$$\frac{x}{-4} + \frac{ay}{-12} = 1$$

To sredim tako da dobijem segmentni oblik jednadzbe pravca, odnosno da se duljine segmenata jasno vide (kod drugog sumanda s lijeve strane koristim pravilo sredjivanja dvojnog razlomka ali u suprotnu stranu: $\frac{a \cdot d}{b \cdot c} = (\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}})$):

$$\underbrace{\frac{x}{-4}}_{m} + \underbrace{\frac{y}{\frac{-12}{a}}}_{n} = 1$$

Dakle s odredjenim duljinama odsjecaka sto ih odredjuje pravac na koordinatnim osima vratimo se u uvjet zadatka $|T_1T_2|^2 = m^2 + n^2$:

$$|\underbrace{T_1T_2}_{5}|^2 = \underbrace{m}_{-4}{}^2 + \underbrace{n}_{\frac{-12}{a}}{}^2$$

$$5^2 = (-4)^2 + \left(\frac{-12}{a}\right)^2$$

$$25 = 16 + \frac{(-12)^2}{a^2}$$

$$25 = 16 + \frac{144}{a^2}$$

Pomnozim cijelu jednadzbu s a^2, slijedi:

$$25 = 16 + \frac{144}{a^2} \; / \cdot a^2$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$25 \cdot a^2 = 16 \cdot a^2 + \frac{144}{{}_1\cancel{a^2}} \cdot \frac{\cancel{a^2}^1}{1}$$

$$25a^2 = 16a^2 + 144$$

$$25a^2 - 16a^2 = 144$$

$$9a^2 = 144$$

Pomnozim cijelu jednadzbu s $\frac{1}{9}$, slijedi:

$$9a^2 = 144 \; / \cdot \frac{1}{9}$$

Pokratimo sto se pokratit dade:

$$\frac{{}^1\cancel{9}a^2}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{9}_1} = \frac{{}^{16}\cancel{144}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{9}_1}$$

$$a^2 = 16 \; /\sqrt{\ }$$

$$a = \pm 4$$

Dakle za vrijednosti parametra a jednake 4 i -4 uvjeti zadatka bit ce zadovoljeni, time je zadatak rijesen.

⋆