1.5 Realni brojevi (staro izdanje knjige) (dodatak)

Definicija: Svaki broj koji je dijeljiv samo s 1 i sa samim sobom nazivamo prostim.

Prisjetimo se da svaki konacan prirodan broj mozemo prikazati kao konacan produkt prostih brojeva. U tom produktu mogu se naravno pojedini prosti broj pojaviti vise puta. Taj proces zove se rastav na proste faktore. Dakle vrijedi:

$$x = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot ... \cdot p_n^{\alpha_n}$$

Pri cemu je $\{p_1, p_2, p_3, ..., p_n\}$ konacan broj razlicitih prostih brojeva na koje se broj x moze rastaviti, dok su $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n\}$ bojevi koji govore koliko puta se pojedini prosti broj pojavljuje u rastavu.

Tvrdnja: Neka je dan prirodan broj x, takav da vrijedi:

$$x = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot ... \cdot p_m^{\alpha_m}$$

pri cemu su $\{p_1, p_2, p_3, ..., p_m\}$ razliciti prosti brojevi. Nadalje neka je dan prirodan broj n takav da vrijedi $\alpha_1 < n, \alpha_2 < n, \alpha_3 < n, ..., \alpha_m < n$. Tada je broj oblika $\sqrt[n]{x}$ iracionalan.

Napomena: Svaki korijen mogu dijelomicnim korijenovanjem svesti na produkt u kojem se nalazi prirodan broj i korijen koji zadavoljava uvjete tvrdnje. Primjerice vrijedi:

$$\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^6} = 2\sqrt[5]{2}$$

Pocetni korijen ne upada u uvjete tvrdnje dok, ovaj drugi koji je dio krajnjeg produkta upada.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, odnosno pretpostavimo da je broj $\sqrt[n]{x}$ racionalan. To zapravo znaci da postoje prirodni brojevi a i b, koji su medjusobno relativno prosti (odnosno vrijedi $M(a, b) = 1$) tako da vrijedi:

$$\sqrt[n]{x} = \frac{a}{b}$$

Potenciramo cijelu jednakost s eksponentom n, slijedi:

$$\sqrt[n]{x} = \frac{a}{b} \ / \ ^n$$

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Desnu stranu jednakosti raspisemo prema pravilu za dijeljenje potencija istog eksponenta, donosno prema izrazu $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, slijedi:

$$x = \frac{a^n}{b^n}$$

Pomnozimo cijelu jednakost s b^n, slijedi:

$$x = \frac{a^n}{b^n} \ / \cdot b^n$$

$$x \cdot b^n = \frac{a^n}{b^n} \cdot b^n$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$x \cdot b^n = \frac{a^n}{{}_1\cancel{b^n}} \frac{\cancel{b^n}^1}{1}$$

$$x \cdot b^n = \frac{a^n}{1}$$

$$x \cdot b^n = a^n$$

No to zapravo znaci da je broj a^n dijeljiv s brojem x. No prisjetimo se da u tekstu zadatka stoji da je broj x oblika $x = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot ... \cdot p_m^{\alpha_m}$, pri cemu su $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ razliciti prosti brojevi. Vrijedi:

$$\underbrace{x}_{p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot ... \cdot p_m^{\alpha_m}} \cdot b^n = a^n$$

$$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot ... \cdot p_m^{\alpha_m} \cdot b^n = a^n$$

No to opet znaci da je broj a^n zapravo dijeljiv s brojevima $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, p_3^{\alpha_3}, ..., p_m^{\alpha_m}$. No to znaci da je broj a^n dijeljiv s brojevima $p_1, p_2, p_3, ..., p_m$.

Pokazimo da ako je broj a^n dijeljiv prostim brojevima $p_1, p_2, p_3, ..., p_m$ tada je i broj a dijeljiv svim tim prostim brojevima. Pretpostavimo suprotno odnosno da a^n jest dijeljiv prostim brojevima $p_1, p_2, p_3, ..., p_m$ dok broj a nije.

Napomena: Iz logike sudova znamo da se negacija implikacije odjedjuje na sljedeci nacin: $$\neg\left(P \Rightarrow Q\right) = P \wedge \neg Q$$

Dakle ako a nije dijeljiv s prostim brojevima $p_1, p_2, p_3, ..., p_m$, tada je on u rastavu na proste faktore oblika:

$$a = p_1'^{\ \beta_1} \cdot p_2'^{\ \beta_2} \cdot p_3'^{\ \beta_3} \cdot ... \cdot p_k'^{\ \beta_k}$$

Pri tome nijedan od prostih brojeva $p'_1, p'_2, p'_3, ..., p'_k$ nije jednak nijednom od prostih brojeva $p_1, p_2, p_3, ..., p_m$. Potencirajmo sada broj a eksponentom n, vrijedi:

$$a = {p'_1}^{\beta_1} \cdot {p'_2}^{\beta_2} \cdot {p'_3}^{\beta_3} \cdot ... \cdot {p'_k}^{\beta_k} \ / \ ^n$$

$$a^n = \left({p'_1}^{\beta_1} \cdot {p'_2}^{\beta_2} \cdot {p'_3}^{\beta_3} \cdot ... \cdot {p'_k}^{\beta_k}\right)^n$$

Raspisemo desnu stranu jednakosti prema pravilu za mnozenje potencija istih eksponenata, odnosno prema jednakosti $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$, slijedi:

$$a^n = \left({p'_1}^{\beta_1}\right)^n \cdot \left({p'_2}^{\beta_2}\right)^n \cdot \left({p'_3}^{\beta_3}\right)^n \cdot ... \cdot \left({p'_k}^{\beta_k}\right)^n$$

Nadalje raspisujemo desnu stranu jednakosti prema pravilu za potenciranje potencijam, odnosno prema $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$, slijedi:

$$a^n = {p'_1}^{\beta_1 \cdot n} \cdot {p'_2}^{\beta_2 \cdot n} \cdot {p'_3}^{\beta_3 \cdot n} \cdot ... \cdot {p'_k}^{\beta_k \cdot n}$$

Ono sto mozemo zakljuciti promatrajuci broj a^n jest da ni broj a^n nije dijeljiv ni s jednim od brojeva $p_1, p_2, p_3, ..., p_m$ jer kako sto vidimo broj a^n u rastavu na faktore ne sadrzi nijedan od prostih brojeva $p_1, p_2, p_3, ..., p_m$.

No to znaci da je nasa pretpostavka bila pogresna odnosno da vrijedi ako je broj a^n dijeljiv prostim brojevima $p_1, p_2, p_3, ..., p_m$ tada je i broj a dijeljiv svim tim prostim brojevima. U tom slucaju broj a je sigurno oblika:

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot ... \cdot p_m \cdot r$$

Pri cemu je r neki prirodan broj (ne nuzno prost). No tada jednakost:

$$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot ... \cdot p_m^{\alpha_m} \cdot b^n = \underbrace{a}_{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot ... \cdot p_m \cdot r}{}^n$$

Poprima oblik:

$$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot ... \cdot p_m^{\alpha_m} \cdot b^n = (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot ... \cdot p_m \cdot r)^n$$

Raspisemo desnu stranu jednakosti prema pravilu za mnozenje potencija istih eksponenata, odnosno prema jednakosti $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$, slijedi:

$$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot ... \cdot p_m^{\alpha_m} \cdot b^n = p_1^n \cdot p_2^n \cdot p_3^n \cdot ... \cdot p_m^n \cdot r^n$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\dfrac{1}{p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot ... \cdot p_m^{\alpha_m}}$, slijedi:

$$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot ... \cdot p_m^{\alpha_m} \cdot b^n = p_1^n \cdot p_2^n \cdot p_3^n \cdot ... \cdot p_m^n \cdot r^n \ / \cdot \frac{1}{p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot ... \cdot p_m^{\alpha_m}}$$

$$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot ... \cdot p_m^{\alpha_m} \cdot b^n \cdot \frac{1}{p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot ... \cdot p_m^{\alpha_m}} =$$

$$= p_1^n \cdot p_2^n \cdot p_3^n \cdot ... \cdot p_m^n \cdot r^n \cdot \frac{1}{p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot ... \cdot p_m^{\alpha_m}}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^1\cancel{p_1^{\alpha_1}} \cdot {}^1\cancel{p_2^{\alpha_2}} \cdot {}^1\cancel{p_3^{\alpha_3}} \cdot ... {}^1\cdot \cancel{p_m^{\alpha_m}}}{1} \cdot b^n \cdot \frac{1}{\cancel{p_1^{\alpha_1}}\,1 \cdot \cancel{p_2^{\alpha_2}}\,1 \cdot \cancel{p_3^{\alpha_3}}\,1 \cdot ... \cdot \cancel{p_m^{\alpha_m}}\,1} = \frac{p_1^n \cdot p_2^n \cdot p_3^n \cdot ... \cdot p_m^n}{p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot ... \cdot p_m^{\alpha_m}} \cdot r^n$$

$$b^n = \frac{p_1^n \cdot p_2^n \cdot p_3^n \cdot ... \cdot p_m^n}{p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot ... \cdot p_m^{\alpha_m}} \cdot r^n$$

Raspisemo desnu stranu prema pravilu za dijeljenje potencija istih baza, odnosno prema izrazu $a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{m-n}$, slijedi:

$$b^n = \frac{p_1^n}{p_1^{\alpha_1}} \cdot \frac{p_2^n}{p_2^{\alpha_2}} \cdot \frac{p_3^n}{p_3^{\alpha_3}} \cdot ... \cdot \frac{p_m^n}{p_m^{\alpha_1}} \cdot r^n$$

$$b^n = p_1^{n-\alpha_1} \cdot p_2^{n-\alpha_2} \cdot p_3^{n-\alpha_3} \cdot ... \cdot p_m^{n-\alpha_m} \cdot r^n$$

No to znaci da je broj b^n dijeljiv s brojevima $p_1^{n-\alpha_1}, p_2^{n-\alpha_2} \cdot, p_3^{n-\alpha_3}, ..., p_m^{n-\alpha_m}$, no to znaci da je broj b^n dijeljiv s brojevima $p_1, p_2, p_3, ..., p_m$. No prema prethodnom razmatranju to znaci da je i broj b dijeljiv s brojevima $p_1, p_2, p_3, ..., p_m$ (postupak dokazivanja je potpuno isti).

No ono sto smo zakljucili jest da brojevi a i b imaju m zajednickih dijelitelja, sto znaci da oni nisu relativno prosti nije istinita, a to znaci da je pocetna pretpostavka bila pogresna odnosno broj $\sqrt[n]{x}$ nije racionalan, dakle on mora biti iracionalan. Time je tvrdnja pokazana.