1.5 Realni brojevi (staro izdanje knjige)

Zadatak 4: (str. 55) Dokazi da je zbroj racionalnog i iracionalnog broja iracionalan broj.

Rjesenje: Neka su dani brojevi a i b takvi da vrijedi $a \in \mathbb{Q}$ (dakle a je racionalan) te $b \notin \mathbb{Q}$ (dakle b je iracionalan). Nadalje pretpostavimo da je njihov zbroj jednak nekom broju c takvom da vrijedi $c \in \mathbb{Q}$ (dakle c je racionalan). Vrijedi:

$$a + b = c$$

No prebacimo broj b na lijevu stranu, slijedi:

$$a = c - b$$

Na taj nacin som na lijevoj strani dobili broj koji je iracionalan, a na desnoj razliku racionalnih brojeva. No znam da su racionalni brojevi zatvoreni na operaciju zbrajanja odnosno oduzimanja (zbroj ili razlika svaka dva racionalna broja (razlomka) jest racionalan broj (razlomak)), odnosno vrijedi:

$$\overbrace{a}^{\notin\mathbb{Q}} = \underbrace{c - b}_{\in\mathbb{Q}}$$

No to znaci da se na lijevoj strani nalazi iracionalan broj, a na desnoj racionalan i oni bi trebali biti jednaki. No to je nemoguce jer znamo da vrijedi $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$, odnosno broj moze biti ili racionalan ili iracionalan, sto znaci da je pretpostavka bila pogresna.
Dakle zbroj racionalnog i iracionalnog broja je iracionalan broj. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 6: (str. 55) Dokazi da je broj oblika $a + b\sqrt{2}$ iracionalan za svaka dva racionalna broja a i b, $b \neq 0$.

Rjesenje: Ovdje cemo koristiti cinjenicu da je $\sqrt{2}$ iracionalan broj. Na samom pocetku podijelimo zadatak na dva slucaja kada je $a = 0$ i kada je $a \neq 0$.

Pozabavimo se prvo slucajem kada je $a = 0$. U tom slucaju broj poprima oblik $b\sqrt{2}$. Pretpostavimo suprotno od tvrdnje u zadatku odnosno da postoji $x \in \mathbb{Q}$ (racionalan broj x) takav da vrijedi:

$$b\sqrt{2} = x$$

Pomnozimo jednakost s $\frac{1}{b}$, slijedi:

$$b\sqrt{2} = x \ / \cdot \frac{1}{b}$$

$$b\sqrt{2} \cdot \frac{1}{b} = x \cdot \frac{1}{b}$$

Pokratim sto se poktatiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{b}\sqrt{2}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{b}_1} = \frac{x}{1} \cdot \frac{1}{b}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{x}{b}$$

$$\sqrt{2} = \frac{x}{b}$$

Promotrim li malo dobiveni izraz mogu zakljuciti da je broj na lijevoj strani iracionalan dok je on na desnoj racionalan.

Postavlja se pitanje zasto je broj na desnoj racionalan. Odgovor lezi u tome sto su racionalni brojevi zatvoreni operaciju dijeljenja. Dakle ako dva razlomka podijelim opet cu dobiti razlomak.

No to nije moguce jer broj moze biti ili racionalan ili iracionalan sto znaci da je pretpostavka bila kriva, odnosno broj $b\sqrt{2}$, $b \in \mathbb{Q}$ je zaista iracionalan.

Pozabavimo se nadaljde drugim slucajem kada je $a \neq 0$. U tom slucaju broj je oblika $a + b\sqrt{2}$. Pretpostavimo suprotno od tvrdnje u zadatku odnosno da postoji $x \in \mathbb{Q}$ (racionalan broj x) takav da vrijedi:

$$a + b\sqrt{2} = x$$

Kvadriramo dani izraz, slijedi:

$$a + b\sqrt{2} = x \ / \ ^2$$

$$\left(a + b\sqrt{2}\right)^2 = x^2$$

Lijevu stranu raspisujemo po pravilu za kvadrat binoma, odnosno $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, slijedi:

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot b\sqrt{2} + \left(b\sqrt{2}\right)^2 = x^2$$

Posljednji clan sume na lijevoj strani raspisujem po pravilu za mnozenje potencija istih eksponenanata, osnosno $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$, slijedi:

$$a^2 + 2ab\sqrt{2} + b^2 \underbrace{\left(\sqrt{2}\right)^2}_{2} = x^2$$

$$a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2 = x^2$$

Sve clanove sume na lijevoj strani osim onog koji sadrzi $\sqrt{2}$ prebacimo na desnu stranu, slijedi:

$$2ab\sqrt{2} = x^2 - a^2 - 2b^2$$

Cijelu jednakost mnozim s $\frac{1}{2ab}$, slijedi:

$$2ab\sqrt{2} = x^2 - a^2 - 2b^2 \ / \cdot \frac{1}{2ab}$$

$$2ab\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2ab} = \left(x^2 - a^2 - 2b^2\right) \cdot \frac{1}{2ab}$$

Pokratim sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^1\cancel{2ab}\sqrt{2}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2ab}_1} = \frac{x^2 - a^2 - 2b^2}{1} \cdot \frac{1}{2ab}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{x^2 - a^2 - 2b^2}{2ab}$$

$$\sqrt{2} = \frac{x^2 - a^2 - 2b^2}{2ab}$$

Promotrim li malo dobiveni izraz mogu zakljuciti da je broj na lijevoj strani iracionalan dok je on na desnoj racionalan.

Postavlja se pitanje zasto je broj na desnoj racionalan. Odgovor lezi u tome sto su racionalni brojevi zatvoreni na sve osnovne operacije, odnosno na zbrajanje, oduzimanje, mnozenje i dijeljenje. Dakle ako dva razlomka zbrojim, oduzmem, pomnozim ili podijelim opet cu dobiti razlomak.

Kako su to jedine operacije koje se nalaze na desnoj strani (kvadriranje je zapravo mnozenje broja samim sobom), a brojevi a, b i x su svi redom racionalni i krajnji rezultat desne strane bit ce racionalan. No to nije moguce jer broj moze biti ili racionalan ili iracionalan sto znaci da je pretpostavka bila kriva odnosno broj definiran u zadatku stvarno jest iracionalan.

Time je zadatak rijesen.

☙ ✧ ❧

Zadatak 8: (str. 55) Dokazi da je broj $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ iracionalan.

Rjesenje: Pretpostavimo suprotno, odnosno da je broj $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ racionalan. To zapravo znaci da postoji $x \in \mathbb{Q}$ (x racionalan broj) tako da vrijedi:

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = x$$

Kvadriramo cijelu jednakost, slijedi:

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=x \; / \; ^2$$

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=x^2$$

Lijevu stranu raspisemo prema izrazu za kvadrat binoma, odnosno $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, slijedi:

$$\left(\sqrt{2}\right)^2+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2=x^2$$

$$2+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+3=x^2$$

Zbrojimo sto se zbrojiti dade, slijedi:

$$5+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=x^2$$

Prebacimo 5 na desnu stranu, slijedi:

$$2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=x^2-5$$

Mnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{2}$, slijedi:

$$2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=x^2-5 \; / \cdot\frac{1}{2}$$

$$2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}=\left(x^2-5\right)\cdot\frac{1}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{2}_{1}}=\frac{x^2-5}{1}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{1}=\frac{x^2-5}{2}$$

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\frac{x^2-5}{2}$$

Pomnozim brojeve na lijevoj strani prema pravilu za mnozenje korijena jednakih velicina, odnosno prema $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$, slijedi:

$$\sqrt{2\cdot 3}=\frac{x^2-5}{2}$$

$$\sqrt{6}=\frac{x^2-5}{2}$$

Promatrajuci dobiveni izraz zakljucujemo da je broj na lijevoj strani iracionalan, dok se na desnoj strani nalazi izraz koji sadrzi samo racionalne brojeve. Kako su racionalni brojevi zatvoreni na sve osnovne operacije (zbrajanje, oduzimanje, mnozenje i dijeljenje), sto zapravo znaci da je rezultat osnovnih operacija racionalnih brojeva opet racionalan broj, desna je strana ubiti racionalni broj.

To je nemoguce jer broj moze biti ili racionalan ili iracionalan, dakle pretpostavka je kriva. To zapravo znaci da je broj dan u zadatku iracionalan. Time je zadatak rijesen.

> Napomena: Na stanici ispod ovog dokumenta nalazi se doument s dokazom da je korijen iz svakog prirodnog broja koji nije potpuni kvadrat (potpuni kvadrat jest onaj prirodni broj koji je kvadrat nekog prirodnog broja, primjerice broj 4 koji je kvadrat broja 2) zapravo iracionalan. Dokazan je zapravo nesto jaca tvrdnja od toga.

Zadatak 9: (str. 55) 1) Dokazi da je broj $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ iracionalan.

Rjesenje: Pretpostavimo suprotno, odnosno da je broj $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ racionalan. To zapravo znaci da postoji $x \in \mathbb{Q}$ (x racionalan broj) tako da vrijedi:

$$\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}=x$$

Kvadriramo cijelu jednakost, slijedi:

$$\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}=x\ /\ ^2$$

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)^2=x^2$$

Lijevu stranu raspisemo prema izrazu za kvadrat binoma, odnosno $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, slijedi:

$$\left(\sqrt{2}\right)^2+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}+\left(\sqrt[3]{3}\right)^2=x^2$$

$$2+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}+\left(\sqrt[3]{3}\right)^2=x^2$$

Prebacimo broj 2 na desnu stranu jednakosti, slijedi:

$$2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}+\left(\sqrt[3]{3}\right)^2=x^2-2$$

Izlucimo $\sqrt[3]{3}$ iz clanove sume na ljievoj strani jednakosti, slijedi:

$$\sqrt[3]{3}\left(2\cdot\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)=x^2-2$$

Nadalje raspisat cemo $2 \cdot \sqrt{2}$ kao $2 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2}$, slijedi:

$$\sqrt[3]{3}\left(\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}\right) = x^2 - 2$$

Uocimo da su druga dva sumanda u zagradi lijeve strane jednakosti zapravo jednake x, slijedi:

$$\sqrt[3]{3}(\sqrt{2} + \underbrace{\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}}_{x}) = x^2 - 2$$

$$\sqrt[3]{3}\left(\sqrt{2} + x\right) = x^2 - 2$$

Nadalje cijeli cemo izraz kubirati, slijedi:

$$\sqrt[3]{3}\left(\sqrt{2} + x\right) = x^2 - 2 \ / \ ^3$$

$$\left[\sqrt[3]{3}\left(\sqrt{2} + x\right)\right]^3 = \left(x^2 - 2\right)^3$$

Raspisemo izraz na lijevoj strani jednakosti prema pravilu za mnozenje potenicja istih eksponenata, odnosno prema $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$, slijedi:

$$\left(\sqrt[3]{3}\right)^3 \left(\sqrt{2} + x\right)^3 = \left(x^2 - 2\right)^3$$

$$3\left(\sqrt{2} + x\right)^3 = \left(x^2 - 2\right)^3$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{3}$, slijedi:

$$3\left(\sqrt{2} + x\right)^3 = \left(x^2 - 2\right)^3 \ / \cdot \frac{1}{3}$$

$$3\left(\sqrt{2} + x\right)^3 \cdot \frac{1}{3} = \left(x^2 - 2\right)^3 \cdot \frac{1}{3}$$

Pokratimo sto se poktatiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^1\cancel{3}\left(\sqrt{2} + x\right)^3}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{3}_1} = \frac{\left(x^2 - 2\right)^3}{\cdot} \frac{1}{3}$$

$$\frac{\left(\sqrt{2} + x\right)^3}{1} = \frac{\left(x^2 - 2\right)^3}{3}$$

$$\left(\sqrt{2} + x\right)^3 = \frac{\left(x^2 - 2\right)^3}{3}$$

Raspisemo lijevu stranu jednakosti prema pravilu za kubiranje binoma, odnosno prema $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b \pm 3ab^2 \pm b^3$, slijedi:

$$\left(\sqrt{2}\right)^3 + 3 \cdot \underbrace{\left(\sqrt{2}\right)^2}_{2} \cdot x + 3 \cdot \sqrt{2} \cdot x^2 + x^3 = \frac{\left(x^2 - 2\right)^3}{3}$$

$$\sqrt{2}\cdot\underbrace{\left(\sqrt{2}\right)^2}_{2}+3\cdot 2x+3\sqrt{2}x^2+x^3=\frac{\left(x^2-2\right)^3}{3}$$

$$2\sqrt{2}+6x+3\sqrt{2}x^2+x^3=\frac{\left(x^2-2\right)^3}{3}$$

Prebacimo $6x$ i x^3 na desnu stranu jednakosti, slijedi:

$$2\sqrt{2}+3\sqrt{2}x^2=\frac{\left(x^2-2\right)^3}{3}-x^3-6x$$

Izlucimo $\sqrt{2}$ iz oba clana sume na lijevoj strani jednakosti, slijedi:

$$\sqrt{2}\left(2+3x^2\right)=\frac{\left(x^2-2\right)^3}{3}-x^3-6x$$

Pomnozim cijelu jednakost s $\dfrac{1}{2+3x^2}$, slijedi:

$$\sqrt{2}\left(2+3x^2\right)=\frac{\left(x^2-2\right)^3}{3}-x^3-6x\ /\cdot\frac{1}{2+3x^2}$$

$$\sqrt{2}\left(2+3x^2\right)\cdot\frac{1}{2+3x^2}=\left[\frac{\left(x^2-2\right)^3}{3}-x^3-6x\right]\cdot\frac{1}{2+3x^2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{\sqrt{2}^{1}\cancel{\left(2+3x^2\right)}}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{2+3x^2}_{1}}=\left[\frac{\left(x^2-2\right)^3}{3}-x^3-6x\right]\cdot\frac{1}{2+3x^2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{1}=\frac{\frac{\left(x^2-2\right)^3}{3}-x^3-6x}{2+3x^2}$$

$$\sqrt{2}=\frac{\frac{\left(x^2-2\right)^3}{3}-x^3-6x}{2+3x^2}$$

Promatrajuci dobiveni izraz zakljucujemo da je broj na lijevoj strani iracionalan, dok se na desnoj strani nalazi izraz koji sadrzi samo racionalne brojeve. Kako su racionalni brojevi zatvoreni na sve osnovne operacije (zbrajanje, oduzimanje, mnozenje i dijeljenje), sto zapravo znaci da je rezultat osnovnih operacija racionalnih brojeva opet racionalan broj, desna je strana ubiti racionalni broj (napominjem da je potenciranje zapravo mnozenje).

To je nemoguce jer broj moze biti ili racionalan ili iracionalan, dakle pretpostavka je kriva. To zapravo znaci da je broj dan u zadatku iracionalan. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 9: (str. 55) 2) Dokazi da je broj $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ iracionalan.

Rjesenje: Pretpostavimo suprotno, odnosno da je broj $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ racionalan. To zapravo znaci da postoji $x \in \mathbb{Q}$ (x racionalan broj) tako da vrijedi:

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}=x$$

Prebacimo $\sqrt{5}$ na desnu stranu, slijedi:

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=x-\sqrt{5}$$

Kvadriram dobivenu jednakost, slijedi:

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=x-\sqrt{5}\ /\ ^2$$

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=\left(x-\sqrt{5}\right)^2$$

Obje strane jednakosti raspisem prema izrazu za kvadrat binoma, odnosno $(a \pm b)^2=a^2 \pm 2ab+b^2$, slijedi:

$$\underbrace{\left(\sqrt{2}\right)^2}_{2}+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\underbrace{\left(\sqrt{3}\right)^2}_{3}=x^2-2\cdot x\cdot\sqrt{5}+\underbrace{\left(\sqrt{5}\right)^2}_{5}$$

$$2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+3=x^2-2x\sqrt{5}+5$$

Zbrojimo sto se zbrojiti dade na lijevoj strani jednakosti, slijedi:

$$5+2\sqrt{2}\sqrt{3}=x^2-2x\sqrt{5}+5$$

Pokratimo istovjetne izraze s lijeve i desne strane jednakosti, slijedi:

$$\cancel{5}+2\sqrt{2}\sqrt{3}=x^2-2x\sqrt{5}+\cancel{5}$$

$$2\sqrt{2}\sqrt{3}=x^2-2x\sqrt{5}$$

Pomnozimo korijene na lijevoj strani jednakosti prema pravilu za mnozenje korijena, odnosno prema $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$, slijedi:

$$2\sqrt{2\cdot 3}=x^2-2x\sqrt{5}$$

$$2\sqrt{6}=x^2-2x\sqrt{5}$$

Prebacimo $2x\sqrt{5}$ na lijevu stranu jednakosti slijedi:

$$2\sqrt{6}+2x\sqrt{5}=x^2$$

Izlucimo 2 na lijevoj strani jednakosti, slijedi:

$$2\left(\sqrt{6}+x\sqrt{5}\right)=x^2$$

Pomnozimo cijelu jednadzbu s $\frac{1}{2}$, slijedi:

$$2\left(\sqrt{6}+x\sqrt{5}\right)=x^2 \ / \cdot \frac{1}{2}$$

$$2\left(\sqrt{6}+x\sqrt{5}\right)\cdot\frac{1}{2}=x^2\cdot\frac{1}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{2}\left(\sqrt{6}+x\sqrt{5}\right)}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{2}_{1}}=\frac{x^2}{1}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\frac{1\cdot\left(\sqrt{6}+x\sqrt{5}\right)}{1}=\frac{x^2}{2}$$

$$\sqrt{6}+x\sqrt{5}=\frac{x^2}{2}$$

Opet kvadriramo cijelu jednakost, slijedi:

$$\sqrt{6}+x\sqrt{5}=\frac{x^2}{2} \ /\ ^2$$

$$\left(\sqrt{6}+x\sqrt{5}\right)^2=\left(\frac{x^2}{2}\right)^2$$

Lijevu stranu jednakosti raspisem prema izrazu za kvadrat binoma, odnosno $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$, slijedi:

$$\underbrace{\left(\sqrt{6}\right)}_{6}+2\cdot\sqrt{6}\cdot x\sqrt{5}+\left(x\sqrt{5}\right)^2=\left(\frac{x^2}{2}\right)^2$$

$$6+2x\sqrt{6}\sqrt{5}+\left(x\sqrt{5}\right)^2=\left(\frac{x^2}{2}\right)^2$$

Posljednji clan sume na lijevoj strani jednakosti prema pravilu za mnozenje potencija istih eksponenata, odnosno prema $a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$, slijedi:

$$6+2x\sqrt{6}\sqrt{5}+x^2\underbrace{\left(\sqrt{5}\right)^2}_{5}=\left(\frac{x^2}{2}\right)^2$$

$$6+2x\sqrt{6}\sqrt{5}+5x^2=\left(\frac{x^2}{2}\right)^2$$

Prebacimo 6 i $5x^2$ na desnu stranu jednakosti, slijedi:

$$2x\sqrt{6}\sqrt{5} = \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 - 5x^2 - 6$$

Pomnozimo korijene na lijevoj strani jednakosti prema pravilu za mnozenje korijena, odnosno prema $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$, slijedi:

$$2x\sqrt{6 \cdot 5} = \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 - 5x^2 - 6$$

$$2x\sqrt{30} = \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 - 5x^2 - 6$$

Pomnozim cijelu jednakost s $\frac{1}{2x}$, slijedi:

$$2x\sqrt{30} = \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 - 5x^2 - 6 \ / \cdot \frac{1}{2x}$$

$$2x\sqrt{30} \cdot \frac{1}{2x} = \left[\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 - 5x^2 - 6\right] \cdot \frac{1}{2x}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{2x}\sqrt{30}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2x}} = \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 - 5x^2 - 6}{1} \cdot \frac{1}{2x}$$

$$\frac{\sqrt{30}}{1} = \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 - 5x^2 - 6}{2x}$$

$$\sqrt{30} = \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 - 5x^2 - 6}{2x}$$

Promatrajuci dobiveni izraz zakljucujemo da je broj na lijevoj strani iracionalan, dok se na desnoj strani nalazi izraz koji sadrzi samo racionalne brojeve. Kako su racionalni brojevi zatvoreni na sve osnovne operacije (zbrajanje, oduzimanje, mnozenje i dijeljenje), sto zapravo znaci da je rezultat osnovnih operacija racionalnih brojeva opet racionalan broj, desna je strana ubiti racionalni broj (napominjem da je potenciranje zapravo mnozenje broja sa samim sobom n puta).

To je nemoguce jer broj moze biti ili racionalan ili iracionalan, dakle pretpostavka je kriva. To zapravo znaci da je broj dan u zadatku iracionalan. Time je zadatak rijesen.

✖ Zadatak 9: (str. 55) 3) Dokazi da je broj $\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}$ iracionalan.

Rjesenje: Pretpostavimo suprotno, odnosno da je broj $\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}$ racionalan. To zapravo znaci da postoji $x \in \mathbb{Q}$ (x racionalan broj) tako da vrijedi:

$$\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}=x$$

Prisjetimo se da vrijedi $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$. Imajuci to na umu $\sqrt{2}$ mogu zapisati kao $2^{\frac{1}{2}}$. Nadalje $\frac{1}{2}$ mogu zapisati kao $\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\cdot 2$. Imajuci sve to na umu vrijedi:

$$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{4}\cdot 2}$$

Primjenim li pravilo u potenciranju potencija, odnosno $(a^n)^m=a^{n\cdot m}$, vrijedi:

$$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{4}\cdot 2}=\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^2$$

Imajuci na umu $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ mogu pisati:

$$\sqrt{2}=\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^2=\left(\sqrt[4]{2}\right)^2$$

Vratimo se s tim u pocetnu jednakost, slijedi:

$$\underbrace{\sqrt{2}}_{\left(\sqrt[4]{2}\right)^2}+\sqrt[4]{2}=x$$

$$\left(\sqrt[4]{2}\right)^2+\sqrt[4]{2}=x$$

Izlucimo $\sqrt[4]{2}$ iz oba clana na lijevoj strani jednakosti, slijedi:

$$\sqrt[4]{2}\left(\sqrt[4]{2}+1\right)=x$$

Kvadriram cijelu jednakost, vrijedi:

$$\sqrt[4]{2}\left(\sqrt[4]{2}+1\right)=x \ / \ ^2$$

$$\left[\sqrt[4]{2}\left(\sqrt[4]{2}+1\right)\right]^2=x^2$$

Raspisemo lijevu stranu jednakosti prema pravilu za mnozenje potencija istih eksponenata, odnosno prema $a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$, slijedi:

$$\left(\sqrt[4]{2}\right)^2\left(\sqrt[4]{2}+1\right)^2=x^2$$

Prema prijasnjem razmatranju prisjetim se da vrijedi $\left(\sqrt[4]{2}\right)^2 = \sqrt{2}$, slijedi:

$$\underbrace{\left(\sqrt[4]{2}\right)^2}_{\sqrt{2}}\left(\sqrt[4]{2}+1\right)^2 = x^2$$

$$\sqrt{2}\left(\sqrt[4]{2}+1\right)^2 = x^2$$

Raspisemo drugi clan produkta s lijeve strane jednakosti prema izrazu za kvadrat binoma, odnosno prema $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, slijedi:

$$\sqrt{2}\left[\left(\sqrt[4]{2}\right)^2 + 2\cdot\sqrt[4]{2}\cdot 1 + 1^2\right] = x^2$$

Prisjetim se da vrijedi $\left(\sqrt[4]{2}\right)^2 = \sqrt{2}$, slijedi:

$$\sqrt{2}\left[\underbrace{\left(\sqrt[4]{2}\right)^2}_{\sqrt{2}} + 2\sqrt[4]{2}+1\right] = x^2$$

$$\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+2\sqrt[4]{2}+1\right) = x^2$$

Zapisemo $\sqrt{2}$ kao $\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2}$, slijedi:

$$\sqrt{2}\left(\underbrace{\sqrt{2}}_{2\sqrt{2}-\sqrt{2}} + 2\sqrt[4]{2}+1\right) = x^2$$

$$\sqrt{2}\left(2\sqrt{2}-\sqrt{2}+2\sqrt[4]{2}+1\right) = x^2$$

$$\sqrt{2}\left(2\sqrt{2}+2\sqrt[4]{2}-sqrt2+1\right) = x^2$$

Izlucimo 2 iz prva dva clana sume u zagradi na lijevoj strani jednakosti, slijedi:

$$\sqrt{2}\left[2\left(\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}\right)-\sqrt{2}+1\right] = x^2$$

Prisjetim se da vrijedi $\sqrt{2}+\sqrt[4]{2} = x$, slijedi:

$$\sqrt{2}\left[2\underbrace{\left(\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}\right)}_{x}-\sqrt{2}+1\right] = x^2$$

$$\sqrt{2}\left(2x-\sqrt{2}+1\right) = x^2$$

Rijesimo se zagrade na lijevoj strani jednakosti, slijedi:

$$\sqrt{2} \cdot 2x + \sqrt{2} \cdot \left(-\sqrt{2}\right) + \sqrt{2} \cdot 1 = x^2$$

$$2x\sqrt{2} - \underbrace{\left(\sqrt{2}\right)^2}_{2} + \sqrt{2} = x^2$$

$$2x\sqrt{2} - 2 + \sqrt{2} = x^2$$

Prebacim -2 s lijeve na desnu stranu jednakosti, slijedi:

$$2x\sqrt{2} + \sqrt{2} = x^2 + 2$$

Izlucim $\sqrt{2}$ iz clanova sume na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$\sqrt{2}\,(2x + 1) = x^2 + 2$$

Pomnozim cijelu jednakost s $\dfrac{1}{2x+1}$, slijedi:

$$\sqrt{2}\,(2x + 1) = x^2 + 2 \;/ \cdot \frac{1}{2x+1}$$

$$\sqrt{2}\,(2x + 1) \cdot \frac{1}{2x+1} = \left(x^2 + 2\right) \cdot \frac{1}{2x+1}$$

Pokratim sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{\sqrt{2}\cancel{(2x+1)}^{1}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2x+1}_{1}} = \frac{x^2+2}{1} \cdot \frac{1}{2x+1}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{x^2+2}{2x+1}$$

$$\sqrt{2} = \frac{x^2+2}{2x+1}$$

Promatrajuci dobiveni izraz zakljucujemo da je broj na lijevoj strani iracionalan, dok se na desnoj strani nalazi izraz koji sadrzi samo racionalne brojeve. Kako su racionalni brojevi zatvoreni na sve osnovne operacije (zbrajanje, oduzimanje, mnozenje i dijeljenje), sto zapravo znaci da je rezultat osnovnih operacija racionalnih brojeva opet racionalan broj, desna je strana ubiti racionalni broj (napominjem da je potenciranje zapravo mnozenje broja sa samim sobom n puta).

To je nemoguce jer broj moze biti ili racionalan ili iracionalan, dakle pretpostavka je kriva. To zapravo znaci da je broj dan u zadatku iracionalan. Time je zadatak rijesen.

✖ Zadatak 9: (str. 55) 5) Dokazi da je broj $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ iracionalan.

Rjesenje: Pretpostavimo suprotno, odnosno da je broj $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ racionalan. To zapravo znaci da postoji $x \in \mathbb{Q}$ (x racionalan broj) tako da vrijedi:

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}} = x$$

Kvadriramo cijelu jednakost, slijedi:

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}} = x \;/\; ^2$$

$$\left(\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^2 = x^2$$

$$1+\sqrt{2+\sqrt{3}} = x^2$$

Prebacimo 1 na desnu stranu, slijedi:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = x^2 - 1$$

Kvadriramo cijelu jednakost, slijedi:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = x^2 - 1 \;/\; ^2$$

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 = \left(x^2 - 1\right)^2$$

$$2+\sqrt{3} = \left(x^2 - 1\right)^2$$

Prebacimo 2 na desnu stranu, slijedi:

$$\sqrt{3} = \left(x^2 - 1\right)^2 - 2$$

Promatrajuci dobiveni izraz zakljucujemo da je broj na lijevoj strani iracionalan, dok se na desnoj strani nalazi izraz koji sadrzi samo racionalne brojeve. Kako su racionalni brojevi zatvoreni na sve osnovne operacije (zbrajanje, oduzimanje, mnozenje i dijeljenje), sto zapravo znaci da je rezultat osnovnih operacija racionalnih brojeva opet racionalan broj, desna je strana ubiti racionalni broj (napominjem da je potenciranje zapravo mnozenje broja sa samim sobom n puta).

To je nemoguce jer broj moze biti ili racionalan ili iracionalan, dakle pretpostavka je kriva. To zapravo znaci da je broj dan u zadatku iracionalan. Time je zadatak rijesen.

∽✧∾

✠ Zadatak 10: (str. 55) 3) Dokazi da je broj $\left(\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ racionalan.

Rjesenje: Rijesimo se zagrade, slijedi:

$$\left(\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=$$

$$=\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=(\star)$$

Pomnozimo drugi clan sume prema pravilu za mnozeje korijena istih stupnjeva, odnosno prema $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$, slijedi:

$$(\star)=\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{5}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)}=(\star\star)$$

Prepoznajemo izraz pod korijenom drugog sumanda kao razliku kvadrata pa je sredjujemo prema izrazu $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, slijedi:

$$(\star\star)=\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2^2-\underbrace{\left(\sqrt{5}\right)^2}_{5}}=$$

$$=\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{4-5)}=$$

$$=\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{-1}=$$

$$=\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+(-1)=(\diamondsuit)$$

Kako bismo mogli izmoziti prvi clan sume, oba dva korijena moraju biti istog stupnja. Prisjetimo se da stupanj korijena mozemo mijenjati prema izrazu $\sqrt[m\cdot c]{a^{n\cdot c}}=\sqrt[m]{a^n}$. Dakle promijenit cemo drugi clan produkta prvog clana sume, slijedi:

$$(\diamondsuit)=\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3\cdot 2]{\left(2-\sqrt{5}\right)^{1\cdot 2}}-1=$$

$$=\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{\left(2-\sqrt{5}\right)^{2}}-1=(\diamondsuit\diamondsuit)$$

Raspisemo izraz pod drugim korijenom prvog clana sume prema izrazu za kvadrat binoma, odnosno prema $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$, slijedi:

$$(\diamondsuit\diamondsuit)=\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{2^2-2\cdot 2\cdot\sqrt{5}+\underbrace{\left(\sqrt{5}\right)^2}_{5}}-1=$$

$$=\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{4-4\sqrt{5}+5}-1=(\spadesuit)$$

Zbrojimo sto se zbrojiti moze pod drugim korijenom prvog clana sume, slijedi:

$$(\spadesuit) = \sqrt[6]{9+4\sqrt{5}} \cdot \sqrt[6]{9-4\sqrt{5}} - 1 = (\spadesuit\spadesuit)$$

Sredimo prvi clan sume prema pravilu za mnozenje korijena istih stupnjeva, odnosno prema $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$, slijedi:

$$(\spadesuit\spadesuit) = \sqrt[6]{\left(9+4\sqrt{5}\right)\left(9-4\sqrt{5}\right)} - 1 = (\clubsuit)$$

Prepoznajemo izraz pod korijenom drugog sumanda kao razliku kvadrata pa je sredjujemo prema izrazu $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, slijedi:

$$(\clubsuit) = \sqrt[6]{9^2 - \left(4\sqrt{5}\right)^2} - 1 = (\clubsuit\clubsuit)$$

Raspisemo drugi clan sume pod korijenom prema pravilu za mnozenje potencija istih eksponenata, odnosno prema $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$, slijedi:

$$\begin{aligned}(\clubsuit\clubsuit) &= \sqrt[6]{81 + 4^2\left(\sqrt{5}\right)^2} - 1 = \\ &= \sqrt[6]{81 - 4^2\underbrace{\left(\sqrt{5}\right)^2}_{5}} - 1 = \\ &= \sqrt[6]{81 - 16 \cdot 5} - 1 = \sqrt[6]{81-80} - 1 = \\ &= \sqrt[6]{1} - 1 = 1 - 1 = 0\end{aligned}$$

Kako je kranji rezultat jednak 0, a 0 je racionalan pokazali smo sto smo trebali. Time je zadatak rijesen.

✖ Zadatak 11: (str. 55) 2) Dokazi da je broj $\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ racionalan.

Rjesenje: Neka je broj $\sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{7+4\sqrt{3}}$ jednak nekom realnom broju x. To zapravo znaci da postoji $x \in \mathbb{R}$ (x realan broj) tako da vrijedi:

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{7+4\sqrt{3}} = x$$

Kvadriramo cijelu jednakost, slijedi:

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{7+4\sqrt{3}} = x \; / \; ^2$$

$$\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^2 = x^2$$

Raspisem lijevu stranu jednakosti prema izrazu za kvadrat binoma, odnosno prema $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, slijedi:

$$\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2 + 2\cdot\sqrt{7-4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^2 = x^2$$

$$7-4\sqrt{3}+2\sqrt{7-4\sqrt{3}}\sqrt{7+4\sqrt{3}}+7+4\sqrt{3}=x^2$$

Pokratim suprotne izraze te zbrojim sto se zbrojiti dade, slijedi:

$$7\cancel{-4\sqrt{3}}+2\sqrt{7-4\sqrt{3}}\sqrt{7+4\sqrt{3}}+7+\cancel{4\sqrt{3}}=x^2$$

$$14+2\sqrt{7-4\sqrt{3}}\sqrt{7+4\sqrt{3}}=x^2$$

Sredimo drugi clan sume prema pravilu za mnozenje korijena istih stupnjeva, odnosno prema $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$, slijedi:

$$14+2\sqrt{\left(7-4\sqrt{3}\right)\left(7+4\sqrt{3}\right)}=x^2$$

Prepoznajemo izraz pod korijenom drugog sumanda kao razliku kvadrata pa je sredjujemo prema izrazu $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, slijedi:

$$14+2\sqrt{7^2-\left(4\sqrt{3}\right)^2}=x^2$$

Raspisemo drugi clan sume pod korijenom prema pravilu za mnozenje potencija istih eksponenata, odnosno prema $a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$, slijedi:

$$14+2\sqrt{49-4^2\left(\sqrt{3}\right)^2}=x^2$$

$$14+2\sqrt{49-4^2\underbrace{\left(\sqrt{3}\right)^2}_{3}}=x^2$$

$$14+2\sqrt{49-16\cdot 3}=x^2$$

$$14+2\sqrt{49-48}=x^2$$

$$14+2\sqrt{1}=x^2$$

$$14+2\cdot 1=x^2$$

$$14+2=x^2$$

$$16=x^2$$

Korijenujemo dobiveni izraz, slijedi:

$$16=x^2\ /\sqrt{}$$

$$\sqrt{16} = \sqrt{x^2}$$

$$4 = \pm x$$

Dakle dvije su mogucnosti, vrijedi:

$$-x = 4 \quad \text{ili} \quad x_2 = 4$$

Uocimo da je jedno rjesenje $x_2 = 4$ dok cemo drugo dobiti kad sredimo prvu jednadzbu tako da je izmnozimo s -1, slijedi:

$$-x = 4 \; / \cdot (-1)$$

$$-x \cdot (-1) = 4 \cdot (-1)$$

$$x_1 = -4$$

Dakle drugo rjesenje jednadzbe jest $x_1 = -4$.

Kako su obje dobivene vrijednosti za broj x racionalni brojevi, a izraz iz teksta zadatka jednak broju x zakljucujemo da je izraz zadan u tekstu zadatka racionalan broj. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 11: (str. 55) 5) Dokazi da je broj $\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}}$ racionalan.

Rjesenje: Neka je broj $\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}}$ jednak nekom realnom broju x. To zapravo znaci da postoji $x \in \mathbb{R}$ (x realan broj) tako da vrijedi:

$$\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} = x$$

Kubiram cijelu jednakost, slijedi:

$$\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} = x \; /\, ^2$$

$$\left(\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}}\right)^3 = x^3$$

Lijevu stranu jednakosti raspisujem prema pravilu za kubiranje binoma, odnosno $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$, slijedi:

$$\left(\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}\right)^3 + 3 \cdot \left(\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} +$$

$$+ 3 \cdot \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}}\right)^3 = x^3$$

$$20-14\sqrt{2}+3\left(\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)^2\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+$$

$$+3\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\right)^2+20+14\sqrt{2}=x^3$$

Pokratim suprotne izraze te zbrojim sto se zbrojiti dade, slijedi:

$$20\cancel{-14\sqrt{2}}+3\left(\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)^2\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+$$

$$+3\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\right)^2+20+\cancel{14\sqrt{2}}=x^3$$

$$40+3\left(\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)^2\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+3\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\right)^2=x^3$$

Prebacim broj 40 na desnu starnu jednakosti, slijedi:

$$3\left(\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)^2\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+3\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\right)^2=x^3-40$$

Nadalje prisjetim se kako se potenciraju potencije, odnosno da vrijedi izraz $(a^n)^m=a^{n\cdot m}$. No kako su n i m racionalni brojevi, a mnozenje je komutativno u skupu racionalnih brojeva mogu pisati:

$$(a^n)^m=a^{n\cdot m}=a^{m\cdot n}$$

No primjenim li opet pravilo potenciranja potencija, odnosno izraz $(a^n)^m=a^{n\cdot m}$, slijedi:

$$(a^n)^m=a^{n\cdot m}=a^{m\cdot n}=(a^m)^n$$

$$(a^n)^m=(a^m)^n$$

Drugim rijecima vidim da mogu zamijeniti "redosijed" eksponenata i dobit cu isti rezultat. Sva ova razmatranja radim iz razloga da prilagodim izraze $\left(\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)^2$ i $\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\right)^2$ racunu. U tu svrhu prisjetim se da korijene mogu prikazati u obliku potencija koristeci izraz $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$. Proces prilagodbe provest cu samo za jedan od navedena dva izraza, racunam:

$$\left(\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)^2=\left(\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Primjenim jednakost $(a^n)^m=(a^m)^n$, slijedi:

$$\left(\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)^2=\left[\left(20-14\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2=\left[\left(20-14\sqrt{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{3}}=(\star)$$

Primjenim opet izraz $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, odnosno izraz za prikaz korijena u obliku potencija, slijedi:

$$(\star) = \sqrt[3]{\left(20 - 14\sqrt{2}\right)^2}$$

Vratim se u glavni racun sa svim saznanjima, slijedi:

$$3\underbrace{\left(\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}\right)^2}_{\sqrt[3]{\left(20-14\sqrt{2}\right)^2}}\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + 3\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}\underbrace{\left(\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}}\right)^2}_{\sqrt[3]{\left(20+14\sqrt{2}\right)^2}} = x^3 = 40$$

$$3\sqrt[3]{\left(20 - 14\sqrt{2}\right)^2}\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + 3\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}\sqrt[3]{\left(20 + 14\sqrt{2}\right)^2} = x^3 = 40$$

Pomnozimo korijene u oba clana sume lijeve strane jednakosti prema pravilu za mnozenje korijena istih stupnjeva, odnosno prema $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$, slijedi:

$$3\sqrt[3]{\left(20 - 14\sqrt{2}\right)^2\left(20 + 14\sqrt{2}\right)} + 3\sqrt[3]{\left(20 - 14\sqrt{2}\right)\left(20 + 14\sqrt{2}\right)^2} = x^3 = 40$$

Nadalje prisjetimo se da je x^2 zapravo jednako $x^2 = x \cdot x$. Primjenimo li to na jednakost mora vrijediti:

$$3\sqrt[3]{\left(20 - 14\sqrt{2}\right)\left(20 - 14\sqrt{2}\right)\left(20 + 14\sqrt{2}\right)} +$$

$$+ 3\sqrt[3]{\left(20 - 14\sqrt{2}\right)\left(20 + 14\sqrt{2}\right)\left(20 + 14\sqrt{2}\right)} = x^3 - 40$$

Nadalje prepoznajemo dio izraza pod oba korijena kao razliku kvadrata pa je sredjujemo prema izrazu $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, slijedi:

$$3\sqrt[3]{(20 - 14\sqrt{2})\underbrace{(20 - 14\sqrt{2})(20 + 14\sqrt{2})}_{20^2-\left(14\sqrt{2}\right)^2}} +$$

$$+ 3\sqrt[3]{\underbrace{(20 - 14\sqrt{2})(20 + 14\sqrt{2})}_{20^2-\left(14\sqrt{2}\right)^2}(20 + 14\sqrt{2})} = x^3 - 40$$

$$3\sqrt[3]{\left(20 - 14\sqrt{2}\right)\left[20^2 - \left(14\sqrt{2}\right)^2\right]} + 3\sqrt[3]{\left[20^2 - \left(14\sqrt{2}\right)^2\right]\left(20 + 14\sqrt{2}\right)} = x^3 - 10$$

Raspisemo drugi clan sume u drugoj odosno prvoj zagradi pod korijenima prema pravilu za mnozenje potencija istih eksponenata, odnosno prema $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$, slijedi:

$$3\sqrt[3]{(20 - 14\sqrt{2})\left[400 - 14^2\underbrace{(\sqrt{2})^2}_{2}\right]} +$$

$$+ 3\sqrt[3]{\left[400 - 14^2\underbrace{(\sqrt{2})^2}_{2}\right](20 + 14\sqrt{2})} = x^3 - 40$$

$$3\sqrt[3]{\left(20-14\sqrt{2}\right)(400-196\cdot 2)}+$$

$$+\,3\sqrt[3]{(400-196\cdot 2)\left(20+14\sqrt{2}\right)}=x^3-40$$

$$3\sqrt[3]{\left(20-14\sqrt{2}\right)(400-392)}+$$

$$+\,3\sqrt[3]{(400-392)\left(20+14\sqrt{2}\right)}=x^3-40$$

$$3\sqrt[3]{\left(20-14\sqrt{2}\right)8}+3\sqrt[3]{8\left(20+14\sqrt{2}\right)}=x^3-40$$

Imajuci na umu pravilo za mnozenje korijena istih stupnjeva, odnosno $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$, slijedi:

$$3\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\cdot\underbrace{\sqrt[3]{8}}_{2}+3\cdot\underbrace{\sqrt[3]{8}}_{2}\cdot\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}=x^3-40$$

$$3\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\cdot 2+3\cdot 2\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}=x^3-40$$

Izmnozim brojeve koji stoje uz korijene, slijedi:

$$6\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}+6\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}=x^3-40$$

Izlucim 6 iz oba clana na lijevoj strani, slijedi:

$$6\left(\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\right)=x^3-40$$

Primjetim da se u zagradi s lijeve strane jednakosti upravo nalazi izraz iz teksta zadatka, slijedi:

$$\underbrace{6\left(\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\right)}_{x}=x^3-40$$

$$6x=x^3-40$$

Prebacim $6x$ na desnu stranu i dobijem jednadzbu:

$$x^3-6x-40=0$$

Kako je izraz dan u tekstu zadatka sigurno realan, ako postoji realno rijesenje dane jednazbe izraz iz teksta zadatka bit ce jednak tom rjesenju. Da bih odredio rjesenja dane jednadzbe sluzim se sljedecom tvrdnjom:

Tvrdnja: Ako polinom $P(x)$ n-tog stupnja

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

ima racionalnu nul-tocku tada ona mora biti oblika $\frac{x}{y}$ pri cemu je x dijelitelj slobodnog koeficijenta a_0, dok je y dijelitelj vodeceg koeficijenta a_n.

Napomena: Nul-tocka polinoma i rjesenje pripadne jednadzbe su sinonimi, jednake stvari!

Kako je vodeci koeficijent u nasem slucaju jednak 1, a jedini dijelitelj broja 1 jest on sam, svi kandidati biti ce oblika $\frac{x}{1} = x$. Pri tome je x kao sto kaze tvrdnja djelitelj slobodnog koeficijenta, koji je u nasem slucaju jednak -40. Dakle svi kandidati su $\{1, -1, 2, -2, 4, -4, 5, -5, 10, -10, 20, -20, 40, -40\}$. Do rjesenja cu doci tako da svaki od ovih brojeva uvrstim u jednadzbu i gledam jeli rezultat jednak 0. Mi cemo postupak provesti samo za broj 4 jer on jest rjesenje jednadzbe, slijedi:

$$\underbrace{x}_{4}{}^{3} - 6\underbrace{x}_{4} - 40 = 0$$

$$4^3 - 6 \cdot 4 - 40 = 0$$

$$64 - 24 - 40 = 0$$

$$40 - 40 = 0$$

$$0 = 0$$

Kako je lijeva strane jednakosti jednaka desnoj broj $x_1 = 4$ stvarno jest jedno racionalno rjesenje dane jednadzbe.

Da bismo dobili preostala rjesenja dane jednadzbe koristim se sljedecom tvrdnjom:

Tvrdnja: Ako je x_0 nul-tocka polinoma n-tog stupnja

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

tada vrijedi:

$$(x - x_0) \mid a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

Odnosno polinom $(x - x_0)$ dijeli polinom $P(x)$.

Dakle ono sto cemo dalje napraviti jest podijeliti polinom s lijeve strane jednadzbe $x^3 - 6x = 40 = 0$ s polinomom $D(x) = x - 4$, odnosno:

$$\left(x^3 - 6x - 40\right) : (x - 4) =$$

Postupak dijeljenja provodimo na nacin da podijelimo vodeci clan dijeljenika s vodecim clanom dijelitelja, dakle x^3 s x. Rezultat te operacije jest $x^3 : x = \frac{\overset{x^2}{\cancel{x^3}}}{\cancel{x}_1} = \frac{x^2}{1} = x^2$. Taj broj upsemo na desnu stranu. Nadalje svaki clan dijelitelja pomnozimo s tim brojem, dakle s x^2 promijenimo predznak rezultatu i to potpisemo ispod odgovarajuce potencije dijeljenika. Zbrojimo potpisane polinome. U nastavku slijedi provedeni prvi korak, vrijedi:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\big(x^3 & + & & - & 6x & - & 40) \quad : \quad (x-4) = x^2 \\
-x^3 & + & 4x^2 & & & & \\
\hline
 & & 4x^2 & - & 6x & - & 40
\end{array}
$$

Potpuno isti postupak provedemo na dobiveni polinom $P_1(x) = 4x^2 - 6x - 40$, slijedi:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\big(x^3 & + & & - & 6x & - & 40) \quad : \quad (x-4) = x^2 + 4x \\
-x^3 & + & 4x^2 & & & & \\
\hline
 & & 4x^2 & - & 6x & - & 40 \\
 & & -4x^2 & + & 16x & & \\
\cline{3-7}
 & & & & 10x & - & 40
\end{array}
$$

Te na kraju ponovimo isti postupak za dobiveni polinom $P_2(x) = x - 5$, slijedi:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\big(x^3 & + & & - & 6x & - & 40) \quad : \quad (x-4) = x^2 + 4x + 10 \\
-x^3 & + & 4x^2 & & & & \\
\hline
 & & 4x^2 & - & 6x & - & 40 \\
 & & -4x^2 & + & 16x & & \\
\cline{3-7}
 & & & & 10x & - & 40 \\
 & & & & -10x & + & 40 \\
\cline{5-7}
 & & & & & & 0
\end{array}
$$

Dakle rezultat dijeljenja jest polinom $Q(x) = x^2 + 4x + 10$. Sada jos preostaje rijesiti tu kvadratnu jednadzbu $x^2 + 4x + 10 = 0$. To cemo uciniti koristeci izraz za rijesenja kvadratne jednadzbe:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Racunamo:

$$x_1, x_2 = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 40}}{2}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-4 \pm \sqrt{-24}}{2}$$

Dakle ova jednadzba nema rjesenja u realnim brojevima (pod korijenom se nalazi negativan broj sto znaci da ce rjesenja biti kompleksnih brojevi). To znaci da je jedino realno rijesenje pocetne jednadzbe $x_1 = 4$. No kako je to rijesenje ujedno i racionalno, a rekli smo na pocetku da cemo uzeti da je x jednak izrazu iz teksta zadatka, zapravo mora vrijediti:

$$\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} = \underbrace{x}_{4}$$

$$\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} = 4$$

Odnosno vidim da izraz dan u zadatku zaista jest racionalan. Time je zadatak rijesen.

✤ Zadatak 11: (str. 55) 6) Dokazi da je broj $\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}} - \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}}$ racionalan.

Rjesenje: Neka je broj $\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}} - \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}}$ jednak nekom realnom broju x. To zapravo znaci da postoji $x \in \mathbb{R}$ (x realan broj) tako da vrijedi:

$$\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}} - \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}} = x$$

Kvadriram cijelu jednakost, slijedi:

$$\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}} - \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}} = x \ /\ ^2$$

$$\left(\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}} - \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}}\right)^2 = x^2$$

Lijevu stranu jednakosti raspisem prema pravilu za kvadriranje binoma, odnosno prema $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, slijedi:

$$\left(\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}} + \left(\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}}\right)^2 = x^2$$

$$\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}-2\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}}+\frac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}=x^2$$

Sredimo drugi clan sume prema pravilu za mnozenje korijena istih stupnjeva, odnosno prema $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$, slijedi:

$$\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}-2\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}\cdot\frac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}}+\frac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}=x^2$$

$$\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}-2\sqrt{\frac{\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)}{\left(17-12\sqrt{2}\right)\left(17+12\sqrt{2}\right)}}+\frac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}=x^2$$

Prepoznajemo izraze u brojniku i nazivniku razlomka pod korijenom drugog sumanda kao razliku kvadrata pa ih sredjujemo prema izrazu $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, slijedi:

$$\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}-2\sqrt{\frac{3^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}{17^2-\left(12\sqrt{2}\right)^2}}+\frac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}=x^2$$

Raspisemo drugi clan sume u brojniku i nazivniku razlomka pod korijenom prema pravilu za mnozenje potencija istih eksponenata, odnosno prema $a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$, slijedi:

$$\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}-2\sqrt{\frac{9-2^2\left(\sqrt{2}\right)^2}{289-12^2\left(\sqrt{2}\right)^2}}+\frac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}=x^2$$

$$\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}-2\sqrt{\frac{9-4\overbrace{\left(\sqrt{2}\right)^2}^{2}}{289-144\underbrace{\left(\sqrt{2}\right)^2}_{2}}}+\frac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}=x^2$$

$$\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}-2\sqrt{\frac{9-4\cdot 2}{289-144\cdot 2}}+\frac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}=x^2$$

$$\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}-2\sqrt{\frac{9-8}{289-288}}+\frac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}=x^2$$

$$\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}-2\sqrt{\frac{1}{1}}+\frac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}=x^2$$

$$\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}-2\sqrt{1}+\frac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}=x^2$$

$$\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}-2\cdot 1+\frac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}=x^2$$

$$\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}-2+\frac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}=x^2$$

Preostaje jos samo zbrojiti prvi i posljednji clan sume, da bismo to ucinili svedemo ih na zajednicki nazivnik $\left(17+12\sqrt{2}\right)\left(17-12\sqrt{2}\right)$, slijedi:

$$\frac{\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(17+12\sqrt{2}\right)+\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(17-12\sqrt{2}\right)}{\left(17-12\sqrt{2}\right)\left(17+12\sqrt{2}\right)}-2=x^2$$

Izraz u nazivniku razlomka prepoznajem kao razliku kvadrata pa ga sredjujemo prema izrazu $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, slijedi:

$$\frac{\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(17+12\sqrt{2}\right)+\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(17-12\sqrt{2}\right)}{17^2-\left(12\sqrt{2}\right)^2}-2=x^2$$

Raspisemo drugi clan sume u nazivniku razlomka prema pravilu za mnozenje potencija istih eksponenata, odnosno prema $a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$, slijedi:

$$\frac{\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(17+12\sqrt{2}\right)+\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(17-12\sqrt{2}\right)}{289-12^2\underbrace{\left(\sqrt{2}\right)^2}_{2}}-2=x^2$$

$$\frac{\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(17+12\sqrt{2}\right)+\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(17-12\sqrt{2}\right)}{289-144\cdot 2}-2=x^2$$

$$\frac{\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(17+12\sqrt{2}\right)+\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(17-12\sqrt{2}\right)}{289-288}-2=x^2$$

$$\frac{\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(17+12\sqrt{2}\right)+\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(17-12\sqrt{2}\right)}{1}-2=x^2$$

$$\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(17+12\sqrt{2}\right)+\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(17-12\sqrt{2}\right)-2=x^2$$

Rijesim se obje zagrade na lijevoj strani prema pravilu svaki sa svakim, slijedi:

$$\begin{aligned}&3\cdot 17+3\cdot 12\sqrt{2}-2\sqrt{2}\cdot 17-2\sqrt{2}\cdot 12\sqrt{2}+\\&\quad+3\cdot 17+3\cdot\left(-12\sqrt{2}\right)+2\sqrt{2}\cdot 17+2\sqrt{2}\cdot\left(-12\sqrt{2}\right)-2=x^2\end{aligned}$$

$$51+36\sqrt{2}-34\sqrt{2}-24\underbrace{\left(\sqrt{2}\right)^2}_{2}+51-36\sqrt{2}+34\sqrt{2}-24\underbrace{\left(\sqrt{2}\right)^2}-2=x^2$$

Pokratim suprotne izraze, slijedi:

$$51+\cancel{36\sqrt{2}}\cancel{-34\sqrt{2}}-24\cdot 2+51\cancel{-36\sqrt{2}}+\cancel{34\sqrt{2}}-24\cdot 2-2=x^2$$

$$51-48+51-48-2=x^2$$

$$3+3-2=x^2$$
$$4=x^2$$

Korijenujemo dobiveni izraz, slijedi:

$$4=x^2 \ /\sqrt{\ }$$
$$\sqrt{4}=\sqrt{x^2}$$
$$2=\pm x$$

Dakle dvije su mogucnosti, vrijedi:

$$-x=2 \quad \text{ili} \quad x_2=2$$

Uocimo da je jedno rjesenje $x_2 = 2$ dok cemo drugo dobiti kad sredimo prvu jednadzbu tako da je izmnozimo s -1, slijedi:

$$-x=2 \ / \cdot(-1)$$
$$-x\cdot(-1)=2\cdot(-1)$$
$$x_1=-2$$

Dakle drugo rjesenje jednadzbe jest $x_1 = -2$.

Kako su obje dobivene vrijednosti za broj x racionalni brojevi, a izraz iz teksta zadatka jednak broju x zakljucujemo da je izraz zadan u tekstu zadatka racionalan broj. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 16: (str. 55) 1) Dokazi da je broj $\cos 15°$ iracionalan.

Rjesenje: Prije svega, suprotno tvrdnji zadatka, pretpostavimo da je broj $\cos 15°$ racionalan. Nadalje koristit cemo cinjenicu da znamo cemu je jednak kosinus kuta od $30°$, jer primjecujemo da je to dvostruki kut kuta od $15°$. Naime imajuci na umu izraz za kosinus dvostukog kuta, odnosno $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, slijedi:

$$\cos 30° = \cos^2 15° - \sin^2 15°$$

Nadalje prisjetimo se temeljnog trigonometrijskog identiteta, odnosno jednakosti $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, temeljem koje mozemo uociti da mora vrijediti $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Dakle nadalje slijedi:

$$\cos 30° = \cos^2 15° - \underbrace{\sin^2 15°}_{1-\cos^2 15°}$$

$$\cos 30° = \cos^2 15° - \left(1-\cos^2 15°\right)$$

$$\cos 30^\circ = \cos^2 15^\circ - 1 + \cos^2 15^\circ$$

$$\cos 30^\circ = 2\cos^2 15^\circ - 1$$

Kosinus kuta od 30° jednak je $\frac{\sqrt{3}}{2}$, slijedi:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\cos^2 15^\circ - 1$$

Pomnozimo cijeli izraz s 2, slijedi:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\cos^2 15^\circ - 1 \ / \cdot 2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = 2\cos^2 15^\circ \cdot 2 - 1 \cdot 2$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{\sqrt{3}}{{}_1\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}^1}{1} = 4\cos^2 15^\circ - 2$$

$$\sqrt{3} = 4\cos^2 15^\circ - 2$$

Promotrimo li dobiveni izraz mozemo uociti da se na njegovoj lijevoj strani nalazi iracionalan broj. Zakljucimo nadalje kakav je broj na desnoj strani. Na pocetku razmatranja pretpostavili smo da je $\cos 15^\circ$ racionalan. No to znaci da je i $\cos^2 15^\circ$ takodjer racinalan jer je to ubiti mnozenje racionalnog broja samim sa sobom, a racionalni brojevi su zatvoreni na mnozenje (umnozak dva racionalna broja je opet racionalan broj). No tada je ubiti desna strana zapravo racionalan broj jer su svi preostali brojevi racionalni (brojevi 4 i 2), a kako su racionalni brojevi zatvoreni na sve osnovne racunske operacije, rezultat ce biti racionalan broj.

No to je nemoguce. Na lijevoj strani je sada iracionalan, a na desnoj strani racionalan broj, a broj moze biti ili racionalan ili iracionalan. To znaci da je pretpostavka bila pogresna, odnosno broj $\cos 15^\circ$ je iracionalan. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 16: (str. 55) 2) Dokazi da je broj $\sin 15^\circ$ iracionalan.

Rjesenje: Koristit cemo rezultat prethodnog zadatka, odnosno da je broj $\cos 15^\circ$ iracionalan broj.

Suprotno tvrdnji zadatka, pretpostavimo da je broj $\sin 15^\circ$ racionalan. Nadalje koristit cemo cinjenicu da znamo cemu je jednak sinus kuta od 30°, jer primjecujemo da je to dvostruki kut kuta od 15°. Naime imajuci na umu izraz za sinus dvostukog kuta, odnosno $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, slijedi:

$$\sin 30° = 2\sin 15° \cos 15°$$

Znamo da je sinus kuta od 15° jednak $\frac{1}{2}$, dakle mora vrijediti:

$$\frac{1}{2} = 2\sin 15° \cos 15°$$

Pomnozimo cijelu jednadzbu s $\frac{1}{2\sin 15°}$, slijedi:

$$\frac{1}{2} = 2\sin 15° \cos 15° \ / \cdot \frac{1}{2\sin 15°}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sin 15°} = 2\sin 15° \cos 15° \cdot \frac{1}{2\sin 15°}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{1}{4\sin 15°} = \frac{{}^{1}\cancel{2\sin 15°}\cos 15°}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2\sin 15°}_{1}}$$

$$\frac{1}{4\sin 15°} = \frac{\cos 15°}{1}$$

$$\frac{1}{4\sin 15°} = \cos 15°$$

Promotrimo li dobiveni izraz mozemo uociti da se na njegovoj desnoj strani nalazi iracionalan broj (prethodni zadatak). Promotrimo kakav je broj na lijevoj strani izraza. Zbog pretpostavke da je $\sin 15°$ racionalan broj na lijevoj strani se nalazi izraz u kojem su samo racionalni brojevi. Kako su racionalni brojevi zatvoreni na sve osnovne racunske operacije (zbrajanjem, oduzimanjem, mnozenjem ili dijeljenjem dvaju racionalnih brojeva opet dobijemo racionalan broj), lijeva ce strana izraza nakon racuna opet biti racionalan broj.

No to je nemoguce. Na lijevoj strani je sada racionalan, a na desnoj strani iracionalan broj, a broj moze biti ili racionalan ili iracionalan. To znaci da je pretpostavka bila pogresna, odnosno broj $\sin 15°$ je iracionalan. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 16: (str. 55) 3) Dokazi da je broj $\operatorname{tg} 5°$ iracionalan.

Rjesenje: Suprotno tvrdnji zadatka, pretpostavimo da je broj $\operatorname{tg} 5°$ racionalan.

Nadalje koristit cemo cinjenicu da 10° dvostruki kut kuta od 5°. Naime imajuci na umu izraz za tangens dvostukog kuta, odnosno $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$, slijedi:

$$\operatorname{tg} 10^\circ = \frac{2\operatorname{tg} 5^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 5^\circ}$$

Na desnoj strani jednakosti sada se nalaze samo racionalni brojevi, zbog pretpostavke da je $\operatorname{tg} 5^\circ$ racionalan. Imajuci na umu da je kvadriranje nekog broja ustvari mnozenje tog broja sa samim sobom rezultat desne strane jednakosti bit ce racionalan broj. Razlog tome jest sto su racionalni brojevi zatvoreni na sve osnovne racunske operacije (zbrajanjem, oduzimanjem, mnozenjem ili dijeljenjem dvaju racionalnih brojeva opet dobijemo racionalan broj). No to znaci da je broj $\operatorname{tg} 10^\circ$ racionalan.

Nadalje koristeci se istim postupkom mozemo doci do zakljucka da je i $\operatorname{tg} 20^\circ$ racionalan, jer vrijedi:

$$\operatorname{tg} 20^\circ = \frac{2\operatorname{tg} 10^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 10^\circ}$$

No tada je prema istom principu i broj $\operatorname{tg} 40^\circ$ racionalan, jer vrijedi:

$$\operatorname{tg} 40^\circ = \frac{2\operatorname{tg} 20^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 20^\circ}$$

Dakle ako je broj $\operatorname{tg} 5^\circ$ racionalan tada su nuzno i brojevi $\operatorname{tg} 10^\circ$, $\operatorname{tg} 20^\circ$ i $\operatorname{tg} 40^\circ$ takodjer moraju biti racionalni. Odredimo kakav bi prema dosadasnjim saznanjima trebao biti tangens kuta od 30°. Imajuci na umu da vrijedi $30^\circ = 40^\circ - 10^\circ$, racunamo:

$$\operatorname{tg} \underbrace{30^\circ}_{40^\circ - 10^\circ} = \operatorname{tg}(40^\circ - 10^\circ) = (\star)$$

Prisjetimo se adicijskog teorema za tangens, odnosno izraza $\operatorname{tg}(x-y) = \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1+\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$, slijedi:

$$(\star) = \frac{\operatorname{tg} 40^\circ - \operatorname{tg} 10^\circ}{1+\operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 10^\circ}$$

Dakle vrijedi:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\operatorname{tg} 40^\circ - \operatorname{tg} 10^\circ}{1+\operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 10^\circ}$$

No tangens kuta od 30° jednak je $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, slijedi:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\operatorname{tg} 40^\circ - \operatorname{tg} 10^\circ}{1+\operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 10^\circ}$$

Pomnozimo cijeli izraz s 3, slijedi:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\operatorname{tg} 40^\circ - \operatorname{tg} 10^\circ}{1+\operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 10^\circ} \;/ \cdot 3$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 3 = \frac{\operatorname{tg} 40^\circ - \operatorname{tg} 10^\circ}{1 + \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 10^\circ} \cdot 3$$

Pokratim sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{\sqrt{3}}{{}_1\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}^1}{1} = 3\ \frac{\operatorname{tg} 40^\circ - \operatorname{tg} 10^\circ}{1 + \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 10^\circ}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} = 3\ \frac{\operatorname{tg} 40^\circ - \operatorname{tg} 10^\circ}{1 + \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 10^\circ}$$

$$\sqrt{3} = 3\ \frac{\operatorname{tg} 40^\circ - \operatorname{tg} 10^\circ}{1 + \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 10^\circ}$$

Promotrimo li dobiveni izraz mozemo uociti da se na njegovoj lijevoj strani nalazi iracionalan broj. Promotrimo kakav je broj na desnoj strani izraza. Kako su zbog pretpostavke da je $\operatorname{tg} 5^\circ$ racionalan broj i brojevi $\operatorname{tg} 10^\circ$ i $\operatorname{tg} 40^\circ$ racionalni na lijevoj strani se nalazi izraz u kojem su samo racionalni brojevi. Kako su racionalni brojevi zatvoreni na sve osnovne racunske operacije (zbrajanjem, oduzimanjem, mnozenjem ili dijeljenjem dvaju racionalnih brojeva opet dobijemo racionalan broj), lijeva ce strana izraza nakon racuna opet biti racionalan broj.

No to je nemoguce. Na lijevoj strani je sada racionalan, a na desnoj strani iracionalan broj, a broj moze biti ili racionalan ili iracionalan. To znaci da je pretpostavka bila pogresna, odnosno broj $\operatorname{tg} 5^\circ$ je iracionalan. Time je zadatak rijesen.