Racionalni brojevi

Zadatak 23: (str. 32) Ako je $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$, $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2$, $\frac{1}{c}+\frac{1}{a}=3$ koliko je $a+b+c$?

Rjesenje: Pokazat cemo da ovako postavljen zadatak nema rjesenja.

Dakle u sustini ovo je sustav od tri jednadzbe s tri nepoznanice:

$$\begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1 \\ \frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2 \\ \frac{1}{c}+\frac{1}{a}=3 \end{cases}$$

Usredotocimo se na prve dvije jednadzbe, odnosno na sljedeci sustav:

$$\begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1 \\ \frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2 \end{cases}$$

Oduzmimo dane jednadzbe, slijedi:

$$\begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1 \\ \frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2 \end{cases} \Big/ -$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1-2$$

Rijesimo se zagrade na lijevoj strani jednakosti, slijedi:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=1-2$$

Pokratimo suprotne izraze te zbrojimo sto se zbrojiti dade, slijedi:

$$\frac{1}{a}+\cancel{\frac{1}{b}-\frac{1}{b}}-\frac{1}{c}=1-2$$

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{c}=-1$$

Zajedno s trecom jednadzbom pocetnog sustava dobijemo sljedeci sustav dvije jednadzbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} \frac{1}{a}-\frac{1}{c}=-1 \\ \frac{1}{c}+\frac{1}{a}=3 \end{cases}$$

Zbrojimo dane jednadzbe, slijedi:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{c} = -1 \\ \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{a} = 3 \end{cases} \Bigg/ +$$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} = -1 + 3$$

Pokratimo suprotne izraze te zbrojimo sto se zbrojiti dade, slijedi:

$$\frac{1}{a} \cancel{- \frac{1}{c}} + \cancel{\frac{1}{c}} + \frac{1}{a} = -1 + 3$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a} = 2$$

$$\frac{1+1}{a} = 2$$

$$\frac{2}{a} = 2$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\dfrac{a}{2}$, slijedi:

$$\frac{2}{a} = 2 \Big/ \cdot \frac{a}{2}$$

$$\frac{2}{a} \cdot \frac{a}{2} = 2 \cdot \frac{a}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^1\cancel{2}}{{}_1\cancel{a}} \cdot \frac{\cancel{a}^1}{\cancel{2}_1} = \frac{{}^1\cancel{2}}{1} \cdot \frac{a}{\cancel{2}_1}$$

$$\frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 1} = \frac{1 \cdot a}{1 \cdot 1}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{a}{1}$$

$$1 = a$$

Pokusajmo sada odrediti cemu je jednak b. Uvrstimo vrijednost za a u prvu jednadzbu sustava danog u zadatku, slijedi:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{b} = 1$$

1

$$1 + \frac{1}{b} = 1$$

Pokratimo jedinice s obje strane jednakosti, slijedi:

$$\cancel{1} + \frac{1}{b} = \cancel{1}$$

$$\frac{1}{b} = 0$$

Pomnozimo cijelu jednakost s b, slijedi:

$$\frac{1}{b} = 0 \Big/ \cdot b$$

$$\frac{1}{b} \cdot b = 0 \cdot b$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{1}{{}_1\cancel{b}} \cdot \frac{\cancel{b}^1}{1} = 0 \cdot b$$

$$\frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 1} = 0 \cdot b$$

$$\frac{1}{1} = 0$$

$$1 = 0$$

No ovo je nemoguce. Dakle dani sustav jednadzbi nema rjesenja. Time je zadatak "rijesen".

Zadatak 25: (str. 32) Izracunaj:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + ... + \frac{1}{99 \cdot 101}$$

Rjesenje: Primjetimo da je n-ti clan sume jednak:

$$\frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)}$$

Naime uvrstimo li umjesto nepoznanice n broj 1 u gornji izraz dobivamo:

$$\frac{1}{(2\underset{\uparrow 1}{n} - 1) \cdot (2\underset{\uparrow 1}{n} + 1)} = \frac{1}{(2 \cdot 1 - 1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)} =$$

$$= \frac{1}{(2-1) \cdot (2+1)} = \frac{1}{1 \cdot 3}$$

Dakle dobili smo prvi clan sume zadane u zadatku. Nadalje cemo provesti postupak svodjenja na parcijalne razlomke na razlomku $\dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$.

Pokusat cemo ga zapisati kao zbroj razlomaka iz cijih je nazivnika nastao zajednicki nazivnik danog razlomka. Uocimo da je izraz $(2n-1)\cdot(2n+1)$ mogao nastati samo mnozenjem izraza $2n-1$ i $2n+1$ (mogao je nastati i mnozenjem danog izraza jedinicom no to nije odvec zanimljiva situacija).

Znaci trebalo bi vrijediti:

$$\frac{x}{2n-1}+\frac{y}{2n+1}=\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$$

Pri cemu su x i y neki racionalni brojevi koje trebamo naci. Svedemo razlomke na lijevoj strani jednakosti na zajednicki nazivnik $(2n-1)\cdot(2n+1)$, slijedi:

$$\frac{x\cdot(2n+1)+y\cdot(2n-1)}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$$

Rijesimo se zagrada u brojniku razlomka na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$\frac{x\cdot 2n+x\cdot 1+y\cdot 2n+y\cdot(-1)}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$$

$$\frac{2xn+x+2yn-y}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$$

Zamijenimo poredak clanova sume u brojniku razlomka na lijevoj strani jednakosti, slijedi:

$$\frac{2xn+x+2yn-y}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\frac{2xn+2yn+x-y}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$$

Izlucimo n iz prva dva clana sume u brojniku na lijevoj strani jednskosti, slijedi:

$$\frac{n\cdot(2x+2y)+x-y}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$$

Nas je zadatak pronaci racionalne brojeve x i y takve da razlomci budu jednaki. U tu svrhu primjetimo da broj 1 u brojniku razlomka na desnoj strani jednakosti mozemo zapisati kao $0\cdot n+1$, slijedi:

$$\frac{n\cdot(2x+2y)+x-y}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{\overset{0\cdot n+1}{\uparrow}\atop 1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\frac{n\cdot(2x+2y)+x-y}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{0\cdot n+1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$$

Primjetimo da su nazivnici jednaki pa jedino sto moramo jest osigurati da brojnici budu jednaki. No uocimo da ce se to dogoditi onda kada izrazi uz n budu jednaki i izrazi koji ne sadrze n budu jednaki, odnosno:

$$\frac{n\cdot(2x+2y)+x-y}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{0\cdot n+1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} 2x+2y=0 \\ x-y=1 \end{cases}$$

Preostaje rijesiti dobiveni sustav jednadzbi. Pomnozimo drugu jednadzbu s 2, slijedi:

$$\begin{cases} 2x+2y=0 \\ x-y=1 \ / \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+2y=0 \\ x\cdot 2-y\cdot 2=1\cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+2y=0 \\ 2x-2y=2 \end{cases}$$

Zbrojimo obje jednadzbe, slijedi:

$$\left.\begin{cases} 2x+2y=0 \\ 2x-2y=2 \end{cases}\right/ +$$

$$2x+2y+2x-2y=0+2$$

Pokratimo suprotne izraze, slijedi:

$$2x+\cancel{2y}+2x\cancel{-2y}=0+2$$

$$2x+2x=0+2$$

Pozbrojimo sto se zbrojiti dade, slijedi:

$$4x=2$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{2}$, slijedi:

$$4x=2 \ \Big/ \cdot\frac{1}{2}$$

$$4x\cdot\frac{1}{4}=2\cdot\frac{1}{4}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{4}x}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{4}_{1}}=\frac{{}^{1}\cancel{2}}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{4}_{2}}$$

$$\frac{1 \cdot x \cdot 1}{1 \cdot 1} = \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 2}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Preostaje jos odrediti cemu je jednak y. To cemo uciniti pomocu druge jednadzbe, slijedi:

$$\underset{\frac{1}{2}}{x} - y = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} - y = 1$$

Prebacimo $\frac{1}{2}$ s lijeve na desnu stranu jednakosti, slijedi:

$$\frac{1}{2} - y = 1 \quad \Rightarrow \quad -y = 1 - \frac{1}{2}$$

Svedemo razlomke na desnoj strani jednakosti na zajednicki nazivnik 2, slijedi:

$$-y = \frac{1 \cdot 2 - 1 \cdot 1}{2} = \frac{2 - 1}{2} = \frac{1}{2}$$

Pomnozimo cijelu jednakost s -1, slijedi:

$$-y = \frac{1}{2} \Big/ \cdot (-1)$$

$$-y \cdot (-1) = \frac{1}{2} \cdot (-1)$$

$$y = -\frac{1}{2}$$

Konacno sada vrijedi:

$$\frac{\overset{\frac{1}{2}}{x}}{2n - 1} + \frac{\overset{-\frac{1}{2}}{y}}{2n + 1} = \frac{1}{(2n - 1) \cdot (2n + 1)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}}{2n - 1} + \frac{-\frac{1}{2}}{2n + 1} = \frac{1}{(2n - 1) \cdot (2n + 1)}$$

Odnosno negativan predznak u brojniku drugog razloma sume na lijevoj strani mozemo "preseliti" ispred samog razlomka, slijedi:

$$\frac{\frac{1}{2}}{2n-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{2n+1}=\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}}{2n-1}+\left[-\frac{\frac{1}{2}}{2n+1}\right]=\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$$

Rijesimo se zagrade na lijevoj strani jednakosti, slijedi:

$$\frac{\frac{1}{2}}{2n-1}-\frac{\frac{1}{2}}{2n+1}=\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$$

Razlomke na lijevoj strani jednakosti sredimo prema pravilu za sredjivanje dvojnog razlomka, odnsno prema $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\dfrac{a\cdot d}{b\cdot c}$, slijedi:

$$\frac{\frac{\frac{1}{2}}{2n-1}}{1}-\frac{\frac{\frac{1}{2}}{2n+1}}{1}=\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1\cdot 1}{2\cdot(2n-1)}-\frac{1\cdot 1}{2\cdot(2n+1)}=\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$$

Rijesimo se zagrada u nazivnicima razlomaka ne lijevoj strani jednakosti, slijedi:

$$\frac{1}{2\cdot 2n+2\cdot(-1)}-\frac{1}{2\cdot 2n+2\cdot 1}=\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$$

$$\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n+2}=\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$$

Dakle n-ti clan sume dane u zadatku zapravo ima oblik

$$\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n+2}$$

Zapisimo u ovom obliku prvi, drugi, treci i posljednji (odnosno 50.) clan sume dane u zadatku, slijedi:

za $n = 1$ $$\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n+2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(2\cdot 1-1)\cdot(2\cdot 1+1)} = \frac{1}{4\cdot 1-2} - \frac{1}{4\cdot 1+2}$$
$$\frac{1}{(2-1)\cdot(2+1)} = \frac{1}{4-2} - \frac{1}{4+2}$$
$$\frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$$

za $n = 2$ $$\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n+2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(2\cdot 2-1)\cdot(2\cdot 2+1)} = \frac{1}{4\cdot 2-2} - \frac{1}{4\cdot 2+2}$$
$$\frac{1}{(4-1)\cdot(4+1)} = \frac{1}{8-2} - \frac{1}{8+2}$$
$$\frac{1}{3\cdot 5} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10}$$

za $n = 3$ $$\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n+2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(2\cdot 3-1)\cdot(2\cdot 3+1)} = \frac{1}{4\cdot 3-2} - \frac{1}{4\cdot 3+2}$$
$$\frac{1}{(6-1)\cdot(6+1)} = \frac{1}{12-2} - \frac{1}{12+2}$$
$$\frac{1}{5\cdot 7} = \frac{1}{10} - \frac{1}{14}$$

za $n = 50$ $$\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n+2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(2\cdot 50-1)\cdot(2\cdot 50+1)} = \frac{1}{4\cdot 50-2} - \frac{1}{4\cdot 50+2}$$
$$\frac{1}{(100-1)\cdot(100+1)} = \frac{1}{200-2} - \frac{1}{200+2}$$
$$\frac{1}{99\cdot 101} = \frac{1}{198} - \frac{1}{202}$$

Nakon svih ovih razmatranja spremni smo odrediti kolika je vijednost pocetne sume. Imajuci sve zakljucke na umu, suma zadana u zadatku poprima sljedeci oblik:

$$\underbrace{\frac{1}{1\cdot 3}}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}+\underbrace{\frac{1}{3\cdot 5}}_{\frac{1}{6}-\frac{1}{10}}+\underbrace{\frac{1}{5\cdot 7}}_{\frac{1}{10}-\frac{1}{14}}+...+\underbrace{\frac{1}{99\cdot 101}}_{\frac{1}{198}-\frac{1}{202}}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{14}+...+\frac{1}{198}-\frac{1}{202}=(\Box)$$

Uocimo da su pocevsi od drugog clana sume pa sve do posljednjeg svaka dva uzastopna clana suprotni brojevi te ih mogu pokratiti, slijedi:

$$(\Box)=\frac{1}{2}\cancel{-\frac{1}{6}}+\cancel{\frac{1}{6}}\cancel{-\frac{1}{10}}+\cancel{\frac{1}{10}}\cancel{-\frac{1}{14}}+...+\cancel{\frac{1}{198}}-\frac{1}{202}=(\Box\Box)$$

No sada od cijele sume preostaje samo razlika prvog i posljednjeg clana nove sume, odnosno vrijedi:

$$(\Box\Box)=\frac{1}{2}-\frac{1}{202}=(\Box\Box\Box)$$

Dobivene razlomke svedemo na zajednicki nazivnik 202, slijedi:

$$(\Box\Box\Box)=\frac{1}{2}-\frac{1}{202}=\frac{1\cdot 101-1\cdot 1}{202}=\frac{101-1}{202}=\frac{100}{202}=(\ast)$$

Pokratimo dobiveni razlomak, slijedi:

$$(\ast)=\frac{{}^{50}\cancel{100}}{\cancel{202}_{101}}=\frac{50}{101}$$

Dakle suma dana u zadatku jednaka je $\frac{50}{101}$. Time je zadatak rijesen.