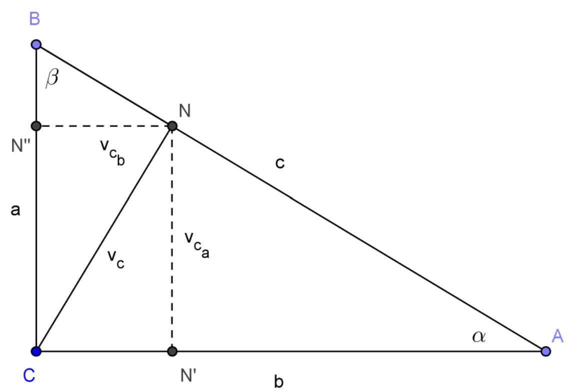
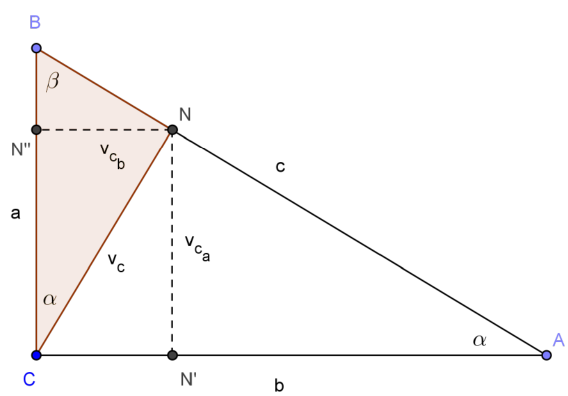
Detaljnija rjesenja zadataka

4.4 Primjene na pravokutni trokut
Zadatak 31: (str. 130)
Nacrtamo skicu za pocetak.

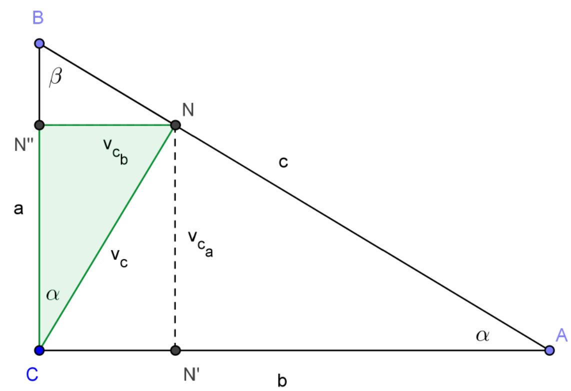


$$v_c^2 = v_{c_a}^2 + v_{c_b}^2$$

Zadane su duljine $v_{c_a} = 3cm$ i $v_{c_b} = 5cm$, dok je zadatak izracunati povrsinu danog trokuta. Usredotocimo se na trokut ΔCNB (na sljedecoj slici osjencan smjedjom bojom). Uocimo da kut pri vrhu C u tom srednjem trokutu mora biti iste velicine kao i kut kod vrha A u najvecem trokutu sto iznosi α.



Nadalje ocito je sada da je i kut pri vrhu C u trokutu $\Delta CN'N"$ jednak takodjer α (na sljedecoj slici osjencan zelenom bojom).



Sada iz zeleno osjencanog tokuta mozemo izracunati velicinu kuta α koristeci se trigonometrijskom funkcijom tangens, dakle vrijedi:

$$\tan\alpha = \frac{v_{c_b}}{v_{c_a}}$$

$$\tan\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{3}{5}$$

$$\alpha = 30°57'$$

Nadalje iz srednjeg trokuta sada izracunam duljinu stranice a, jer promatrajuci smedje osjencani trokut vidim da vrijedi:

$$\cos\alpha = \frac{v_c}{a} \; / \cdot a$$

$$a \cdot \cos\alpha = v_c \; / : \cos\alpha$$

$$a = \frac{v_c}{\cos\alpha}$$

$$a = \frac{v_c}{\cos\alpha}$$

Iz trokuta osjencanog zelenom bojom, posto je on pravokutan slijedi:

$$v_c^2 = v_{c_a}^2 + v_{c_b}^2$$

$$v_c^2 = 5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$$

$$v_c = \sqrt{34}$$

$$v_c = 5.83cm$$

Dakle racunam nadalje duljinu stranice a:

$$a = \frac{5.83}{\cos 30°57'} = \frac{5.83}{0.8} = 6.8cm$$

Pogledamo li pocetni trokut mozemo formulu za njegovu povrsinu malo modificirati jer vrijedi:

$$P = \frac{a \cdot b}{2}$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{a} \ / \cdot a$$

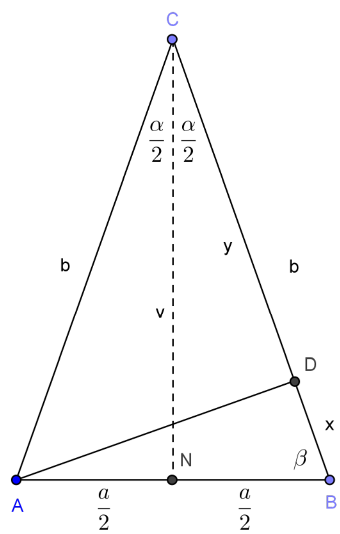
$$a \cdot \cot \alpha = b$$

Pa je sada formula za povrsinu jednaka (ovdje naglasavam da je cot zapravo skracenica za kotangens), nadalje vrijednost za tangens kuta α vec imam, dakle vrijednost kotangensa kuta α jednaka je reciprocnoj vrijednosti dakle $\frac{5}{3}$:

$$P = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \cot \alpha$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 6.8^2 \cdot \frac{5}{3} = 38.533cm^2$$

4.5 Primjene u planimetriji
Zadatak 11: (str. 141)
Nacrtamo skicu za pocetak.

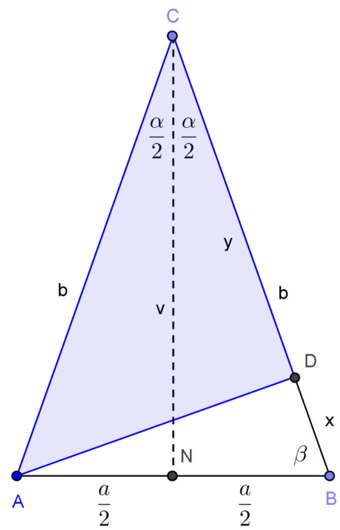


Dakle u zadatku je zadana duljina osnovice, odnosno duljina stranice $a = 12cm$, dok je omjer dijelova kraka b jednak $y : x = 3 : 5$. Uzmemo li neki proizvoljan $k \in \mathbb{R}$ mozemo pisati:

$$y = 3k$$

$$x = 5k$$

$$b = x + y = 3k + 5k = 8k$$



Usredotocimo se sada na plavo osjencan trokut na gornjoj slici i izracunajmo velicinu kuta α, dakle vrijedi:

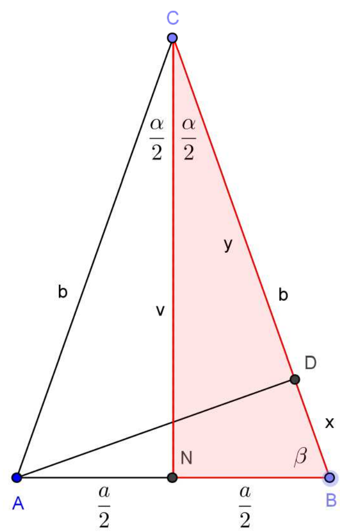
$$\cos\alpha = \frac{y}{b}$$

$$\cos\alpha = \frac{3k}{8k}$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{8}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\frac{3}{8}$$

$$\alpha = 67^\circ 58'$$



Pogledamo li sada trokut osjencan crvenom bojom mozemo izracunati velicinu visine v posto znamo velicinu kuta α te velicinu osnovice a, vrijedi:

$$\frac{a}{2} = \frac{12}{2} = 6cm$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{67^\circ 58'}{2} = 33^\circ 59'$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{v} = \frac{a}{2v} \ / \cdot 2$$

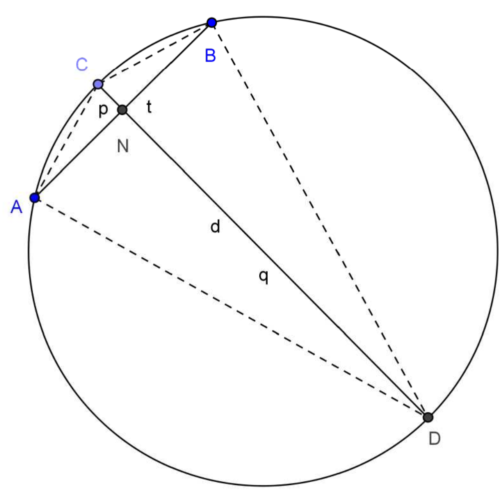
$$2\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{v} \ / \cdot \frac{v}{2\tan\frac{\alpha}{2}}$$

$$v = \frac{12}{2\tan\frac{\alpha}{2}}$$

$$v = \frac{12}{2\tan 33^\circ 59'} = 8.899cm$$

$$P = \frac{a \cdot v}{2} = \frac{12 \cdot 8.899}{2} = 53.396cm^2$$

Zadatak 29: (str. 142)
Dakle u zadatku je zadano da je duljina tetive $t = \frac{3}{4}r$, a potrebno je izracunati valicinu obodnog kuta nad tom tetivom. Zbog prirode obodnog kuta nad tetivom imat cemo dva rijesenja. Nacrtajmo skicu, imajuci na umu da je svaki obodni kut nad tetivom jednak ukoliko se vrh obodnog kuta nalazi na istom luku odredjenom krajnjim tockama tetive uzmimo da se taj vrh nalazi na dijametru kruznice, tada dijametar raspolavlja tetivu na pola:

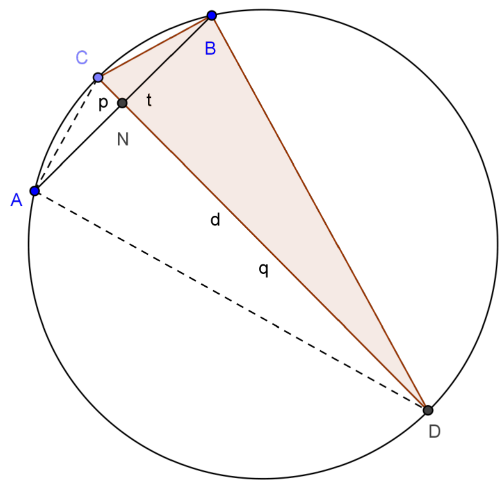


Dakle ono sto vrijedi je sljedece:

$$d = 2 \cdot r$$

$$t = \frac{3}{4}r$$

$$d = p + q$$



Iz svojstva pravokutnog trokuta znamo da mora vrijediti:

$$p + q = d = 2 \cdot r \ \Rightarrow p = 2 \cdot r - q$$

$$p \cdot q = \left(\frac{t}{2}\right)^2 = \left(\frac{\frac{3}{4}r}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{8}r\right)^2 = \frac{9}{64}r^2$$

Dakle iz ove dvije jednakosti se dobija se sljedeci izraz:

$$(2r - q) \cdot q = \frac{9}{64}r^2$$

Sredimo li ovaj izraz dolazimo do sljedece kvadratne jednadzbe po q:

$$q^2 - 2r \cdot q + \frac{9}{64}r^2 = 0$$

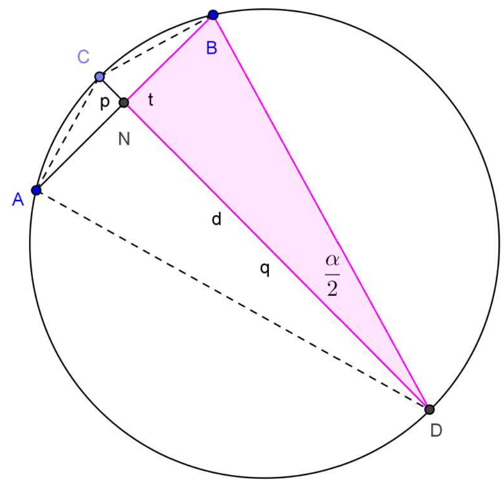
$$q_1, q_2 = \frac{2r \pm \sqrt{(-2r)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{9}{64}r^2}}{2}$$

$$q_1, q_2 = \frac{2r \pm \sqrt{4r^2 - \frac{9}{16}r^2}}{2}$$

$$q_1, q_2 = \frac{2r \pm \sqrt{\frac{55}{16}r^2}}{2}$$

$$q_1, q_2 = \frac{2r \pm \frac{\sqrt{55}}{4}r}{2}$$

$$q_1, q_2 = \frac{8 \pm \sqrt{55}}{8}r$$



Gledajuci sada rozno osjencan trokut uocavamo da moramo uzeti vecu vrijednost za q od prethodno izracunate dvije, nadalje za taj trokut vrijedi:

$$tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{t}{2}}{q} = \frac{t}{2q}$$

$$tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{3}{4}r}{2\frac{8+\sqrt{55}}{8}r} = \frac{3}{8+\sqrt{55}} = 0.194$$

$$\frac{\alpha}{2} = tan^{-1}0.194 = 11°1' \; / \cdot 2$$

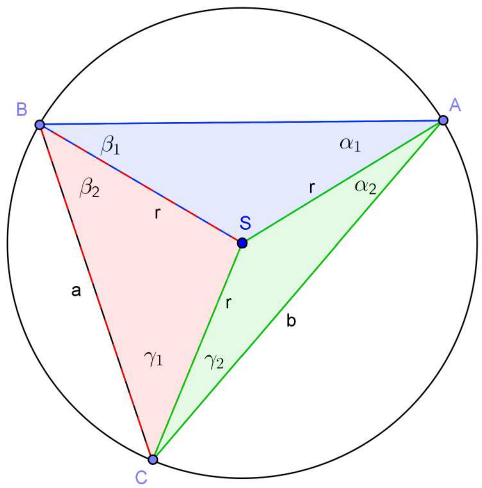
$$\alpha_1 = 22°2'$$

Kako vrijedi da je zbroj dvaju obodnih kuteva nad istom tetivom kojima se vrhovi nalaze na razlicitm lukovima odredjenim vrhovima tetive jednak $180°$ postoji jos jedno rijesenje:

$$\alpha_2 = 180° - \alpha_1 = 180° - 22°2' = 157°58'$$

Napomena: Da smo uzeli manju vrijednost za q, prvo bi izracunali velicinu kuta α_2!

Zadatak 32: (str. 142)
Dakle u zadatku je dana kruznica radijusa $3.6cm$ dakle $r = 3.6cm$, te je u nju upisan trokut kojem su duljine dviju stranica jednake $5cm$ odnosno $5.8cm$, neka su to stranice $a = 5cm$ i $b = 5.8cm$. Trebamo odrediti velicine kuteva te duljinu stranice c. Nacrtajmo skicu.



Dakle iz skice se vidi da smo srediste kruznice spojili sa svakim od vrhova trokuta. Ocito je da su osjencani trokuti jednakokracni jer se svaki od njih sastoji od dva radijusa i jedne od stranice polaznog trokuta. Nadalje posto su oni jednakokracni vrijedi da su im kutevi pri osnovici jednaki sto znaci:

$$\alpha_1 = \beta_1$$

$$\beta_2 = \gamma_1$$

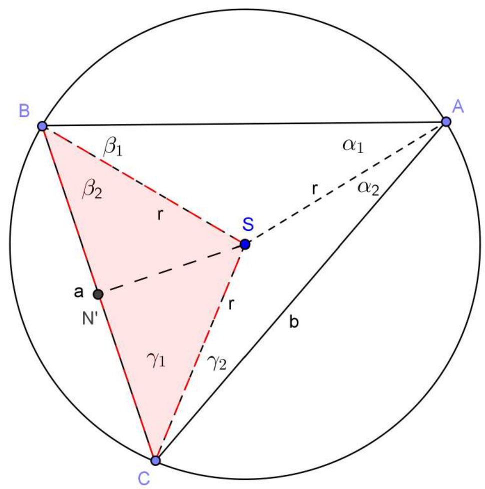
$$\gamma_2 = \alpha_2$$

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\beta = \beta_1 + \beta_2$$

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$$

Dakke zakljucujemo da trebamo izracunati tri razlicite velicine kuta i to α_1, β_2 i γ_2 oznacene na skici. promotrimo prvo crveno osjencan trokut, spustimo visinu na stranicu a u tom trokutu, imajmo na umu da noziste N' te visine dijeli stranicu a na dva jednaka dijela, a crveno osjencan trokut na dva sukladna pravokutna trokuta:



Sada vidimo da za kut β_2 mora vrijediti:

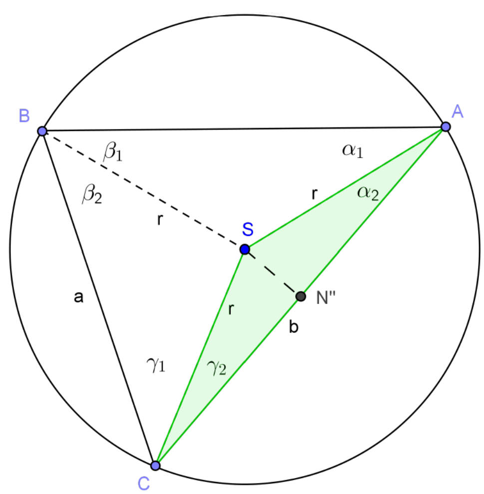
$$\cos\beta_2 = \frac{\frac{a}{2}}{r} = \frac{a}{2r}$$

$$\cos\beta_2 = \frac{5}{2\cdot 3.6}$$

$$\beta_2 = \cos^{-1}\left(\frac{5}{7.2}\right)$$

$$\beta_2 = 46^\circ 1' \Rightarrow \beta_2 = \gamma_1 = 46^\circ 1'$$

Nadalje pogledajmo plavo osjencan trokut te spustimo visinu na stranicu b u tom trokutu, imajmo na umu da noziste N'' te visine dijeli stranicu b na dva jednaka dijela, a zeleno osjencan trokut na dva sukladna pravokutna trokuta:



Vidimo da za kut γ_2 mora vrijediti:

$$\cos\gamma_2 = \frac{\frac{b}{2}}{r} = \frac{b}{2r}$$

$$\cos\gamma_2 = \frac{5.8}{2\cdot 3.6}$$

$$\gamma_2 = \cos^{-1}\left(\frac{5.8}{7.2}\right)$$

$$\gamma_2 = 36^\circ 20' \Rightarrow \beta_2 = \alpha_2 = 36^\circ 20'$$

Nadalje ono sto mora vrijediti je sljedece:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = 180^\circ$$

No kako vrijedi $\alpha_1 = \beta_1$, $\gamma_1 = \beta_2$ i $\alpha_2 = \gamma_2$ gronji se izraz svede na:

$$\beta_1 + \gamma_2 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 2\cdot\beta_1 + 2\cdot\beta_2 + 2\cdot\gamma_2 = 180^\circ$$

$$2\cdot\beta_1 + 2\cdot 46^\circ 1' + 2\cdot 36^\circ 20' = 180^\circ$$

$$2\cdot\beta_1 + 164^\circ 42' = 180^\circ$$

$$2\cdot\beta_1 = 15^\circ 18'$$

$$\beta_1 = 7^\circ 39'$$

Dakle sada iz cinjenica da vrijedi $\alpha_1 = \beta_1$, $\gamma_1 = \beta_2$, $\alpha_2 = \gamma_2$, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta = \beta_1 + \beta_2$ i $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ dobijemo velicine kuteva α, β te γ :

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 7^\circ 39' + 36^\circ 20' = 43^\circ 59'$$

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 = 7^\circ 39' + 46^\circ 1' = 53^\circ 40'$$

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = 46^\circ 1' + 36^\circ 20' = 82^\circ 21'$$

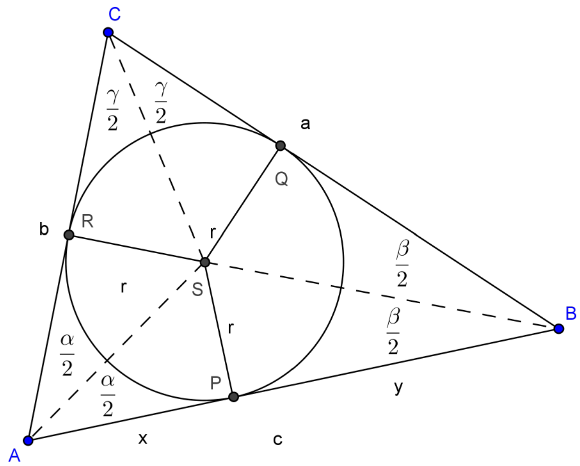
Dakle preostaje jos izracunati duljinu stranice c no ali vidimo da ako napavimo potpuno isti postupak za plavo osjencan trokut mora vrijediti:

$$\cos\beta_1 = \frac{\frac{c}{2}}{r} = \frac{c}{2r}$$

$$\cos 7^\circ 39' = \frac{c}{2\cdot 3.6}$$

$$c = \cos 7^\circ 39' \cdot 7.2 = 7.13cm$$

<u>Zadatak 36</u>: (str. 142)
Dakle u zadatku je dan radijus upisane kruznice, dakle $r = 25cm$ te velicine dvaju kuteva trokuta, $\beta = 50^\circ$ i $\gamma = 74^\circ$ dok se trazi velicina najdulje stranice dakle stranice c (nasuprot najveceg kuta je najdulja stranica, kod nas je to ocito γ). Nacrtajmo skicu:



Odmah mozemo izracunati velicinu kuta α:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

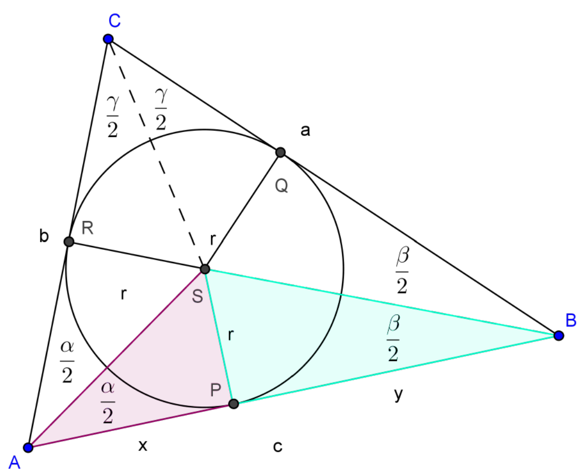
$$\alpha + 50^\circ + 74^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha + 124^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha = 56^\circ$$

Napomena: Spojnice vrhova i sredista trokutu upisane kruznice dijele odgovarajuce kuteve na pola iz cinjenice da se srediste trukutu upisane kruznice nalazi upravo na sjecistima simetrala kuteva!

Nadalje iz skice je ocito da mora vrijediti $c = x + y$ pa nam je dakle cilj izracunati duljine tih dviju duzina, odnosno duljine od x i y.



Iz crveno osjencanog trokuta izracunat cemo velicnu od x, a iz plavozeleno sojencanog trokuta velicinu od y. Iz prvog trokuta (osjencanog crvenom bojom) vidimo da mora vrijediti:

$$tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{x}$$

$$tan\frac{56^\circ}{2} = \frac{25}{x}$$

$$tan28^\circ = \frac{25}{x} \; / \cdot \frac{x}{tan28^\circ}$$

$$x = \frac{25}{tan28^\circ} = 47.01cm$$

Iz drugog trokuta (osjencanog plavozelenom bojom) vidimo da mora vrijediti:

$$tan\frac{\beta}{2} = \frac{r}{y}$$

$$tan\frac{50^\circ}{2} = \frac{25}{y}$$

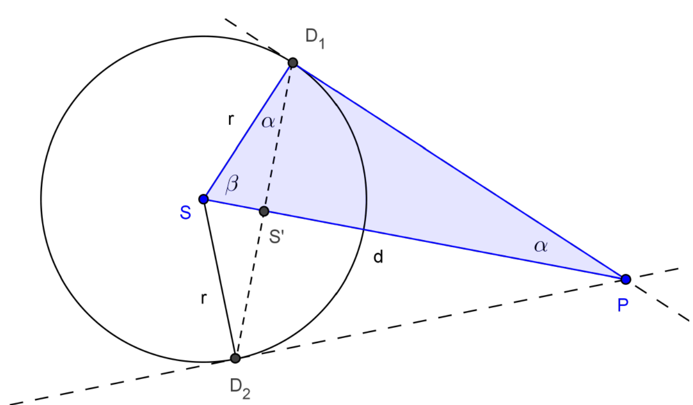
$$tan25^\circ = \frac{25}{y} \; / \cdot \frac{y}{tan25^\circ}$$

$$y = \frac{25}{tan25^\circ} = 53.61cm$$

Te sada na kraju vidimo da duljina od c iznosi:

$$c = x + y = 47.01 + 53.61 = 100.63cm$$

Zadatak 41: (str. 142)
Iz zadatka se dade iscitati da je dana neka kruznica ciji je polumjer r jednak $7.5cm$. Nadalje dana je udaljenost neke tocke P koja se nalazi izvan kruznice i ona iznosi $d = \left|\overline{PS}\right| = 16.8cm$. Iz tocke P na kruznicu su povucene tangente. Zanima nas udaljenost diralista tangenti i kruznice. Nacrtajmo skicu da vidimo o cemu se ovjde radi:



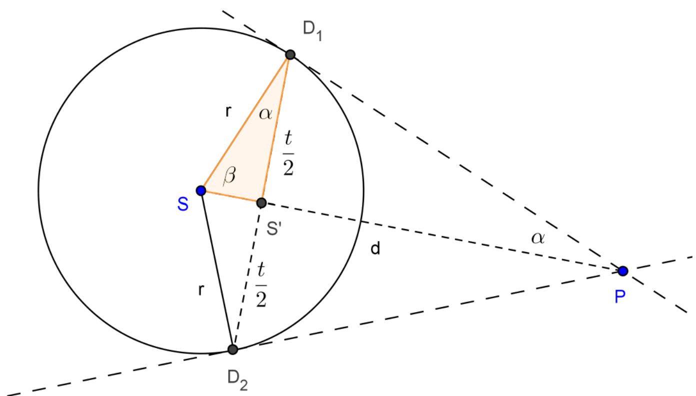
Iz plavo osjencanog trokuta izracunat cemo velicinu kuta α (mogli bi izracunati velicinu kuta $beta$, sasvim je svjejedno), dakle uocimo da vrijedi sljedece:

$$sin\alpha = \frac{r}{d}$$

$$sin\alpha = \frac{7.5}{16.8}$$

$$\alpha = sin^{-1}\left(\frac{7.5}{16.8}\right)$$

$$\alpha = 26^{\circ}30'$$



Uocimo nadalje da su plavo osjencan trokut (sa prijasnje slike) i narancasto osjencan trokut slicni, vidimo da imaju zajednicki kut $beta$ te da su oba pravokutni sto znaci da im treci kutevi moraju biti isti, pa ako je u vecem taj kut jednak α tada on mora biti α i u manjem. Sada iz narancasto osjencanog trokuta vidim da mora vrijediti:

$$cos\alpha = \frac{\frac{t}{2}}{r}$$

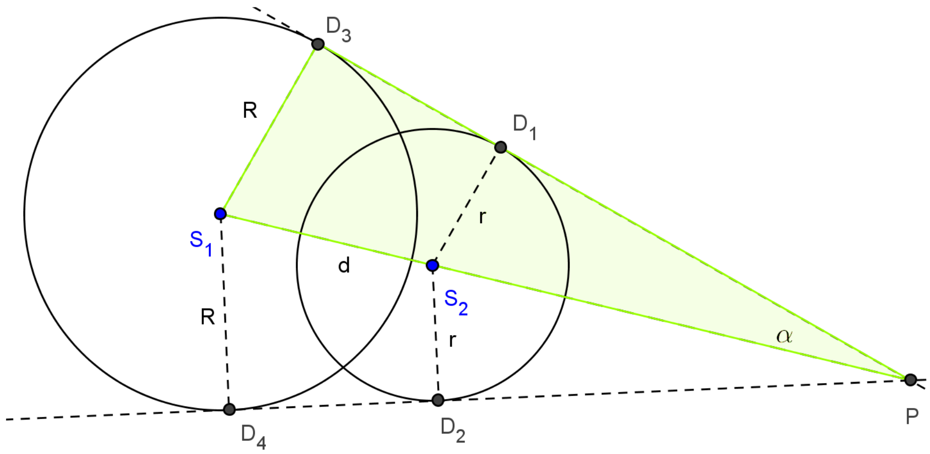
$$cos\alpha = \frac{t}{2r}$$

$$cos26^{\circ}30' = \frac{t}{2 \cdot 7.5}$$

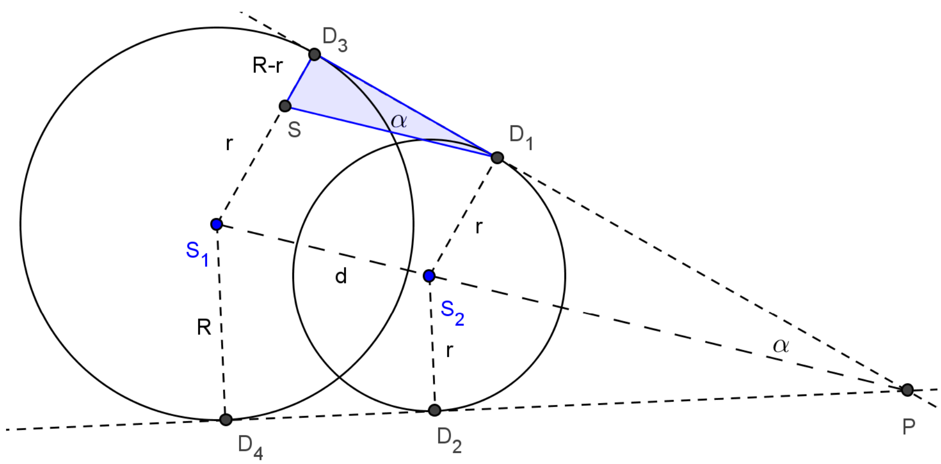
$$t = 2 \cdot 7.5 \cdot cos26^{\circ}30'$$

$$t = 13.42cm$$

Zadatak 42: (str. 142)
Dakle citajuci zadatak vidimo da su dani sljedeci podaci, radijusi dviju kruznica i to $R = 13cm$ te $r = 9cm$, nadalje dana je udaljenost izmedju sjedista dviju kruznica, dakle $d = \left|\overline{S_1S_2}\right| = 5cm$. Zanima nas koji kut zatvaraju zajednicke tangenete tih dviju kruznica. Nacrtajmo skicu:



Dodajmo ovoj skici nekoliko elemenata. Povucimo paralelu sa duzinom $\overline{S_1S_2}$ kroz tocku D_1. Sjeciste te paralele sa duzinom $\overline{S_1D_3}$ oznacimo sa S. Iz skice se jasno vidi sa smo time nacrtali paralelogram $S_1S_2D_1D_3$. Obratimo pozornost na plavo osjencan trokut:



Uocimo prvo da je kut kod vrha D_1 plavo osjencanog trokuta isti kao i kod vrha P zeleno osjencanog trokuta sa prijasnje slike. Nadlaje kako je cetverokut $S_1S_2D_1D_3$ paralelogramu vidimo da je $d = \left|\overline{S_1S}\right| = r$ dok je onda $\left|\overline{SD_3}\right| = R - r$. Nadalje, opet zbog toga jer se radi o paralelogramu, $d = \left|\overline{SD_1}\right| = d$. Nadalje, kako je plavo osjencan trokut pravokutan, vrijedi sljedece:

$$sin\alpha = \frac{R-r}{d}$$

$$sin\alpha = \frac{13-9}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\alpha = sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$$

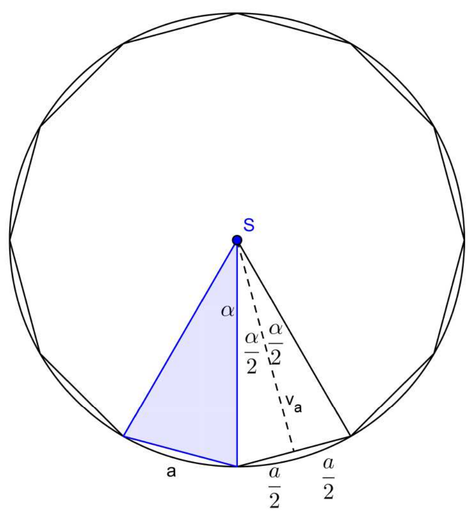
$$\alpha = 53°7'$$

No pripazimo da smo time izracunli samo pola vrijednosti kuta, dakle moramo dobiveni rezultat pomnoziti sa dva kako bi dobili konacno rijesenje:

$$\alpha = 53°7' \;/\cdot 2$$

$$\xi = 2 \cdot \alpha = 106°14'$$

Zadatak 49: (str. 142)
NAPOMENA: KRIVO JE INTERPRETIRAN ZADATAK, UZETO JE DA JE MNOGOKUT UPISAN, A NE OPISAN KRUZNICI. BIT CE ISPRAVLJENO U DOGLEDNO VRIJEME! AKO SE TO UZME U OBZIR ZADATAK JE DOBRO RIJESEN. HVALA NA RAZUMIJEVANJU.
Dakle trebam izracunati povrsinu pravilnog dvanaesterog kuta ako mi je zadan polumjer njemu opisane kruznice, dakle ako je $r = 4cm$. Nacrtajmo skicu:

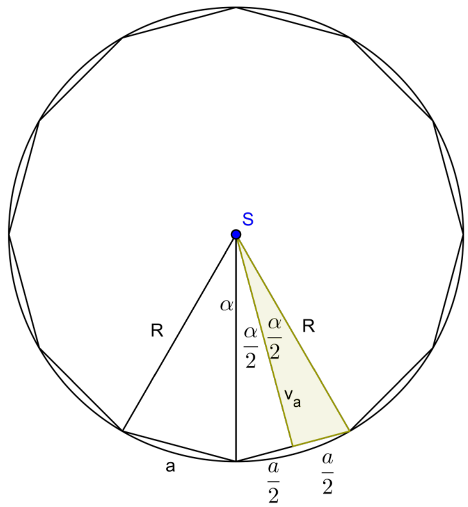


Znamo da se dvanaesterokut zapravo sastoji od dvanaest istovjetnih trokuta poput plavo osjencanog na slici. Kut α sredisnji je kut pravilnog monogokuta i lako se izracuna. Ako nakon toga uspijemo izracunati povrsinu tog malog trokuta znat cemo odrediti povrsinu dvanaesterokuta, pa racunam:

$$\alpha = \frac{360°}{n} = \frac{360°}{12}$$

$$\alpha = 30°$$

Nadalje da izracunam povrsinu plavo sojencanog trokuta trebam odrediti duljinu stranice pravilnog dvanaesterokuta ili osnovice plavo osjencanog trokuta a te duljinu visine na tu stranicu u istom trokutu.



Nadalje promotrim zeleno osjencan trokut na posljednoj slici, ocito je taj trokut pravokutan. Iz tog razloga mora vrijediti sljedece:

$$sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R}$$

$$sin\frac{30^\circ}{2} = \frac{a}{2 \cdot 4} \ / \cdot 8$$

$$a = 8 \cdot sin15^\circ = 2.07cm$$

Na slican nacin izracuna se i duljina visine v_a na stranicu a mnogokuta, ubiti jedina razlika je u tome sto sada moramo korisitit funkciju $\cos$, pa racunam:

$$cos\frac{\alpha}{2} = \frac{v_a}{R}$$

$$cos\frac{30^\circ}{2} = \frac{v_a}{4} \ / \cdot 4$$

$$v_a = 4 \cdot cos15^\circ = 3.86cm$$

Preostaje nam jos samo izracunati povrsinu malog trokutu te dobiven rezultat pomnoziti s dvanaest kako bi dobili povrsinu cijelog pravilnog mnogokuta. Dakle slijedi:

$$P_\Delta = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{2.07 \cdot 3.86}{2} = 4cm^2$$

$$P = 12 \cdot P_\Delta = 12 \cdot 4 = 48cm^2$$

Napomena: Uocimo ovom prilikom da je visina na stranicu a, dakle v_a isto sto i radijus ovom pravilnom dvanaesterokutu upisane kruznice r!