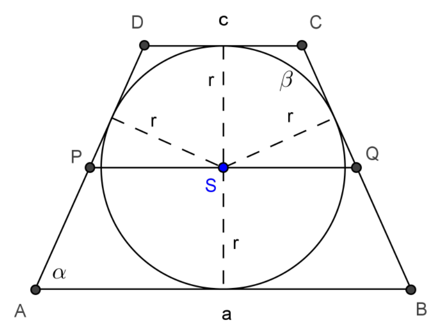
Detaljnija rjesenja zadataka

Priprema za pisanu provjeru znanja
IV.7. Zadatak 4:
Nacrtamo skicu za pocetak.



Zadane su duljina srednjice (na slici duzina $\overline{PQ}$) koja iznosi $\left|\overline{PQ}\right| = 13cm$, nadalje dan je radijus (polumjer) jednakokracnom trapezu upisane kruznice koji iznosi $r = 6cm$. Preuredimo malo pocetnu skicu (srednjica je bila samo nacrtana da se vidi sto je, dakle to je duzina koja spaja polovista krakova trapeza). No prije toga uocimo da vrijedi sljedeca jednakost:

$$\frac{a+c}{2} = 13$$

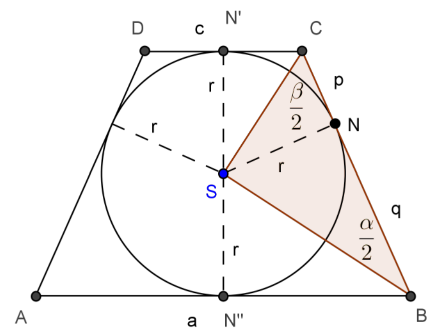
Iz ovoga direktno slijedi, a trebat ce nam kasnije sljedece:

$$\frac{a+c}{2} = 13 \; / \cdot 2$$

$$a + c = 26$$

$$c = 26 - a$$

Odnosno vidimo da mora vrijediti da je $c = 26 - a$. Maknimo i dodajmo sada neke elemente nasoj skic, dakle maknimo srednjicu, te spojimo srediste upisane kruznice sa vrhom B i sa vrhom C:



Uocimo, sa posljednje slike, trokut ΔSBC. On je pravokutan, no pitanje je zbog cega. Prije nego odgovorimo na to pitanje prisjetimo se koliki je zbroj nasuprotnih kuteva u jednakokracnom trapezu:

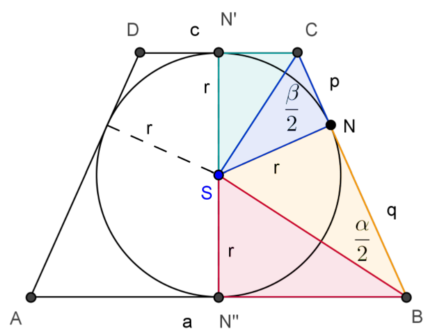
$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

Iz te jednakosti dalje slijedi:

$$\alpha + \beta = 180^\circ \;/ : 2$$

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ$$

Dakle samo trebamo pokazati da su kutevi tog trokuta jednaki $\frac{\alpha}{2}$ odnosno $\frac{\beta}{2}$. U tu svrhu pogledajmo sljedecu sliku:



Dakle ono sto vrijedi jest da su plavi i plavozeleni trokut sukladni, te narancasti i crveni takoder. Ono so se vidi je da u oba slucaja imaju jednu stranicu iste duljine, radijus upisane kruznice i jednu zajednicku stranicu, manjim trokutima je zajednicka duzina koja spaja vrh C sa sredistem upisane kruznice dok je vecima zajednicka duzina koja spaja vrh B sa sredistem kruznice. U svim cetirima trokutima nasuprot vece stranice nalazi se pravi kut, dakle po pravilu SSK (stranica, stranica, kut nasuprot vecoj) pravi i plavozeleni su sukladni te ista stvar vrijedi i za narancasti i crveni trokut. Dakle kutevi $alpha$ odnosno $beta$ su podijeljeni na pola sa ovim zajednickim stranicama dva po dva trokuta, a gore smo izracunali da je zbroj polovica kuteva jednak 90°, dakle zaista je trokut sa druge slike pravokutan.

Preostaje nam samo jos zakljuciti da je duljina duzine oznacene sa q jednaka polovici duzine oznacene sa a, te da je duljina duzine q jendnaka polovici duzine c. Dakle vrijedi:

$$p = \frac{a}{2}$$

$$q = \frac{c}{2} = \frac{26 - a}{2}$$

No vratimo se na pravokutni trokut oznacen na drugoj slici. Vidim da je duljina visine na hipotenuzu u tom trokutu jednaka upravo r. Nadalje znam da u svakom pravokutno trokutu vrijedi da je kvadrat visine na hipotenuzu jednak umnosku odsjecaka na koje noziste visine dijeli hipotenuzu ili:

$$v_c^2 = p \cdot q$$

Kako je kod nas $v_c = r$ vrijedi sljedece:

$$r^2 = p \cdot q$$

$$6^2 = \frac{a}{2} \cdot \frac{26-a}{2}$$

$$36 = \frac{a(26-a)}{4} \ / \cdot 4$$

$$144 = 26a - a^2$$

$$a^2 - 26a + 144 = 0$$

Rijesimo danu kvadratnu jednadzbu:

$$a_1, a_2 = \frac{26 \pm \sqrt{26^2 - 4 \cdot 1 \cdot 144}}{2}$$

$$a_1, a_2 = \frac{26 \pm 10}{2}$$

$$a_1 = 18$$

$$a_2 = 3$$

Drugo rijesenje nema smisla jer nas dovodi do zakljucka da duljina manje osnovice c zapravo veca od osnovice a. Nadalje iz trece slike i narancastog trokuta se vidi da mora vrijediti sljedece:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{q}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{6}{\frac{a}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{6}{\frac{18}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\frac{\alpha}{2} = 33^\circ 41' \ / \cdot 2$$

$$\alpha = 67^\circ 22'$$

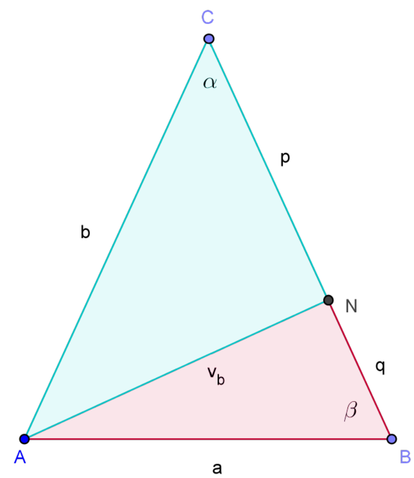
Te na kraju izracunamo jos kut β:

$$\beta = 180^\circ - \alpha$$

$$\beta = 180^\circ - 67^\circ 22'$$

$$\beta = 112^\circ 38'$$

IV.8. <u>Zadatak 4</u>:
Nacrtajmo skicu da vidimo sto nam je zapravo dano:



Dakle u zadatku stoji da je povrsina pravo osjencanog trokuta dva puta veca od povrsine crveno osjencanog trokuta il strogo matematicki zapisano:

$$P_{\Delta ANC} : P_{\Delta ANB} = 2 : 1$$

No ucimo da su ta dva trokuta zapravo pravokutna kojima je visina na stranicu $\overline{BC}$ yajednicka kateta pa za njihove povrsine vrijedi:

$$P_{\Delta ANC} = \frac{v_b \cdot p}{2}$$

$$P_{\Delta ANB} = \frac{v_b \cdot q}{2}$$

Ubacimo li to u gornju jednakost mora vrijediti:

$$\frac{v_b \cdot p}{2} : \frac{v_b \cdot q}{2} = 2 : 1$$

$$\frac{\frac{v_b \cdot p}{2}}{\frac{v_b \cdot q}{2}} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{p}{q} = \frac{2}{1}$$

Dakle slijdi da mora vrijediti $p : q = 2 : 1$ sto je zapravo logicno. Sada nadalje za neki $k \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$p = 2k$$

$$q = k$$

$$b = p + q = 2k + k = 3k$$

Sada iz plavo osjencanog trokuta vidim da mogu odrediti velicinu kuta $alpha$ preko duljina stranica p i b, dakle vrijedi:

$$\cos\alpha = \frac{p}{b}$$

$$\cos\alpha = \frac{2k}{3k} = \frac{2}{3}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\alpha = 48^\circ 12'$$

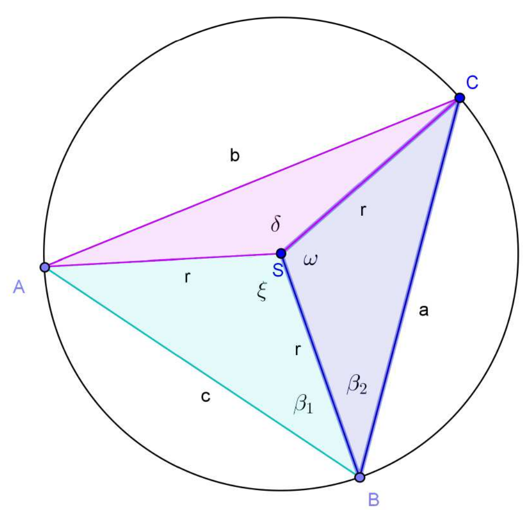
Za kut $beta$ u jednakokracnom trokutu zanamo da vrijedi:

$$\beta = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$$

$$\beta = \frac{180^\circ - 48^\circ 12'}{2}$$

$$\beta = 65^\circ 54'$$

IV.8. Zadatak 6:
Kao i obicno za pocetak crtam skicu iz podataka danih u zadatku:



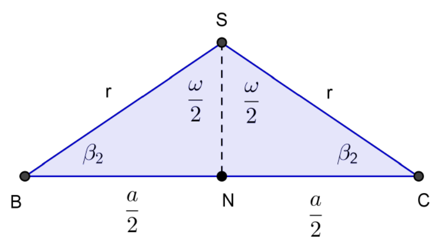
Dakle iz teksta zadatka sukladno nasim oznakama vrijedi da je $\xi = 80°$, nadaljde $\omega = 110°$ te na kraju dana je i duljina polumjera tom torkutu opisane kruznice i ona iznosi $r = 8cm$. Zanimaju nas duljine stranica te velicina kuta $beta$, dakle kuta pri vrhu B velikog trokuta. Odmah na slici uocimo da je veliki trokut podijeljen na tri manja jednakokracna trokuta, jer su svi krakovi zapravo radijusi opisane kruznice velikom trokutu. Nadalje uocimo da lako izracunamo velicinu kuta δ jer znamo da mora vrijediti:

$$\xi + \omega + \delta = 360°$$

$$80° + 110° + \delta = 360°$$

$$\delta = 360° - 190° = 170°$$

Dakle odredili smo da je velicina kuta $\delta = 170°$. Nadalje u svakom od ova manja tri jednakokracna trokuta poznate su nam duljine krakova te kut pri vrhu. To prije svega znaci da mozemo odrediti iy svakog od tih torkuta duljinu osnovice te velicine kuteva pri osnovici. Izracunajmo prvo velicinu stranice a te nakon toga na slican nacin velicnu preostalih stranica iz preostalih dvaju jednakokracnih trokuta:



$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{r} = \frac{a}{2r}$$

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{a}{2r} \quad \cdot /2r$$

$$a = 2r \cdot \sin\frac{\omega}{2}$$

$$a = 2 \cdot 8 \cdot \sin\frac{110°}{2}$$

$$a = 16 \cdot \sin 55°$$

$$a = 13.11cm$$

Slicno izracunam duljinu stranice b iz rozno osjencanog jednakokracnog trokuta ΔASC, dakle mora vrijditi:

$$\sin\frac{\delta}{2} = \frac{\frac{b}{2}}{r} = \frac{b}{2r}$$

$$\sin\frac{\delta}{2} = \frac{b}{2r} \quad \cdot /2r$$

$$b = 2r \cdot \sin\frac{\delta}{2}$$

$$b = 2 \cdot 8 \cdot \sin\frac{170^\circ}{2}$$

$$b = 16 \cdot \sin 85^\circ$$

$$b = 15.93cm$$

Te nadalje na isti nacin izracunam duljinu stranice c iz tirkizno plavo osjencanog jednakokracnog trokuta ΔASB, dakle mora vrijditi:

$$\sin\frac{\xi}{2} = \frac{\frac{c}{2}}{r} = \frac{c}{2r}$$

$$\sin\frac{\xi}{2} = \frac{c}{2r} \quad \cdot /2r$$

$$c = 2r \cdot \sin\frac{\delta}{2}$$

$$c = 2 \cdot 8 \cdot \sin\frac{80^\circ}{2}$$

$$c = 16 \cdot \sin 40^\circ$$

$$c = 10.28cm$$

Na kraju trebam jos izracunati velicunu kuta β, tocnije velicinu kuta pri vrhu B velikog trokuta. Sa prve slike se vidi da je to zapravo zbroj kuteva pri osnovici trokuta ΔASB i ΔBSC. Iz trokuta ΔASB slijedi da je kut pri osnovici β_1 jednak:

$$\beta_1 = \frac{180^\circ - \xi}{2}$$

$$\beta_1 = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2}$$

$$\beta_1 = \frac{100^\circ}{2}$$

$$\beta_1 = 50^\circ$$

Iz trokuta ΔBSC slijedi da je kut pri osnovici β_2 jednak:

$$\beta_2 = \frac{180^\circ - \omega}{2}$$

$$\beta_2 = \frac{180^\circ - 110^\circ}{2}$$

$$\beta_2 = \frac{70^\circ}{2}$$

$$\beta_2 = 35^\circ$$

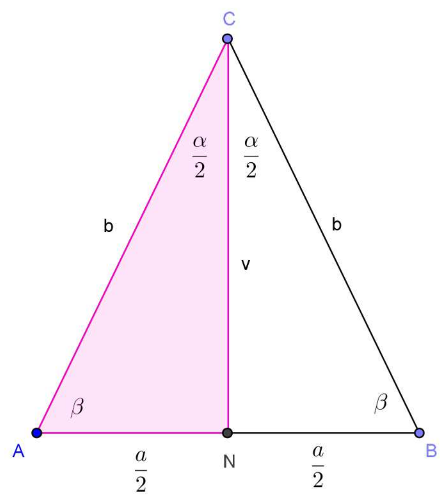
Dakle kut pri vrhu B jednak je zbroju velicina kuteva β_1 i β_2, dakle slijedi:

$$\beta = \beta_1 + \beta_2$$

$$\beta = 50^\circ + 35^\circ$$

$$\beta = 85^\circ$$

IV.9. Zadatak 2:
Nacrtajmo prvu skicu prema podacima iz zadatka:



Dakle u zadatku je zadana velicina kuta $alpha = 44^\circ 20'$ te razlika duljine kraka i osnivice, odnosno $b - a = 3cm$. Zadatak mi je odrediti povrsinu torkuta sto znaci da moram odrediti velicnu osnovice a te velicinu visine na osnovicu jednakokracnog trokuta. Pokusajmo prvo odrediti velicinu stranice a. Jednu vezu izmedu a i b vec imamo pokusajmo nekako pronaci jos jednu da dobijemo sustav jednadzbi. Promotrimo kako povezati kut $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{a}{2}$ i b. Ustvari mora vrijediti sljedece:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{a}{2b}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2b} \;/\cdot 2b$$

$$a = 2b \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$

$$a = 2b \cdot \sin\frac{44^\circ 20'}{2}$$

$$a = 2b \cdot \sin 22^\circ 10'$$

$$a = 2b \cdot 0.377$$

$$a = 0.754b$$

Sada u jednakosti $b - a = 3cm$ zamijenimo a sa $0.754b$ te dobijemo:

$$b - a = 3$$

$$b - 0.754b = 3$$

$$0.245b = 3 \ / : 0.245$$

$$b = 12.225cm$$

Sada direktno slijedi:

$$b - a = 3$$

$$12.225 - a = 3$$

$$a = 12.225 - 3 = 9.225cm$$

Nadalje iz rozno osjencanog trokuta slijedi da mora vrijediti:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{v}{b} \ / \cdot b$$

$$v = b \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$$

$$v = 12.225 \cdot \cos\frac{44°20'}{2}$$

$$v = 12.225 \cdot \cos 22°10'$$

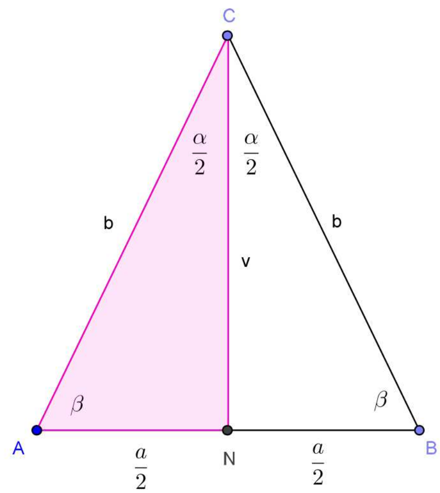
$$v = 11.321cm$$

Preostaje jos samo odrediti povrsinu danog trokuta, znamo da vrijedi:

$$P = \frac{a \cdot v}{2}$$

$$P = \frac{9.225 \cdot 11.321}{2} = 52.218cm^2$$

IV.10. Zadatak 2:
Dakle ovaj zadatak je skoro potpuno isti kao i prethodni jedino se razlikuje u tome sto sada nije dana razlika duljina osnovica i kraka vec opseg. Uzet cemo istu skicu kao i u prethodnom zadataku:



Dakle u zadatku je zadana velicina kuta $alpha = 35°$ te opseg jednakokracnog trokuta, odnosno $O = a + 2b = 17cm$. Zadatak mi je odrediti povrsinu torkuta sto znaci da moram odrediti velicnu osnovice a te velicinu visine na osnovicu jednakokracnog trokuta. Pokusajmo prvo odrediti velicinu stranice a. Jednu vezu izmedu a i b vec imamo pokusajmo nekako pronaci jos jednu da dobijemo sustav jednadzbi. Promotrimo kako povezati kut $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{a}{2}$ i b. Ustvari mora vrijediti sljedece:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{a}{2b}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2b} \;/\cdot 2b$$

$$a = 2b \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$

$$a = 2b \cdot \sin\frac{35°}{2}$$

$$a = 2b \cdot \sin 17°30'$$

$$a = 2b \cdot 0.3007$$

$$a = 0.601b$$

Sada u jednakosti $a + 2b = 17cm$ zamijenimo a sa $0.601b$ te dobijemo:

$$a + 2b = 17$$

$$0.601b + 2b = 17$$

$$2.601b = 17 \;/ : 2.601$$

$$b = 6.534cm$$

Sada direktno slijedi:

$$a + 2b = 17$$

$$a + 2 \cdot 6.534 = 17$$

$$a = 17 - 13.069 = 3.9301cm$$

Nadalje iz rozno osjencanog trokuta slijedi da mora vrijediti:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{v}{b} \;/ \cdot b$$

$$v = b \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$$

$$v = 6.534 \cdot \cos\frac{35^\circ}{2}$$

$$v = 6.524 \cdot \cos 17^\circ 30'$$

$$v = 6.232cm$$

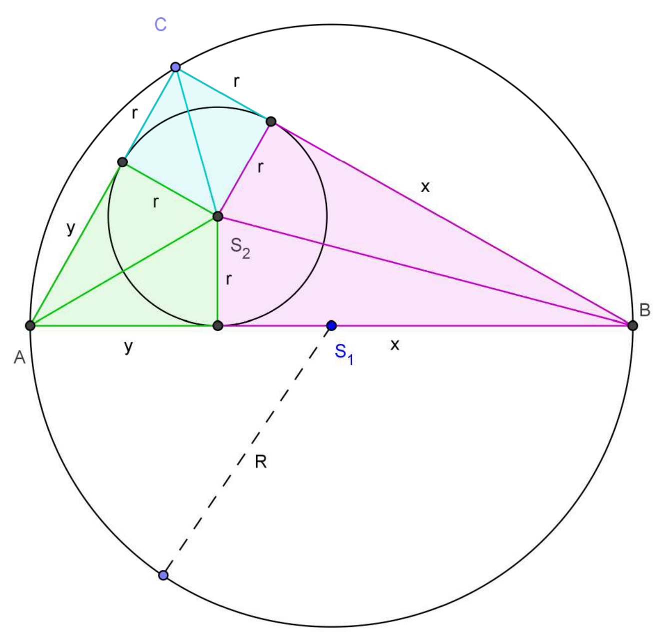
Preostaje jos samo odrediti povrsinu danog trokuta, znamo da vrijedi:

$$P = \frac{a \cdot v}{2}$$

$$P = \frac{3.9301 \cdot 6.232}{2} = 12.247cm^2$$

IV.10. Zadatak 3:

Dakle nacrtajmo prvo skicu prema podacima iz zadatka, a zadani su nam polumjeri upisane i opisane kruznice odnosno $r = 4cm$ i $R = 10cm$:



Dakle ono sto mogu uociti sa slike jest da su trokuti osjencani istom bojom sukladni sto samim time znaci da su susedne stranice podijeljene na dva dijela od kojih je jedan uvijek isti. Nadalje duljina hipotenuze tog mog pravokutnog trokuta jednaka je dvostrukom radijusu opisane kruznice jer znamo da zbog Talesovog poucka srediste pravpkutnom trokutu opisane kruznice mora stajati na njegovoj hipotenuzi te je djeliti na pola jer inace nece prolaziti krajnjim tockama koje odjeduju hipotenuzu dakle vrijedi sljedece:

$$c = 2R = 2 \cdot 10 = 20cm$$

$$c = x + y$$

$$x + y = 20cm \Rightarrow x = 20 - y$$

$$a = x + r = x + 4$$

$$b = y + r = y + 4$$

Ako u predzadnjoj jednakosti x zamijenim sa $20 - y$, to vrijedi po trecem retku u gornjem racunu dobijem sljedece jednakosti:

$$a = x + r = 20 - y + 4 = 24 - y$$

$$b = y + r = y + 4$$

$$c = 20$$

Primjenim pitagorin poucak, dakle vrijedi:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$(24 - y)^2 + (y + 4)^2 = (20)^2$$

$$576 - 48y + y^2 + y^2 + 8y + 16 = 400$$

Sredivanjem se dobije kvadratna jednadzba:

$$y^2 - 20y + 96 = 0$$

Potrazimo njena rijesenja:

$$y_1, y_2 = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 1 \cdot 96}}{2}$$

$$y_1, y_2 = \frac{20 \pm 4}{2}$$

$$y_1 = 12$$

$$y_2 = 8$$

Dakle oucavam da sam dobio upravo vrijednosti i za x i za y jer je zbroj rijesenja upravo 20 sto je zapravo duljina stranice c odnosno zbroj velicina x odnosno y. Sada da se racun koliko toliko slaze sa slikom kazem da je $x = 8cm$, dok je

$y = 12cm$. Nadalje odredim duljine recimo stranice a kako bi odredio velicnu kuta α, a samim time i velicinu kuta β posto se radi o pravokutnom trokutu, dakle slijedi:

$$a = x + r = 8 + 4 = 12cm$$

$$b = y + r = 12 + 4 = 16cm$$

Nadalje iz pocetnog pravokutnog trokuta slijedi da mora vrijediti:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

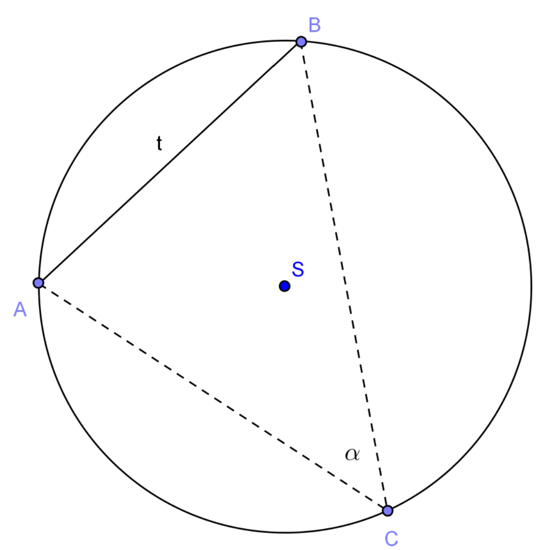
$$\sin\alpha = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$\alpha = sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\alpha = 36°52'$$

Nadalje kako znam da u pravokutno trokutu mora vrijediti $\alpha + \beta = 90°$ slijedi da je $\beta = 53°8'$.

IV.10. Zadatak 4:
Nacrtajmo skicu iz danih podatak u zadatku:



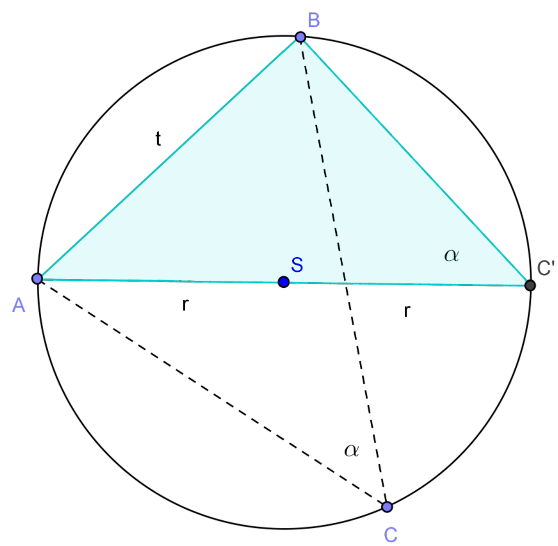
Dakle u yadatku mi je dana veza izmedj duljine tetive t i promjera kruznice u kojoj mi se tetiva nalazi dok je zadatak odreiti velicinu obodnog kuta nad tom tetivom. Dakle vrijedi sljedece:

$$d = 2r$$

$$t = \frac{3}{5}d = \frac{3}{5} \cdot 2r$$

$$t = \frac{6}{5}r$$

Nadalje prisjetimo se da ako pomicemo tocku c uzduz luka kruznice pritom pazeci da ne prijedemo granicne tocke luka, dakle tocke A i B kut na slici oznacen s α nece se promijeniti. Imajci to na umu pomaknimo tocku C prema gore u novi polozaj i to takav da duzina $\overline{AC'}$ prolazi kroz srediste kruznice:



Prema Talesovom poucku tirkizno plavo osjencan trokut je pravokutan, dok je kut kod vrha C' takoder α. Iz pravokutnog trokuta slijedi:

$$\sin\alpha = \frac{t}{2r}$$

$$\sin\alpha = \frac{\frac{6}{5}r}{2r} = \frac{3}{5}$$

$$\alpha = sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\alpha = 36^\circ 52'$$