Ponavljanje gradiva osnovne skole

Zadatak 12: (ponavljanje - sedmi razred) Duljine stranica trokuta ΔABC zadovoljavaju produljeni razmjer $a:b:c=4:7:5$, a njegov je opseg jednak 24 cm. Opseg njemu slicnog trokuta $\Delta A'B'C'$ jednak je 31.2 cm. Izracunaj duljine stranica obaju trokuta.

Rjesenje: Prije svega primjetimo da iz cinjenice da vrijedi $a:b:c=4:7:5$ mozemo zakljuciti:

$$a:b:c=4:7:5 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a=4t \\ b=7t \\ c=5t \end{array}\ , \text{ za } t\in\mathbb{R}$$

Nadalje znamo da opseg trokuta ΔABC racunamo prema izrazu:

$$O=a+b+c$$

Primjenimo li zakljucenu cinjenicu taj izraz poprima sljedeci oblik:

$$O=\overset{4t}{a}+\overset{7t}{b}+\overset{5t}{c} \quad \Rightarrow \quad O=4t+7t+5t$$

Zbrojimo izraze na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$O=16t$$

Zatim primjenimo cinjenicu da je opseg trokuta ΔABC jednak 24 cm, slijedi:

$$\overset{24}{O}=16t \quad \Rightarrow \quad 24=16t$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{16}$, slijedi:

$$24=16t \ \Big/ \cdot\frac{1}{16}$$

$$24\cdot\frac{1}{16}=16t\cdot\frac{1}{16}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{3}\cancel{24}}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{16}_{2}}=\frac{{}^{1}\cancel{16}t}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{16}_{1}}$$

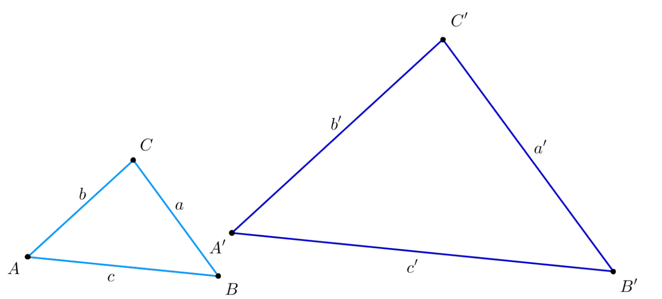
$$\frac{3\cdot 1}{1\cdot 2}=\frac{1\cdot t\cdot 1}{1\cdot 1}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{t}{1}$$
$$\frac{3}{2} = t$$

Sada mozemo odrediti velicine stranica trokuta ΔABC. Racunamo:

$$\begin{aligned} a &= 4t \leftarrow \tfrac{3}{2} \\ b &= 7t \leftarrow \tfrac{3}{2} \\ c &= 5t \leftarrow \tfrac{3}{2} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a &= 4 \cdot \frac{3}{2} = \frac{4}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = \frac{12}{2} \text{ cm} \\ b &= 7 \cdot \frac{3}{2} = \frac{7}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{7 \cdot 3}{1 \cdot 2} = \frac{21}{2} \text{ cm} \\ c &= 5 \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5 \cdot 3}{1 \cdot 2} = \frac{15}{2} \text{ cm} \end{aligned}$$

Prisjetimo se da za dva slicna trokuta, neka su to trokuti ΔABC i $\Delta A'B'C'$, vrijedi:



$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$$
$$\frac{O'}{O} = k$$

koeficijent slicnosti

Odredit cemo nadalje koeficijent slicnosti. Pomocu njega cemo odrediti velicine stranica slicnog trokuta. Naime vrijedi:

$$\frac{O}{O'} = k$$

Uvrstimo li poznate vrijednosti slijedi:

$$\frac{\overset{31.2}{O'}}{\underset{24}{O}} = k \quad \Rightarrow \quad \frac{31.2}{24} = k$$

Uocimo da 31.2 mozemo zapisati u obliku razlomka kao $\frac{312}{10}$, pa jednakost poprima sljedeci oblik:

$$\frac{\overset{\frac{312}{10}}{31.2}}{24} = k \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{312}{10}}{24} = k$$

Sredimo razlomak na lijevoj strani jednakosti prema pravilu za sredjivanje dvojnog razlomka, odnsno prema $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$, slijedi:

$$\frac{\frac{312}{10}}{\frac{24}{1}} = k \quad \Rightarrow \quad \frac{312 \cdot 1}{24 \cdot 10} = k$$

Dakle koeficijent slicnosti jednak je:

$$k = \frac{312}{240}$$

Pokratimo razlomak i dobijemo da vrijedi:

$$k = \frac{\overset{13}{\cancel{312}}}{\underset{10}{\cancel{240}}}$$

$$k = \frac{13}{10}$$

Nadalje iz cinjenice da za slicne trokute ΔABC i $\Delta A'B'C'$ vrijedi $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$ uocavamo da posebno vrijedi:

$$\frac{a'}{a} = k$$

Pomnozimo cijelu jednakost s a slijedi:

$$\frac{a'}{a} = k \quad / \cdot a$$

$$\frac{a'}{a} \cdot a = k \cdot a$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{a'}{{}_{1}\cancel{a}} \cdot \frac{\cancel{a}^{1}}{1} = k \cdot a$$

$$
\begin{aligned}
\frac{a'}{1}\cdot\frac{1}{1} &= k\cdot a\\
\frac{a'\cdot 1}{1\cdot 1} &= k\cdot a\\
\frac{a'}{1} &= k\cdot a\\
a' &= k\cdot a
\end{aligned}
$$

Slican racun mozemo provesti i za preostale dvije stranice, dakle za slicne trokute ΔABC i $\Delta A'B'C'$ vrijedi:

$$
\begin{aligned}
a' &= k\cdot a\\
b' &= k\cdot b\\
c' &= k\cdot c
\end{aligned}
$$

Preostaje nam jos samo odrediti velicine stranica slicnog trokuta. Racunamo:

$$
\begin{array}{cccccc}
\frac{13}{10} & a' = k\cdot a & \frac{12}{2} & & a' = \frac{13}{10}\cdot\frac{12}{2}\\
\frac{13}{10} & b' = k\cdot b & \frac{21}{2} & \Rightarrow & b' = \frac{13}{10}\cdot\frac{21}{2}\\
\frac{13}{10} & c' = k\cdot c & \frac{15}{2} & & c' = \frac{13}{10}\cdot\frac{15}{2}
\end{array}
$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$
\begin{aligned}
a' &= \frac{13}{{}_5\cancel{10}}\cdot\frac{\cancel{12}^{\cancel{6}^{3}}}{\cancel{2}_1} = \frac{13}{5}\cdot\frac{3}{1} = \frac{13\cdot 3}{5\cdot 1} = \frac{39}{5}\ \text{cm}\\
b' &= \frac{13}{10}\cdot\frac{21}{2} = \frac{13\cdot 21}{10\cdot 2} = \frac{273}{20}\ \text{cm}\\
c' &= \frac{13}{{}_2\cancel{10}}\cdot\frac{\cancel{15}^{3}}{2} = \frac{13}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{13\cdot 3}{3\cdot 2} = \frac{39}{4}\ \text{cm}
\end{aligned}
$$

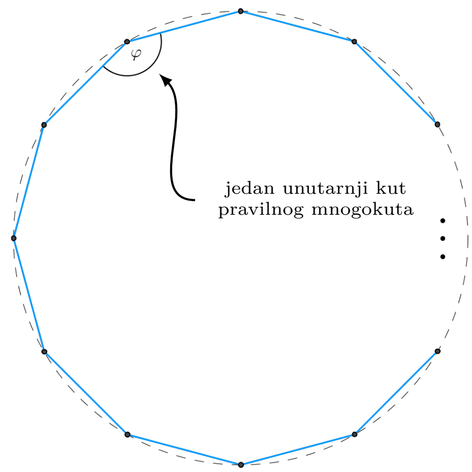
Time je zadatak rijesen.

Zadatak 15: (ponavljanje - sedmi razred) Velicina jednog unutarnjeg kuta pravilnog mnogokuta iznosi $162°$, a duljina jedne njegove stranice je 5.2 cm. Izracunaj opseg tog mnogokuta.

Rjesenje: Prije svega primjetimo da je opseg pravilnog mnogokuta jednak umnosku duljine njegove stranice i broja njegovih stranica ili vrhova (taj je broj nuzno jednak!), odnosno:

$$O_{n\text{-terokut}} = a\cdot n$$

Dakle nas zadatak je odrediti broj njegovih vrhova. U tu svrhu promotrimo sljedecu sliku:



Dakle na slici je s φ oznacen jedan unutarnji kut pravilnog mnogokuta. Pravilni mnogokut s n vrhova ima n takvih kutova. Nadalje prisjetimo se da znamo odrediti zbroj svih unutarnjih kutova n-terokuta (pa tako i ovog pravilnog). To racunamo pomocu izraza:

$$N_{\Sigma\varphi} = (n-2)\cdot 180^\circ$$

Lako sada zakljucujemo da je onda jedan unutarnji kut, φ, (svi su isti) zapravo jednak:

$$\varphi = \frac{N_{\Sigma\varphi}}{n}$$

Odnosno, uvrstimo li izraz za zbroj svih unutarnjih kutova, jednakost poprima oblik:

$$\varphi = \frac{\overset{(n-2)\cdot 180^\circ}{N_{\Sigma\varphi}}}{n} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$$

Uvrstimo danu vrijednost za velicinu jednog unutarnjeg kuta, slijedi:

$$\overset{162^\circ}{\varphi} = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} \quad \Rightarrow \quad 162^\circ = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$$

Pomnozimo dobiveni jednakost s n, slijedi:

$$162^\circ = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} \Big/ \cdot n$$

$$162^\circ \cdot n = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} \cdot n$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$162^\circ \cdot n = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{{}_1\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}^1}{1}$$

$$162^\circ \cdot n = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{1} \cdot \frac{1}{1}$$

$$162^\circ \cdot n = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ \cdot 1}{1 \cdot 1}$$

$$162^\circ \cdot n = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{1}$$

$$162^\circ \cdot n = (n-2)\cdot 180^\circ$$

Rijesimo se zagrade na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$162^\circ \cdot n = n \cdot 180^\circ - 2 \cdot 180^\circ$$

$$162^\circ \cdot n = n \cdot 180^\circ - 360^\circ$$

Promijenimo poredak faktora u prvom clanu sume na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$162^\circ \cdot n = n \cdot 180^\circ - 360^\circ \quad \Rightarrow \quad 162^\circ \cdot n = 180^\circ \cdot n - 360^\circ$$

Prebacimo $180^\circ \cdot n$ s desne na lijevu stranu jednakosti, slijedi:

$$162^\circ \cdot n = n \cdot 180^\circ - 360^\circ \quad \Rightarrow \quad 162^\circ \cdot n - 180^\circ \cdot n = -360^\circ$$

Zbrojimo sto se zbrojiti dade, slijedi:

$$-18^\circ \cdot n = -360^\circ$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{-18^\circ}$, slijedi:

$$-18^\circ \cdot n = -360^\circ \quad \Big/ \cdot \frac{1}{-18^\circ}$$

$$-18^\circ \cdot n \cdot \frac{1}{-18^\circ} = -360^\circ \cdot \frac{1}{-18^\circ}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^1\cancel{-18^\circ} \cdot n}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{-18^\circ}_1} = \frac{{}^{20}\cancel{-360^\circ}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{-18^\circ}_1}$$

$$\frac{1 \cdot n}{1} \cdot \frac{1}{1} = \frac{20}{1} \cdot \frac{1}{1}$$

$$\frac{1 \cdot n \cdot 1}{1 \cdot 1} = \frac{20 \cdot 1}{1 \cdot 1}$$
$$\frac{n}{1} = \frac{20}{1}$$
$$n = 20$$

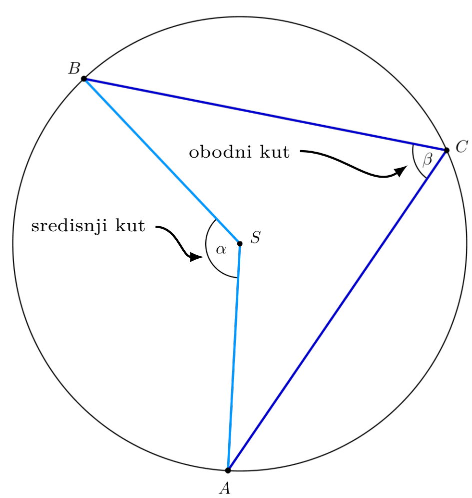
Dakle govorimo o pravilnom 20-erokutu. Preostaje jos samo odrediti njegov opseg. Racunamo:

$$\underset{20}{O_{n\text{-terokut}}} = \overset{5.2}{a} \cdot \overset{20}{n} \quad \Rightarrow \quad O_{20\text{-erokut}} = 5.2 \cdot 20 = 104 \text{ cm}$$

Dakle opseg opisanog mnogokuta jednak je 104 cm. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 16: (ponavljanje - sedmi razred) Sredisnji kut nad kruznim lukom $\overset{\frown}{AB}$ iznosi $133°38'$. Koliko iznosi pripadni obodni kut?

Rjesenje: Promotrimo sljedecu sliku:



Prisjetimo se da je sredisnji kut uvijek dvostruko veci od obodnog kuta, odnosno za kutove sa slike vrijedi:

$$\alpha = 2 \cdot \beta$$

Prema podacima zadatka vrijedi:

$$\alpha = 133°38'$$

Tu cinjenicu primjenimo na jednakost koja povezuje velicine sredisnjeg i obodnog kuta, slijedi:

$$\overset{133^\circ 38'}{\alpha} = 2 \cdot \beta \quad \Rightarrow \quad 133^\circ 38' = 2 \cdot \beta$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{2}$, slijedi:

$$133^\circ 38' = 2 \cdot \beta \quad \Big/ \cdot \frac{1}{2}$$

$$133^\circ 38' \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot \beta \cdot \frac{1}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{133^\circ 38'}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{{}^1\cancel{2} \cdot \beta}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1}$$

$$\frac{133^\circ 38'}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot \beta}{1} \cdot \frac{1}{1}$$

$$\frac{133^\circ 38' \cdot 1}{1 \cdot 2} = \frac{1 \cdot \beta \cdot 1}{1 \cdot 1}$$

$$\frac{133^\circ 38'}{2} = \frac{\beta}{1}$$

$$\frac{133^\circ 38'}{2} = \beta$$

Lijeva strana jednakosti jednaka je $66^\circ 49'$. Dakle velicina obodnog kuta jednaka je:

$$\beta = 66^\circ 49'$$

Time je zadatak rijesen.

Zadatak 19: c) (ponavljanje - sedmi razred) Rijesi sustav jednadzbi:

$$\begin{cases} 1 - 3(x + y - 6) - 2(5x - y - 4) = 2(x - y + 10) - y \\ 2(x - 3y + 5) + 3(1 - x + 2y) = 4y - x - 3 \end{cases}$$

Rjesenje: Rijesimo se zagrada na obje strane obiju jednadzbi, slijedi:

$$\begin{cases} 1 - 3 \cdot x - 3 \cdot y - 3 \cdot (-6) - 2 \cdot 5x - 2 \cdot (-y) - 2 \cdot (-4) = 2 \cdot x + 2 \cdot (-y) + 2 \cdot 10 - y \\ 2 \cdot x + 2 \cdot (-3y) + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot (-x) + 3 \cdot 2y = 4y - x - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - 3x - 3y + 18 - 10x + 2y + 8 = 2x - 2y + 20 - y \\ 2x - 6y + 10 + 3 - 3x + 6y = 4y - x - 3 \end{cases}$$

Nadalje prebacimo sve poznanice s lijeve na desnu stranu jednakosti, a sve nepoznanice s desne na lijevu stranu jednakosti u obje jednadzbe, slijedi:

$$\begin{cases} 1 - 3x - 3y + 18 - 10x + 2y + 8 = 2x - 2y + 20 - y \\ \\ 2x - 6y + 10 + 3 - 3x + 6y = 4y - x - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x - 3y - 10x + 2y - 2x + 2y + y = 20 - 1 - 18 - 8 \\ 2x - 6y - 3x + 6y - 4y + x = -3 - 10 - 3 \end{cases}$$

Zbrojimo sume na desnim stranama jednakosti, slijedi:

$$\begin{cases} -3x - 3y - 10x + 2y - 2x + 2y + y = -7 \\ 2x - 6y - 3x + 6y - 4y + x = -16 \end{cases}$$

Nadalje zbrojimo nepoznanice iste "vrste" na lijevim stranama obje jednakosti, slijedi:

$$\begin{cases} -\underline{3x} - \utilde{3y} - \underline{10x} + \utilde{2y} - \underline{2x} + \utilde{2y} + \utilde{y} = -7 \\ \underline{2x} - \utilde{6y} - \underline{3x} + \utilde{6y} - \utilde{4y} + \underline{x} = -16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -15x + 2y = -7 \\ -4y = -16 \end{cases}$$

Drugu jednadzbu pomnozimo s $\frac{1}{-4}$, slijedi:

$$-4y = -16 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{-4}$$

$$-4y \cdot \frac{1}{-4} = -16 \cdot \frac{1}{-4}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{-4}y}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{-4}_{1}} = \frac{{}^{4}\cancel{-16}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{-4}_{1}}$$

$$\frac{1 \cdot y}{1} \cdot \frac{1}{1} = \frac{4}{1} \cdot \frac{1}{1}$$

$$\frac{1 \cdot y \cdot 1}{1 \cdot 1} = \frac{4 \cdot 1}{1 \cdot 1}$$

$$\frac{y}{1} = \frac{4}{1}$$

$$y = 4$$

Preostaje jos odrediti nepoznanicu x. U tu svrhu nepoznanicu y u prvoj jednadzbi zamjenimo s izracunatom vrijednoscu, slijedi:

$$-15x + 2y = -7 \quad \Rightarrow \quad -15x + 2 \cdot 4 = -7$$
$$-15x + 8 = -7$$

Nadalje prebacimo 8 s lijeve na desnu stranu jednakosti, slijedi:

$$-15x + 8 = -7 \quad \Rightarrow \quad -15x = -7 - 8$$

Zbrojimo sto se zbrojiti dade, slijedi:

$$-15x = -15$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\dfrac{1}{-15}$, slijedi:

$$-15x = -15 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{-15}$$

$$-15x \cdot \frac{1}{-15} = -15 \cdot \frac{1}{-15}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{-15}x}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{-15}_{1}} = \frac{{}^{1}\cancel{-15}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{-15}_{1}}$$
$$\frac{1 \cdot x}{1} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1}$$
$$\frac{1 \cdot x \cdot 1}{1} = \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 1}$$
$$\frac{x}{1} = \frac{1}{1}$$
$$x = 1$$

Dakle rjesenje danog sustava jednadzbi jest uredjeni par $(x, y) = (1, 4)$. Time je zadatak rijesen.