Aritmeticki niz
(dodatak)

Tvrdnja 1: Brojeve koji su dijeljivi s nekim prirodnim brojem k, primjerice s 11 mozemo zapisati pomocu aritmetickog niza (a_n) ciji je opci clan oblika:

$$a_n = 11n$$

Rjesenje: Pokusajmo prirodne brojeve koji su djeljivi s 11 zapisati kao niz. Savim je jasno da je prvi clan takvog niza jednak 11. Nadalje sasvim je jasno da je sljedeci broj koji je dijeljiv s 11 nuzno tocno za 11 veci od prvog clana niza. Prateci istu ideju mozemo zakljuciti da je svaki sljedeci clan tog niza veci za 11 od clana niza ispred.

No ako je razlika izmedju svaka dva neposredna susjeda jednaka 11 tada govorimo o aritmetickom nizu cija je razlika (diferencija) jednaka 11. Opisani niz mozemo zapisati preko izraza za opci clan aritmetickog niza:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d$$

Primjenimo cinjenicu da je prvi clan tog niza jednak 11 kao i njegova diferencija, slijedi:

$$a_n = \underset{\uparrow\atop 11}{a_1} + (n-1)\,\underset{\uparrow\atop 11}{d}$$

$$a_n = 11 + (n-1)\cdot 11$$

Sredimo desnu stranu izraza tako da se rijesimo zagrade, slijedi:

$$a_n = 11 + n\cdot 11 - 1\cdot 11$$

$$a_n = 11 + 11n - 11$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$a_n = \cancel{11} + 11n \cancel{-11}$$

$$a_n = 11n$$

Dakle ovaj niz opisuje sve brojeve koji su djeljivi s 11. Naravno to je sasvim jasno, jer svi brojevi djeljivi s 11 moraju biti visekratnici broja 11, dakle moraju biti oblika $11k$ za neki $k \in \mathbb{N}$.

Tvrdnja 2: Neka je (a_n) aritmeticki niz. Vrijede slijedece tvrdnje:

I. clan na k-toj parnoj poziciji jednak je:

$$b_k = a_1 + (2\cdot k - 1)\cdot d$$

II. clan na k-toj neparnoj poziciji jednak je:

$$c_k = a_1 + (k-1)\cdot 2\cdot d$$

III. suma prvih k clanova na parnim pozicijama jednaka je:

$$\substack{\text{parna}\\ \text{mjesta}}S_k = k\cdot(a_1 + k\cdot d)$$

IV. suma prvih k clanova na neparnim pozicijama jednaka je:

$$\substack{\text{neparna}\\ \text{mjesta}}S_k = k\cdot[a_1 + (k-1)\cdot d]$$

Rjesenje: Neka je (a_n) aritmeticki niz s opcim clanom a_n. Tada mozemo definirati novi aritmeticki niz (b_k) koji ce sadrzavati samo one clanove prvog niza koji se nalaze na parnim pozicijama:

$$a_1,\ \underbrace{a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8,\ a_9,\ a_{10},\ a_{11},\ a_{12}}_{\downarrow\ \text{aritmeticki niz }(b_k)}$$

Opcenito opci clan b_k tog novodefiniranog aritmetickog niza (b_k), ako je b_1 njegov prvi clan, a $d_{(b_k)}$ diferencija, jednak je:

$$b_k = b_1 + (k-1)\cdot d_{(b_k)}$$

Pokusajmo taj izraz zapisati pomocu pocetnog clana i diferencije aritmetickog niza (a_n). Uocimo da je pocetni clan tog niza zapravo drugi clana a_2 aritmetickog niza (a_n). Njegova pak je diferencija dvostruko veca od diferencije aritmetickog niza (a_n) jer su clanovi novodefiniranog niza (b_k) jednaki svakom drugom clanu aritmetickog niza (a_n). Dakle vrijedi:

$$b_1 = a_2$$

$$d_{(b_k)} = 2\cdot d$$

Tada opci clan b_k tog novodefiniranog aritmetickog niza (b_k) poprima sljedeci oblik:

$$b_k = \overset{a_2}{\overset{\downarrow}{b_1}} + (k-1)\cdot \overset{2\cdot d}{\overset{\downarrow}{d_{(b_k)}}} \quad\Rightarrow\quad b_k = a_2 + (k-1)\cdot 2\cdot d$$

Nadalje opci clan a_n aritmetickog niza (a_n) s prvim clanom a_1 i diferencijom d ima oblik:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$

Sada drugi clan a_2 aritmetickog niza (a_n) poprima sljedeci oblik:

$$\underset{\underset{2}{\uparrow}}{a_n} = a_1 + (\overset{\overset{2}{\downarrow}}{n} - 1) \cdot d \quad \Rightarrow \quad a_2 = a_2 + (2-1) \cdot d$$

$$a_2 = a_1 + 1 \cdot d$$

$$a_2 = a_1 + d$$

Dakle prvi clan b_1 aritmetickog niza (b_k) jednak je drugom clanu a_2 aritmetickog niza (a_n) odnosno $a_1 + d$. Imajuci to na umu opci clan aritmetickog niza (b_k) poprima sljedeci oblik:

$$b_k = \overset{\overset{a_1+d}{\downarrow}}{a_2} + (k-1) \cdot 2 \cdot d \quad \Rightarrow \quad b_k = a_1 + d + (k-1) \cdot 2 \cdot d$$

Izlucimo d iz posljednja dva clana sume na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$b_k = a_1 + [1 + (k-1) \cdot 2] \cdot d$$

Rijesimo se unutranje zagrade na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$b_k = a_1 + [1 + k \cdot 2 + (-1) \cdot 2] \cdot d$$

$$b_k = a_1 + (1 + 2 \cdot k - 2) \cdot d$$

Zbrojimo sto se zbrojiti dade na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$b_k = a_1 + (2 \cdot k - 1) \cdot d$$

Dakle time smo izrazili opci clan b_k aritmetickog niza (a_n) pomocu pocetnog clana a_1 i diferencije d aritmetickog niza (a_n).

Nadalje pogledajmo cemu je jednaka suma prvih k clanova aritmetickog niza (b_k) prikazanih pomocu pocetnog clana a_1 i diferencije d aritmetickog niza (a_n). Opcenito suma prvih k clanova aritmetickog niza (b_k), ako je b_1 njegov prvi clan, a $d_{(b_k)}$ diferencija, jednaka je:

$$^{(b_k)}S_k = \frac{k}{2} \cdot (b_1 + b_k)$$

Uvrstimo li izvedene jednakosti izraz za sumu poprima sljedeci oblik:

$$^{(b_k)}S_k = \frac{k}{2} \cdot (\underset{\underset{a_1+d}{\uparrow}}{b_1} + \overset{\overset{a_1+(2\cdot k-1)\cdot d}{\downarrow}}{b_k}) \quad \Rightarrow \quad ^{(b_k)}S_k = \frac{k}{2} \cdot [a_1 + d + a_1 + (2 \cdot k - 1) \cdot d]$$

Zamijenimo poredak drugog i teceg clana sume u vanjskoj zagradi na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$^{(b_k)}S_k = \frac{k}{2} \cdot [a_1 + d + a_1 + (2 \cdot k - 1) \cdot d]$$

$$^{(b_k)}S_k = \frac{k}{2} \cdot [a_1 + a_1 + d + (2 \cdot k - 1) \cdot d]$$

Izlucimo d iz druga dva clana sume u vanjskoj zagradi desne strane jednakosti, slijedi:

$$^{(b_k)}S_k = \frac{k}{2} \cdot [a_1 + a_1 + (1 + 2 \cdot k - 1) \cdot d]$$

Zbrojimo istovjetne potencije, slijedi:

$$^{(b_k)}S_k = \frac{k}{2} \cdot \big[a_1 + a_1 + \big(\cancel{1} + 2 \cdot k \cancel{- 1}\big) \cdot d\big]$$

$$^{(b_k)}S_k = \frac{k}{2} \cdot (2 \cdot a_1 + 2 \cdot k \cdot d)$$

Izlucimo broj 2 iz oba clana sume u zagradi na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$^{(b_k)}S_k = \frac{k}{2} \cdot 2 \cdot (a_1 + k \cdot d)$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$^{(b_k)}S_k = \frac{k}{{}_1\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}^1 \cdot (a_1 + k \cdot d)}{1}$$

$$^{(b_k)}S_k = \frac{k \cdot (a_1 + k \cdot d)}{1}$$

$$^{(b_k)}S_k = k \cdot (a_1 + k \cdot d)$$

Dakle suma prvih k clanova aritmetickog niza (a_n) koji se nalaze na parnim pozicijama pri cemu je a_1 pocetni clan, a d diferencija tog niza, jednaka:

$$^{\substack{\text{parna}\\ \text{mjesta}}}S_k = k \cdot (a_1 + k \cdot d)$$

Neka je (a_n) aritmeticki niz s opcim clanom a_n. Tada mozemo definirati novi aritmeticki niz (c_k) koji ce sadrzavati samo one clanove prvog niza koji se nalaze na neparnim pozicijama:

aritmeticki niz (c_k)

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8,\ a_9,\ a_{10},\ a_{11},\ a_{12}$$

Opcenito opci clan c_k tog novodefiniranog aritmetickog niza (c_k), ako je c_1 njegov prvi clan, a $d_{(c_k)}$ diferencija, jednak je:

$$c_k = c_1 + (k - 1) \cdot d_{(c_k)}$$

Pokusajmo taj izraz zapisati pomocu pocetnog clana i diferencije aritmetickog niza (a_n). Uocimo da je pocetni clan tog niza zapravo prvi clan a_1 aritmetickog niza (a_n). Njegova pak je diferencija dvostruko veca od diferencije aritmetickog niza (a_n) jer su clanovi novodefiniranog niza (c_k) jednaki svakom drugom clanu aritmetickog niza (a_n). Dakle vrijedi:

$$c_1 = a_1$$

$$d_{(c_k)} = 2 \cdot d$$

Tada opci clan c_k tog novodefiniranog aritmetickog niza (c_k) poprima sljedeci oblik:

$$c_k = \overset{\overset{a_1}{\downarrow}}{c_1} + (k-1) \cdot \overset{\overset{2 \cdot d}{\downarrow}}{d_{(c_k)}} \quad \Rightarrow \quad c_k = a_1 + (k-1) \cdot 2 \cdot d$$

Dakle time smo izrazili opci clan c_k aritmetickog niza (a_n) pomocu pocetnog clana a_1 i diferencije d aritmetickog niza (a_n).

Nadalje pogledajmo cemu je jednaka suma prvih k clanova aritmetickog niza (c_k) prikazanih pomocu pocetnog clana a_1 i diferencije d aritmetickog niza (a_n). Opcenito suma prvih k clanova aritmetickog niza (c_k), ako je c_1 njegov prvi clan, a $d_{(c_k)}$ diferencija, jednaka je:

$$^{(c_k)}S_k = \frac{k}{2} \cdot (c_1 + c_k)$$

Uvrstimo li izvedene jednakosti izraz za sumu poprima sljedeci oblik:

$$^{(c_k)}S_k = \frac{k}{2} \cdot (\underset{\underset{a_1}{\uparrow}}{c_1} + \overset{\overset{a_1 + (k-1) \cdot 2 \cdot d}{\downarrow}}{c_k}) \quad \Rightarrow \quad ^{(b_k)}S_k = \frac{k}{2} \cdot [a_1 + a_1 + (k-1) \cdot 2 \cdot d]$$

Zbrojimo istovjetne potencije, slijedi:

$$^{(c_k)}S_k = \frac{k}{2} \cdot [2 \cdot a_1 + (k-1) \cdot 2 \cdot d]$$

Izlucimo broj 2 iz oba clana sume u zagradi na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$^{(c_k)}S_k = \frac{k}{2} \cdot 2 \cdot [a_1 + (k-1) \cdot d]$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$^{(c_k)}S_k = \frac{k}{{}_1\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}^1 \cdot [a_1 + (k-1) \cdot d]}{1}$$

$$^{(c_k)}S_k = \frac{k \cdot [a_1 + (k-1) \cdot d]}{1}$$

$$^{(c_k)}S_k = k \cdot [a_1 + (k-1) \cdot d]$$

Dakle suma prvih k clanova aritmetickog niza (a_n) koji se nalaze na parnim pozicijama pri cemu je a_1 pocetni clan, a d diferencija tog niza, jednaka:

$$^{\substack{\text{neparna} \\ \text{mjesta}}}S_k = k \cdot [a_1 + (k-1) \cdot d]$$