Aritmeticki niz

Zadatak 5: (str. 91) Koliko je prirodnih brojeva manjih od 500 koji su djeljivi s 11, a nisu djeljivi s 11^2?

Rjesenje: Brojeve djeljive s 11 mozemo prikazati pomocu aritmetickog niza (a_n) ciji je opci clan jednak:

$$a_n = 11n$$

Da bismo odredili koliko ima takvih brojeva manjih od 500 rijesit cemo sljedecu nejednadzbu:

$$a_n < 500$$

Ta nejednadzba nakon sto uvrstimo izraz za opci clan aritmetickog niza (a_n) poprima sljeci oblik:

$$\overset{\overset{11n}{\downarrow}}{a_n} < 500$$

$$11n < 500$$

Pomnozimo cijelu nejednakost s $\frac{1}{11}$, slijedi:

$$11n < 500 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{11}$$

$$11n \cdot \frac{1}{11} < 500 \cdot \frac{1}{11}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{11}n}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{11}_{1}} < 500 \cdot \frac{1}{11}$$

$$\frac{n}{1} < \frac{500}{11}$$

Kako je $\frac{500}{11}$ jednako $45.\dot{4}\dot{5}$, slijedi:

$$n < 45.\dot{4}\dot{5}$$

Kako n mora biti prirodan broj zakljucujemo da n mora biti manji ili jednak 45, odnosno da brojeva djeljivih s 11, manjih od 500 ima tocno 45.

Na slican nacin pozabavimo se brojevima koji su djeljivi s 11^2. Prikazimo ih aritmetickim nizom (b_n) ciji je opci clan jednak:

$$b_n = 11^2 n$$

Kako jer 11^2 jednako 121, opci clan aritmetickog niza (b_n) ima sljedeci oblik:

$$b_n = 121n$$

Zanima nas koliko takvih brojeva ima manjih od 500. Da bismo odredili koliko ih ima rijesit cemo sljedecu nejednadzbu:

$$b_n < 500$$

Dana nejednadzba nakon sto uvrstimo izraz za opci clan aritmetickog niza (b_n) poprima sljeci oblik:

$$\overset{121n}{\overset{\downarrow}{b_n}} < 500$$

$$121n < 500$$

Pomnozimo cijelu nejednakost s $\frac{1}{121}$, slijedi:

$$121n < 500 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{121}$$

$$121n \cdot \frac{1}{121} < 500 \cdot \frac{1}{121}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{121}n}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{121}_{1}} < 500 \cdot \frac{1}{121}$$

$$\frac{n}{1} < \frac{500}{121}$$

Kako je $\frac{500}{121}$ jednako $4.\dot{1}32231404958677685950\dot{4}$, slijedi:

$$n < 4.\dot{1}32231404958677685950\dot{4}$$

Kako n mora biti prirodan broj zakljucujemo da n mora biti manji ili jednak 4, odnosno da brojeva djeljivih s 121, manjih od 500 ima tocno 4.

Kako je svaki broj koji je djeljiv brojem 121 ujedno i djeljiv brojem 11, da bismo dobili tocan broj brojeva koji su djeljivi brojem 11, a nisu djeljivi brojem 121 i manji su od 500 moramo od 45 oduzeti 4. Naime tocno 4 su broja djeljiva i s 11 i s 121.

Dakle tocno je 41 broj manji od 500 djeljiv s 11, a nije djeljiv s 121. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 6: (str. 91) Koliko je prirodnih brojeva manjih od 500 koji su djeljivi s 11 ili s 13 (ili s oba ta broja)?

Rjesenje: Brojeve djeljive s 11 mozemo prikazati pomocu aritmetickog niza (a_n) ciji je opci clan jednak:

$$a_n = 11n$$

Da bismo odredili koliko ima takvih brojeva manjih od 500 rijesit cemo sljedecu nejednadzbu:

$$a_n < 500$$

Ta nejednadzba nakon sto uvrstimo izraz za opci clan aritmetickog niza (a_n) poprima sljeci oblik:

$$\overset{\overset{11n}{\downarrow}}{a_n} < 500$$

$$11n < 500$$

Pomnozimo cijelu nejednakost s $\frac{1}{11}$, slijedi:

$$11n < 500 \;\Big/ \cdot \frac{1}{11}$$

$$11n \cdot \frac{1}{11} < 500 \cdot \frac{1}{11}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{11}n}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{11}_1} < 500 \cdot \frac{1}{11}$$

$$\frac{n}{1} < \frac{500}{11}$$

Kako je $\frac{500}{11}$ jednako $45.\dot{4}\dot{5}$, slijedi:

$$n < 45.\dot{4}\dot{5}$$

Kako n mora biti prirodan broj zakljucujemo da n mora biti manji ili jednak 45, odnosno da brojeva djeljivih s 11, manjih od 500 ima tocno 45.

Na slican nacin pozabavimo se brojevima koji su djeljivi s 13. Prikazimo ih aritmetickim nizom (b_n) ciji je opci clan jednak:

$$b_n = 13n$$

Zanima nas koliko takvih brojeva ima manjih od 500. Da bismo odredili koliko ih ima rijesit cemo sljedecu nejednadzbu:

$$b_n < 500$$

Dana nejednadzba nakon sto uvrstimo izraz za opci clan aritmetickog niza (b_n) poprima sljeci oblik:

$$\overset{\overset{13n}{\downarrow}}{b_n} < 500$$

$$13n < 500$$

Pomnozimo cijelu nejednakost s $\frac{1}{13}$, slijedi:

$$13n < 500 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{13}$$

$$13n \cdot \frac{1}{13} < 500 \cdot \frac{1}{13}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{13}n}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{13}_1} < 500 \cdot \frac{1}{13}$$

$$\frac{n}{1} < \frac{500}{13}$$

Kako je $\frac{500}{13}$ jednako $38.\dot{4}6153\dot{8}$, slijedi:

$$n < 38.\dot{4}6153\dot{8}$$

Kako n mora biti prirodan broj zakljucujemo da n mora biti manji ili jednak 38, odnosno da brojeva djeljivih s 13, manjih od 500 ima tocno 38.

Ako bi sad zbrojiti broj brojeva manjih od 500 koji su djeljivi s 11 i broj onih koji su djeljivi s 13 neke bi brojali dva put. Tocno one koji su djeljivi i s 11 i s 13. Ti brojevi su zapravo djeljivi s $11 \cdot 13$, odnosno s 143. Te brojeve mozemo prikazati pomocu aritmetickog niza (c_n) ciji je opci clan jednak:

$$c_n = 143n$$

Da bismo odredili koliko ima takvih brojeva manjih od 500 rijesit cemo sljedecu nejednadzbu:

$$c_n < 500$$

Ta nejednadzba nakon sto uvrstimo izraz za opci clan aritmetickog niza (a_n) poprima sljeci oblik:

$$\overset{\overset{143n}{\downarrow}}{c_n} < 500$$

$$143n < 500$$

Pomnozimo cijelu nejednakost s $\frac{1}{143}$, slijedi:

$$143n < 500 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{143}$$

$$143n \cdot \frac{1}{143} < 500 \cdot \frac{1}{143}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{143}n}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{143}_{1}} < 500 \cdot \frac{1}{143}$$

$$\frac{n}{1} < \frac{500}{143}$$

Kako je $\frac{500}{143}$ jednako $3.\dot{4}9650\dot{3}$, slijedi:

$$n < 3.\dot{4}9650\dot{3}$$

Kako n mora biti prirodan broj zakljucujemo da n mora biti manji ili jednak 3, odnosno da brojeva djeljivih s 11 i s 13, manjih od 500 ima tocno 3.

Dakle da bismo odredili ukupan broj brojeva manjih od 500 i djeljivih brojem 11 ili brojem 13 odredit cemo tako da zbrojimo broj brojeva manjih od 500 djeljivih s 11 s brojem brojeva manjih od 500 djeljivih s 13 i oduzmemo broj brojeva manjih od 500 djeljivih s 11 i s brojem 13. Dakle takvih brojeva je:

$$N_{11|n \text{ ili } 13|n \text{ i } n<500} = 45 + 38 - 3 = 80$$

Dakle brojeva s trazenim svojstvom jest 80. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 7: (str. 91) Koliki je zbroj svih prirodnih brojeva manjih od 5000 djeljivih s 19?

Rjesenje: Brojeve djeljive s 19 mozemo prikazati pomocu aritmetickog niza (a_n) ciji je opci clan jednak:

$$a_n = 19n$$

Da bismo odredili koliko ima takvih brojeva manjih od 5000 rijesit cemo sljedecu nejednadzbu:

$$a_n < 5000$$

Ta nejednadzba nakon sto uvrstimo izraz za opci clan aritmetickog niza (a_n) poprima sljeci oblik:

$$\overset{\substack{19n \\ \downarrow}}{a_n} < 5000$$

$$19n < 5000$$

Pomnozimo cijelu nejednakost s $\frac{1}{19}$, slijedi:

$$19n < 500 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{19}$$

$$19n \cdot \frac{1}{11} < 5000 \cdot \frac{1}{19}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{19}n}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{19}_1} < \frac{5000}{1} \cdot \frac{1}{19}$$

$$\frac{n}{1} < \frac{5000}{19}$$

Kako je $\frac{5000}{19}$ jednako $263.\dot{1}5789473684210526\dot{3}$, slijedi:

$$n < 263.\dot{1}5789473684210526\dot{3}$$

Kako n mora biti prirodan broj zakljucujemo da n mora biti manji ili jednak 45, odnosno da brojeva djeljivih s 19, manjih od 5000 ima tocno 263.

Nas zadatak je zbrojiti ta 263 broja. Dakle nas zadatak je odrediti rezultat sljedece sume:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = (\star)$$

Imajuci na umu da je brojeva koje zbrajam tocno 263 te da je k-ti broj oblika $19k$, suma poprima sljedeci oblik:

$$(\star) = \sum_{k=1}^{\overset{\substack{263 \\ \downarrow}}{n}} \underset{\substack{\nwarrow \\ 19k}}{a_k} = \sum_{k=1}^{263} 19k = (\star\star)$$

Dobivena suma dade se raspisati na sljedeci nacin, slijedi:

$$(\star\star) = 19 \cdot 1 + 19 \cdot 2 + 19 \cdot 3 + ... + 19 \cdot 263 = (\star\star\star)$$

Izlucimo 19 iz svih clanova sume, slijedi:

$$(\star\star\star) = 19 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 263) = (\clubsuit)$$

Primjetimo da se u zagradi nalazi suma prva 263 prirodna broja. Prisjetimo se da se suma prvih n prirodnih brojeva racuna prema izrazu:

$$1+2+3+...+n=\frac{n\,(n+1)}{2}$$

Imajuci taj izraz na umu, suma poprima sljedeci oblik:

$$(\clubsuit)=19\cdot\overbrace{(1+2+3+...+263)}^{\frac{263\cdot(263+1)}{2}}=19\cdot\frac{263\cdot(263+1)}{2}=19\cdot\frac{263\cdot 264}{2}=(\clubsuit\clubsuit)$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$(\clubsuit\clubsuit)=19\cdot\frac{263\cdot{}^{132}\cancel{264}}{\cancel{2}_1}=19\cdot\frac{263\cdot 132}{1}=19\cdot 263\cdot 132=659604$$

Dakle suma brojeva manjih od 5000 djeljivih s 19 jednaka je 659604. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 12: (str. 91) Dokazi da je niz (a_n) s opcim clanom a_n aritmeticki:

$$a_n=\frac{3n+2}{5}$$

Rjesenje: Prisjetimo se da je osnovno svojstvo aritmetickih nizova cinjenica da je razlika nekog clana niza i njegovog neposrednog prethodnika uvijek jednaka, odnosno da za svaki $n\in\mathbb{N}$ mora vrijediti:

$$a_{n+1}-a_n=d$$

Odredimo $(n+1)$-vi clan danog artmetickog niza tako da zamijenimo n s $n+1$ u izrazu za opci clan niza (a_n), slijedi:

$$\underset{\substack{\downarrow\\ n+1}}{a_n}=\frac{3\overset{\substack{n+1\\ \downarrow}}{n}+2}{5}\quad\Rightarrow\quad a_{n+1}=\frac{3\,(n+1)+2}{5}=(\star)$$

Rijesimos se zagrade u brojniku te zbrojimo sto se zbrojiti dade, slijedi:

$$(\star)=\frac{3n+3+2}{5}=\frac{3n+5}{5}$$

Odredimo razliku $(n+1)$-vi clana niza i njegovog neposrednog prethodnika, racunamo:

$$\overset{\frac{3n+5}{5}}{\overset{\downarrow}{a_{n+1}}} - \underset{\frac{3n+2}{5}}{\underset{\uparrow}{a_n}} = \frac{3n+5}{5} - \frac{3n+2}{5} = \frac{3n+5-(3n+2)}{5} = (\spadesuit)$$

Rijesimo se zagrade u brojniku nazivnika, slijedi:

$$(\spadesuit) = \frac{3n+5-3n-2}{5} = (\spadesuit\spadesuit)$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$(\spadesuit\spadesuit) = \frac{\cancel{3n}+5\cancel{-3n}-2}{5} = \frac{5-2}{5} = \frac{3}{5}$$

Kako je razlika svakog clana niza i neposrednog prethodnika tog clana jednaka $\frac{3}{5}$, dakle stalna je, zakljucujemo da je niz aritmeticki. Time je zadatak rjesen.

Zadatak 19: (str. 91) Odredi nepoznanicu x tako da brojevi $\sqrt{x+1}$, $\sqrt{5x+9}$ i $\sqrt{12x+25}$ budu tri uzastopna clana aritmetickog niza.

Rjesenje: Prisjetimo se da je stvojstvo po kojem je zapravo aritmeticki niz dobio ime oblika:

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$$

Drugim rijecima ako su dana tri uzastopna clana aritmetickog niza, tada je srednji clan aritmeticka sredina onih koji su mu neposredni susjedi.

Pretpostavimo da su dani izrazi tri uzastopna clana aritmetickog niza, pri cemu je izraz $\sqrt{x+1}$ prvi, $\sqrt{5x+9}$ drugi, a $\sqrt{12x+25}$ treci po redu medju njima. Tada mora vrijediti:

$$\overset{\sqrt{5x+9}}{\overset{\downarrow}{2a_n}} = \underset{\sqrt{5x+9}}{\underset{\uparrow}{a_{n-1}}} + \overset{\sqrt{12x+25}}{\overset{\downarrow}{a_{n+1}}} \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \sqrt{5x+9} = \sqrt{x+1} + \sqrt{12x+25}$$

Kvadriramo dobiveni izraz, slijedi:

$$2 \cdot \sqrt{5x+9} = \sqrt{x+1} + \sqrt{12x+25} \ /^{2}$$

$$\left(2 \cdot \sqrt{5x+9}\right)^2 = \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{12x+25}\right)^2$$

Lijevu stranu jednakosti raspisat cemo prema izrazu za mnozenje potencija istih eksponenata, odnosno prema $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$, dok desnu stranu jednakosti

raspisujemo prema izrazu za kvadrat binoma, odnosno prema
$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. Vrijedi:

$$2^2 \cdot \left(\sqrt{5x+9}\right)^2 = \left(\sqrt{x+1}\right)^2 + 2 \cdot \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{12x+25} + \left(\sqrt{12x+25}\right)^2$$

$$4 \cdot (5x+9) = x + 1 + 2 \cdot \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{12x+25} + 12x + 25$$

Rijesimo se zagrade na lijevoj strani jednakosti te pozbrojimo sto se dade na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$4 \cdot 5x + 4 \cdot 9 = 13x + 26 + 2 \cdot \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{12x+25}$$

$$20x + 36 = 13x + 26 + 2 \cdot \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{12x+25}$$

Prebacimo prva dva sumanda iz sume na desnoj strani jednakosti na lijevu, slijedi:

$$20x + 36 = 13x + 26 + 2 \cdot \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{12x+25}$$

$$20x + 36 - 13x - 26 = +2 \cdot \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{12x+25}$$

Zbrojimo sto se zbrojiti dade, slijedi:

$$7x + 10 = 2 \cdot \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{12x+25}$$

Izraz na desnoj strani jednakosti mozemo srediti prema izrazu za mnozenje korijena istih stupnjeva, odnosno prema $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$, slijedi:

$$7x + 10 = 2 \cdot \sqrt{(x+1) \cdot (12x+25)}$$

Kvadriramo cijelu jednakost, slijedi:

$$7x + 10 = 2 \cdot \sqrt{(x+1) \cdot (12x+25)} \quad \Big/^{2}$$

$$(7x+10)^2 = \left(2 \cdot \sqrt{(x+1) \cdot (12x+25)}\right)^2$$

Desnu stranu jednakosti raspisat cemo prema izrazu za mnozenje potencija istih eksponenata, odnosno prema $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$, dok lijevu stranu jednakosti raspisujemo prema izrazu za kvadrat binoma, odnosno prema
$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. Vrijedi:

$$(7x)^2 + 2 \cdot 7x \cdot 10 + 10^2 = 2^2 \cdot \left(\sqrt{(x+1) \cdot (12x+25)}\right)^2$$

$$49x^2 + 140x + 100 = 4 \cdot (x+1) \cdot (12x+25)$$

Rjiesimo se zagrade na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$49x^2 + 140x + 100 = 4 \cdot (x \cdot 12x + x \cdot 25 + 1 \cdot 12x + 1 \cdot 25)$$

$$49x^2 + 140x + 100 = 4 \cdot \left(12x^2 + 25x + 12x + 25\right)$$

Zbrojimo sto se zbrojiti dade na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$49x^2 + 140x + 100 = 4 \cdot \left(12x^2 + 37x + 25\right)$$

Rijesimo se zagrade na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$49x^2 + 140x + 100 = 4 \cdot 12x^2 + 4 \cdot 37x + 4 \cdot 25$$

$$49x^2 + 140x + 100 = 48x^2 + 148x + 100$$

Prebacimo sve s desne strane jednakosti na lijevu, slijedi:

$$49x^2 + 140x + 100 = 48x^2 + 148x + 100$$

$$49x^2 + 140x + 100 - 48x^2 - 148x - 100 = 0$$

Zbrojimo sto se zbrojiti dade, slijedi:

$$x^2 - 8x = 0$$

Izlucimo x iz oba clana sume na lijevoj strani jednakosti, slijedi:

$$x\,(x - 8) = 0$$

Ako je umnozak dvaju brojeva jednak nuli tada je barem jedan od njih jednak nuli, dakle vrijedi:

$$x\,(x - 8) = 0$$

$$x_1 = 0 \qquad x - 8 = 0$$

$$x_2 = 8$$

Treba provjeriti zadovoljavaju li dobivena rjesenja ocetnu jednadzbu. Provjerimo prvo jeli 0 zaista rjesenje pocetne jednadzbe, slijedi:

$$2 \cdot \sqrt{5\underset{\overset{\uparrow}{0}}{x} + 9} = \sqrt{\underset{\overset{\uparrow}{0}}{x} + 1} + \sqrt{12\underset{\overset{\uparrow}{0}}{x} + 25}$$

$$2 \cdot \sqrt{5 \cdot 0 + 9} = \sqrt{0 + 1} + \sqrt{12 \cdot 0 + 25}$$

$$2 \cdot \sqrt{0 + 9} = \sqrt{1} + \sqrt{0 + 25}$$

$$2 \cdot \sqrt{9} = 1 + \sqrt{25}$$

$$2 \cdot 3 = 1 + 5$$

$$6 = 6$$

Dakle $x_1 = 0$ jest rjesenje pocetne jednadzbe. Isti postupak provodimo i za drugo rjesenje $x_2 = 8$, racunamo:

$$2 \cdot \sqrt{5\underset{\overset{\uparrow}{8}}{x} + 9} = \sqrt{\underset{\overset{\uparrow}{8}}{x} + 1} + \sqrt{12\underset{\overset{\uparrow}{8}}{x} + 25}$$

$$2\cdot\sqrt{5\cdot 8+9}=\sqrt{8+1}+\sqrt{12\cdot 8+25}$$
$$2\cdot\sqrt{40+9}=\sqrt{9}+\sqrt{96+25}$$
$$2\cdot\sqrt{49}=3+\sqrt{121}$$
$$2\cdot 7=3+11$$
$$14=14$$

Dakle i $x_2=8$ jest rjesenje pocetne jednadzbe.

Zakljucujemo da ako je x jednak 0 ili 8 dani izrazi cinit ce tri uzastopna clana aritmetickog niza. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 21: (str. 91) Za koje su realne vrijednosti broja x brojevi $\log 2$, $\log\left(2^x-1\right)$ i $\log\left(2^x+3\right)$ tri uzastopna clana aritmetickog niza?

Rjesenje: Prisjetimo se da je stvojstvo po kojem je zapravo aritmeticki niz dobio ime oblika:

$$2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}$$

Drugim rijecima ako su dana tri uzastopna clana aritmetickog niza, tada je srednji clan aritmeticka sredina onih koji su mu neposredni susjedi.

Pretpostavimo da su dani izrazi tri uzastopna clana aritmetickog niza, pri cemu je izraz $\log 2$ prvi, $\log\left(2^x-1\right)$ drugi, a $\log\left(2^x+3\right)$ treci po redu medju njima. Tada mora vrijediti:

$$\overset{\substack{\log\left(2^x-1\right)\\ \downarrow}}{2a_n}=\underset{\substack{\uparrow\\ \log 2}}{a_{n-1}}+\overset{\substack{\log\left(2^x+3\right)\\ \downarrow}}{a_{n+1}}\quad\Rightarrow\quad 2\cdot\log\left(2^x-1\right)=\log 2+\log\left(2^x+3\right)$$

Lijevu stranu jednakosti raspisat cemo prema izrazu $\log_a x^r=r\cdot\log_a x$, dok cemo desnu stranu jednakosti raspisati prema izrazu za zbroj logaritama istih baza, odnosno prema $\log_a x+\log_a y=\log_a(x\cdot y)$. Vrijedi:

$$\log\left(2^x-1\right)^2=\log\left[2\cdot\left(2^x+3\right)\right]$$

Nadalje prisjetimo se da vrijedi sljedeca tvrdnja:

$$\log_a x_1=\log_a x_2\quad\Leftrightarrow\quad x_1=x_2$$

Dakle posljednja jednakost sada se svodi na sljedecu jednakost:

$$\left(2^x-1\right)^2=2\cdot\left(2^x+3\right)$$

Uvest cemo supstituciju u za izraz 2^x, odnosno $u = 2^x$. Slijedi:

$$(\underset{\underset{u}{\uparrow}}{2^x} - 1)^2 = 2 \cdot (\underset{\underset{u}{\uparrow}}{2^x} + 3)$$

$$(u-1)^2 = 2 \cdot (u+3)$$

Lijevu stranu jednakosti raspisujemo prema izrazu za kvadrat binoma, odnosno prema $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, dok se na desnoj strani jednakosti rijesim zagrade, slijedi:

$$u^2 - 2 \cdot u \cdot 1 + 1^2 = 2 \cdot u + 2 \cdot 3$$

$$u^2 - 2u + 1 = 2u + 6$$

Prebacimo sve izraze s desne strane jednakosti na lijevu, slijedi:

$$u^2 - 2u + 1 = 2u + 6$$

$$u^2 - 2u + 1 - 2u - 6 = 0$$

Zbrojimo sto se zbrojiti dade, slijedi:

$$u^2 - 4u - 5 = 0$$

Rjesenja dobivene kvadratne jednadzbe trazimo pomoocu izraza:

$$u_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Racunam:

$$u_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1}$$

$$u_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2}$$

$$u_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$u_{1,2} = \frac{4 \pm 6}{2}$$

Odredimo prvo rjesenje, racunamo:

$$u_1 = \frac{4-6}{2} = \frac{-2}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$u_1 = \frac{{}^{-1}\cancel{-2}}{\cancel{2}_1} = \frac{-1}{1} = -1$$

Dakle prvo rjesenje jednko je $u_1 = -1$. Odredimo jos i drugo rjesenje, slijedi:

$$u_2 = \frac{4+6}{2} = \frac{10}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$u_2 = \frac{{}^5\cancel{10}}{\cancel{2}_1} = \frac{5}{1} = 5$$

Drugo rjesenje jednako je $u_2 = 5$. Preostaje jos vratiti supstituciju, odnosno rijesimo sljedece dvije eksponecijalne jednadzbe:

$$2^{x_1} = \overset{\overset{-1}{\downarrow}}{u_1} \quad \text{i } 2^{x_2} = \overset{\overset{5}{\downarrow}}{u_2}$$

$$2^{x_1} = -1 \quad \text{i } 2^{x_2} = 5$$

Lijeva jednadzba nema rjesenja zbog cinjenice da su vrijednosti eksponencijalne funkcije uvijek pozitivne. Preostaje samo rjesiti desnu eksponecijalnu jednadzbu:

$$2^{x_2} = 5$$

Logaritmiramo cijelu jednakost s logaritmom po bazi 2, slijedi:

$$2^{x_2} = 5 \,/\log_2$$

$$\log_2 2^{x_2} = \log_2 5$$

Prisjetimo se da vrijedi jednakost $\log_a a^x = x$. Imajuci je na umu slijedi:

$$\overbrace{\log_2 2^{x_2}}^{\overset{x_2}{\uparrow}} = \log_2 5$$

$$x_2 = \log_2 5$$

Dakle za $x = \log_2 5$ tri broja dana u zadatku cine tri uzastopna clana aritmetickog niza. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 23: (str. 92) Brojevi 1, x, y uzastopni su clanovi niza. Odredi x i y ako je $x^2 - 2 = 2y$.

Rjesenje: Prisjetimo se da je stvojstvo po kojem je zapravo aritmeticki niz dobio ime oblika:

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$$

Drugim rijecima ako su dana tri uzastopna clana aritmetickog niza, tada je srednji clan aritmeticka sredina onih koji su mu neposredni susjedi.

Pretpostavimo da su dani izrazi tri uzastopna clana aritmetickog niza, pri cemu je izraz 1 prvi, x drugi, a y treci po redu medju njima. Tada mora vrijediti:

$$2\overset{\overset{x}{\downarrow}}{a_n} = \underset{\underset{1}{\uparrow}}{a_{n-1}} + \overset{\overset{y}{\downarrow}}{a_{n+1}} \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot x = 1 + y$$

Prebacimo 1 s desne na lijevu stranu jednakosti, slijedi:

$$2x = 1 + y$$

$$2x - 1 = y$$

Iz teksta zadatka citamo da vrijedi $x^2 - 2 = 2y$. Dakle dobivamo sljedeci sustav jednadzbi:

$$\begin{cases} 2x - 1 = y \\ x^2 - 2 = 2y \end{cases}$$

Primjenimo jednakost iz prve jednadzbe na drugu, slijedi:

$$x^2 - 2 = 2\overset{\overset{2x-1}{\downarrow}}{y}$$

$$x^2 - 2 = 2 \cdot (2x - 1)$$

Rijesimo se zagrade na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$x^2 - 2 = 2 \cdot 2x - 2 \cdot 1$$

$$x^2 - 2 = 4x - 2$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$x^2 \cancel{-2} = 4x \cancel{-2}$$

$$x^2 = 4x$$

Prebacimo $4x$ s desne na lijevu stranu jednakosti, slijedi:

$$x^2 = 4x$$

$$x^2 - 4x = 0$$

Izlucimo x iz oba clana sume na lijevoj strani jednakosti, slijedi:

$$x \cdot (x - 4) = 0$$

Ako je umnozak dvaju brojeva jednak nuli tada je barem jedan od njih jednak nuli, dakle vrijedi:

$$x\,(x - 4) = 0$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$x_1 = 0 \qquad x - 4 = 0$$

$$x_2 = 4$$

Preostaje nam jos odrediti opdgovarajuce vrijednosti za y. Racunamo:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 2\overset{\overset{0}{\downarrow}}{x_1} - 1 & \qquad y_2 &= 2\overset{\overset{4}{\downarrow}}{x_2} - 1 \\
y_1 &= 2 \cdot 0 - 1 & y_2 &= 2 \cdot 4 - 1 \\
y_1 &= 0 - 1 & y_2 &= 8 - 1 \\
y_1 &= -1 & y_2 &= 7
\end{aligned}
$$

Dakle za sljedeca dva uredjena para (x, y), dakle za $(0, -1)$, $(4, 7)$, niz je aritmeticki. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 26: (str. 92) Zbroj triju uzastopnih clanova aritmetickog niza iznosi 33. Njihov je umnozak jednak 1287. Odredi te brojeve.

Rjesenje: Neka su a_1, a_2 i a_3 tri uzastopna clana aritmetickog niza. Tada vrijedi sljedeci sustav jednadzbi:

$$
\begin{cases}
a_1 + a_2 + a_3 = 33 \\
a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 1287
\end{cases}
$$

Kako opci (n-ti) clan aritmetickog niza racunamo preko izraza:

$$a_n = a_1 + (n-1)\, d, \; n > 1$$

tada druga dva clana niza poprimaju sljedeci oblik:

$$\underset{\underset{2}{\uparrow}}{a_n} = a_1 + (\overset{\overset{2}{\downarrow}}{n} - 1)\, d \quad \Rightarrow \quad a_2 = a_1 + (2-1)\, d = a_1 + d$$

$$\underset{\underset{3}{\uparrow}}{a_n} = a_1 + (\overset{\overset{3}{\downarrow}}{n} - 1)\, d \quad \Rightarrow \quad a_3 = a_1 + (3-1)\, d = a_1 + 2d$$

Sada sustav jednadzbi poprima sljedeci oblik:

$$
\begin{cases}
a_1 + \overset{\overset{a_1+d}{\downarrow}}{a_2} + \overset{\overset{a_1+2d}{\swarrow}}{a_3} = 33 \\
a_1 \cdot \underset{\underset{a_1+d}{\swarrow}}{a_2} \cdot \underset{\underset{a_1+2d}{\downarrow}}{a_3} = 1287
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 33 \\ a_1 \cdot (a_1 + d) \cdot (a_1 + 2d) = 1287 \end{cases}$$

Usredotocimo se za pocetak na prvu jednadzbu:

$$a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 33$$

Pozbrojimo istovjetne potecncije, slijedi:

$$3a_1 + 3d = 33$$

Izlucimo broj 3 iz oba clana sume na lijevoj strani jednakosti, slijedi:

$$3 \cdot (a_1 + d) = 33$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{3}$, slijedi:

$$3 \cdot (a_1 + d) = 33 \ / \cdot \frac{1}{3}$$

$$3 \cdot (a_1 + d) \cdot \frac{1}{3} = 33 \cdot \frac{1}{3}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{3} \cdot (a_1 + d)}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{3}_1} = \frac{{}^{11}\cancel{33}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{3}_1}$$

$$\frac{a_1 + d}{1} = \frac{11}{1}$$

$$a_1 + d = 11$$

Prebacimo izraz a_1 s lijeve strane jednakosti na desnu, slijedi:

$$a_1 + \overset{\mapsto}{d} = 11$$

$$a_1 = 11 - d$$

Nadalje pozabavimo se drugom jednadzbom:

$$a_1 \cdot (a_1 + d) \cdot (a_1 + 2d) = 1287$$

Primjenimo cinjenicu da vrijedi $a_1 = 11 - d$, slijedi:

$$\overset{\substack{11-d \\ \searrow}}{a_1} \cdot (\overset{\substack{11-d \\ \downarrow}}{a_1} + d) \cdot (\overset{\substack{11-d \\ \swarrow}}{a_1} + 2d) = 1287$$

$$(11 - d) \cdot (11 - d + d) \cdot (11 - d + 2d) = 1287$$

Zbrojimo istovjetne potencije, slijedi:

$$(11 - d) \cdot \big(11 \cancel{-d} + \cancel{d}\big) \cdot (11 + d) = 1287$$

$$(11-d)\cdot 11\cdot(11+d)=1287$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{11}$, slijedi:

$$(11-d)\cdot 11\cdot(11+d)=1287\ /\cdot\frac{1}{11}$$

$$(11-d)\cdot 11\cdot(11+d)\cdot\frac{1}{11}=1287\cdot\frac{1}{11}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{(11-d)\cdot{}^{1}\cancel{11}\cdot(11+d)}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{11}_{1}}=\frac{{}^{117}\cancel{1287}}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{11}_{1}}$$

$$\frac{(11-d)\cdot(11+d)}{1}=\frac{117}{1}$$

$$(11-d)\cdot(11+d)=117$$

Uocimo da je lijeva strana jednakosti zapravo rapisana razlika kvadrata koju sredjujemo prema sljedecem izrazu $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. Dakle vrijedi:

$$\overbrace{(11-d)\cdot(11+d)}^{11^2-d^2}=117$$

$$11^2-d^2=117$$

$$121-d^2=117$$

Prebacimo broj 121 s lijeve strane jednakosti na lijevu, slijedi:

$$121-d^2=117$$

$$-d^2=117-121$$

$$-d^2=-4$$

Pomnozimo cijelu jednakost s -1, slijedi:

$$-d^2=-4\ /\cdot(-1)$$

$$-d^2\cdot(-1)=-4\cdot(-1)$$

$$d^2=4$$

Korijenujemo cijelu jednakost, slijedi:

$$d^2=4/;/\sqrt{\ }$$

$$d_{1,2}=\pm 2$$

Preostaje nam jos odrediti opdgovarajuce vrijednosti za a_1. Racunamo:

$$a_{1_1} = 11 - \overset{\overset{-2}{\downarrow}}{d_1} \qquad a_{1_2} = 11 - \overset{\overset{2}{\downarrow}}{d_2}$$

$$a_{1_1} = 11 - (-2) \qquad a_{1_2} = 11 - 2$$

$$a_{1_1} = 11 + 2 \qquad a_{1_2} = 9$$

$$a_{1_1} = 13$$

Dakle dva aritmeticka niza zadovoljavaju pocetne uvjete zadatka i to aritmeticki niz kojem je pocetni clan jednak 13, a difirencija -2 i aritmeticki niz kojem je pocetni clan jednak 9, a diferencija 2. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 27: (str. 92) Zbroj triju uzastopnih clanova aritmetickog niza iznosi 27, a zbroj njihovih kvadrata jednak je 275. Koji je to niz?

Rjesenje: Neka su a_1, a_2 i a_3 tri uzastopna clana aritmetickog niza. Tada vrijedi sljedeci sustav jednadzbi:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 27 \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 275 \end{cases}$$

Kako opci (n-ti) clan aritmetickog niza racunamo preko izraza:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d, \;\; n > 1$$

tada druga dva clana niza poprimaju sljedeci oblik:

$$\underset{\underset{2}{\uparrow}}{a_n} = a_1 + (\overset{\overset{2}{\downarrow}}{n} - 1)\,d \quad \Rightarrow \quad a_2 = a_1 + (2-1)\,d = a_1 + d$$

$$\underset{\underset{3}{\uparrow}}{a_n} = a_1 + (\overset{\overset{3}{\downarrow}}{n} - 1)\,d \quad \Rightarrow \quad a_3 = a_1 + (3-1)\,d = a_1 + 2d$$

Sada sustav jednadzbi poprima sljedeci oblik:

$$\begin{cases} a_1 + \overset{\overset{a_1+d}{\downarrow}}{a_2} + \overset{\overset{a_1+2d}{\swarrow}}{a_3} = 33 \\ a_1^2 + \underset{\underset{a_1+d}{\nearrow}}{a_2^2} + \underset{\underset{a_1+2d}{\uparrow}}{a_3^2} = 275 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 27 \\ a_1^2 + (a_1+d)^2 + (a_1+2d)^2 = 275 \end{cases}$$

Usredotocimo se za pocetak na prvu jednadzbu:

$$a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 27$$

Pozbrojimo istovjetne potecncije, slijedi:

$$3a_1 + 3d = 27$$

Izlucimo broj 3 iz oba clana sume na lijevoj strani jednakosti, slijedi:

$$3 \cdot (a_1 + d) = 27$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{3}$, slijedi:

$$3 \cdot (a_1 + d) = 27 \; / \cdot \frac{1}{3}$$

$$3 \cdot (a_1 + d) \cdot \frac{1}{3} = 27 \cdot \frac{1}{3}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{3} \cdot (a_1 + d)}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{3}_1} = \frac{{}^{9}\cancel{27}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{3}_1}$$

$$\frac{a_1 + d}{1} = \frac{9}{1}$$

$$a_1 + d = 9$$

Prebacimo izraz a_1 s lijeve strane jednakosti na desnu, slijedi:

$$a_1 + \overset{\mapsto}{d} = 9$$

$$a_1 = 9 - d$$

Nadalje pozabavimo se drugom jednadzbom:

$$a_1^2 + (a_1 + d)^2 + (a_1 + 2d)^2 = 275$$

Primjenimo cinjenicu da vrijedi $a_1 = 9 - d$, slijedi:

$$\overset{11-d}{a_1^2} + (\overset{11-d}{a_1} + d)^2 + (\overset{11-d}{a_1} + 2d)^2 = 275$$

$$(9 - d)^2 + (9 - d + d)^2 + (9 - d + 2d)^2 = 275$$

Zbrojimo istovjetne potencije, slijedi:

$$(9 - d)^2 + \left(9 \cancel{-d} + \cancel{d}\right)^2 + (9 - d + 2d)^2 = 275$$

$$(9 - d)^2 + 9^2 + (9 + d)^2 = 275$$

$$(9 - d)^2 + 81 + (9 + d)^2 = 275$$

Prvi i posljednji clan sume na lijevoj strani jednakosti raspisujema prema izrazu za kvadrat binoma, odnosno prema $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, slijedi:

$$9^2 - 2 \cdot 9 \cdot d + d^2 + 81 + 9^2 - 2 \cdot 9 \cdot d + d^2 = 275$$

$$81 - 18d + d^2 + 81 + 81 + 18d + d^2 = 275$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$81 \cancel{- 18d} + d^2 + 81 + 81 + \cancel{18d} + d^2 = 275$$

$$81 + d^2 + 81 + 81 + d^2 = 275$$

Zbrojimo istovjetne potencije, slijedi:

$$2d^2 + 273 = 275$$

Prebacimo broj 273 s lijeve strane jednakosti na lijevu, slijedi:

$$2d^2 + \overset{\mapsto}{273} = 275$$

$$2d^2 = 275 - 273$$

$$2d^2 = 2$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{2}$, slijedi:

$$2d^2 = 2 \; / \cdot \frac{1}{2}$$

$$2d^2 \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^1\cancel{2}d^2}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1} = \frac{{}^1\cancel{2}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1}$$

$$\frac{d^2}{1} = \frac{1}{1}$$

$$d^2 = 1$$

Korijenujemo cijelu jednakost, slijedi:

$$d^2 = 1 \; / \sqrt{}$$

$$d_{1,2} = \pm 1$$

Preostaje nam jos odrediti opdgovarajuce vrijednosti za a_1. Racunamo:

$$a_{1_1} = 9 - \overset{\overset{-1}{\downarrow}}{d_1} \qquad a_{1_2} = 9 - \overset{\overset{1}{\downarrow}}{d_2}$$

$$a_{1_1} = 9 - (-1) \qquad a_{1_2} = 9 - 1$$
$$a_{1_1} = 9 + 1 \qquad a_{1_2} = 8$$
$$a_{1_1} = 10$$

Dakle dva aritmeticka niza zadovoljavaju pocetne uvjete zadatka i to aritmeticki niz kojem je pocetni clan jednak 10, a difirencija -1 i aritmeticki niz kojem je pocetni clan jednak 8, a diferencija 1. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 28: (str. 92) Cetiri broja cine aritmeticki niz, s njihov je zbroj 20. Zbroj njihovih reciprocnih vrijednosti iznosi $\frac{25}{24}$. Koji su to brojevi?

Rjesenje: Niz od cetiri broja koja cine cetiri uzastopna clana aritmetickog niza zapisat cemo na poprilicno specifican nacin.

Neka je dan neki realan broj x. Difirencija danog niza oznacimo standardnom oznaom d. Dva susjedna clana aritmetickog niza mozemo pomocu x i d zapisati na sljedeci nacin:

$$x - \frac{d}{2} \quad \text{i} \quad x + \frac{d}{2}$$

Promotrimo li malo dane izraze vidimo da se oni razlikuju tocno za diferenciju d sto je u skladu s definicijom aritmetickog niza. Nadalje oduzmem li d od prvog od ta dva broja te dodam d drugom od ta dva broja dobit cemo jos dva clana aritmetickog niza, odnosno sljedeci izrazi cine cetiri uzastopna clana aritmetickog niza:

$$x - \frac{d}{2} - d,\ x - \frac{d}{2},\ x + \frac{d}{2},\ x + \frac{d}{2} + d$$

Sredimo krajnje clanove niza:

$$x - \frac{d}{2} - d \quad \text{i} \quad x + \frac{d}{2} + d$$

Svedemo na zajednicki nazivnik 2 posljednja dva clana sume kod obaju clanova, slijedi:

$$x + \frac{-d \cdot 1 - d \cdot 2}{2} \quad \text{i} \quad x + \frac{d \cdot 1 + d \cdot 2}{2}$$
$$x + \frac{-d - 2d}{2} \quad \text{i} \quad x + \frac{d + 2d}{2}$$
$$x + \frac{-3d}{2} \quad \text{i} \quad x + \frac{2d}{2}$$
$$x - \frac{3d}{2} \quad \text{i} \quad x + \frac{3d}{2}$$

Cijeli niz sada ima sljedeci oblik:

$$x-\frac{3d}{2},\ x-\frac{d}{2},\ x+\frac{d}{2},\ x+\frac{3d}{2}$$

Podatke dane u zadatku mozemo zapisati pomocu sljedeceg sustava jednadzbi:

$$\begin{cases} x-\frac{3d}{2}+x-\frac{d}{2}+x+\frac{d}{2}+x+\frac{3d}{2}=20 \\ \frac{1}{x-\frac{3d}{2}}+\frac{1}{x-\frac{d}{2}}+\frac{1}{x+\frac{d}{2}}+\frac{1}{x+\frac{3d}{2}}=\frac{25}{24} \end{cases}$$

Usredotocimo se na prvu jednadzbu:

$$x-\frac{3d}{2}+x-\frac{d}{2}+x+\frac{d}{2}+x+\frac{3d}{2}=20$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$x\cancel{-\frac{3d}{2}}+x\cancel{-\frac{d}{2}}+x+\cancel{\frac{d}{2}}+x+\cancel{\frac{3d}{2}}=20$$

$$x+x+x+x=20$$

Zbrojimo istovjetne potencije, slijedi:

$$4x=20$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{4}$, slijedi:

$$4x=20\ /\cdot\frac{1}{4}$$

$$4x\cdot\frac{1}{4}=20\cdot\frac{1}{4}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{4}x}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{4}_{1}}=\frac{{}^{5}\cancel{20}}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{4}_{1}}$$

$$\frac{x}{1}=\frac{5}{1}$$

$$x=5$$

Nadalje obratimo pozornost da drugu jednadzbu:

$$\frac{1}{x-\frac{3d}{2}}+\frac{1}{x-\frac{d}{2}}+\frac{1}{x+\frac{d}{2}}+\frac{1}{x+\frac{3d}{2}}=\frac{25}{24}$$

Primjenimo cinjenicu da vrijedi $x = 5$. Dakle jednakost poprima sljedeci oblik:

$$\frac{1}{\underset{\substack{\uparrow\\5}}{x} - \frac{3d}{2}} + \frac{1}{\underset{\substack{\uparrow\\5}}{x} - \frac{d}{2}} + \frac{1}{\underset{\substack{\uparrow\\5}}{x} + \frac{d}{2}} + \frac{1}{\underset{\substack{\uparrow\\5}}{x} + \frac{3d}{2}} = \frac{25}{24}$$

$$\frac{1}{5 - \frac{3d}{2}} + \frac{1}{5 - \frac{d}{2}} + \frac{1}{5 + \frac{d}{2}} + \frac{1}{5 + \frac{3d}{2}} = \frac{25}{24}$$

Pomnozimo cijelu jednakost s izrazom $24\left(5 - \frac{3d}{2}\right) \cdot \left(5 - \frac{d}{2}\right) \cdot \left(5 + \frac{d}{2}\right) \cdot \left(5 + \frac{3d}{2}\right)$, slijedi:

$$\frac{1}{5 - \frac{3d}{2}} + \frac{1}{5 - \frac{d}{2}} + \frac{1}{5 + \frac{d}{2}} + \frac{1}{5 + \frac{3d}{2}} = \frac{25}{24} \Big/ \cdot 24\left(5 - \frac{3d}{2}\right) \cdot \left(5 - \frac{d}{2}\right) \cdot \left(5 + \frac{d}{2}\right) \cdot \left(5 + \frac{3d}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{5 - \frac{3d}{2}} \cdot 24\left(5 - \frac{3d}{2}\right) \cdot \left(5 - \frac{d}{2}\right) \cdot \left(5 + \frac{d}{2}\right) \cdot \left(5 + \frac{3d}{2}\right) + \\
&\quad + \frac{1}{5 - \frac{d}{2}} \cdot 24\left(5 - \frac{3d}{2}\right) \cdot \left(5 - \frac{d}{2}\right) \cdot \left(5 + \frac{d}{2}\right) \cdot \left(5 + \frac{3d}{2}\right) + \\
&\qquad + \frac{1}{5 + \frac{d}{2}} \cdot 24\left(5 - \frac{3d}{2}\right) \cdot \left(5 - \frac{d}{2}\right) \cdot \left(5 + \frac{d}{2}\right) \cdot \left(5 + \frac{3d}{2}\right) + \\
&\qquad\quad + \frac{1}{5 + \frac{3d}{2}} \cdot 24\left(5 - \frac{3d}{2}\right) \cdot \left(5 - \frac{d}{2}\right) \cdot \left(5 + \frac{d}{2}\right) \cdot \left(5 + \frac{3d}{2}\right) = \\
&\qquad\qquad = \frac{25}{24} \cdot 24\left(5 - \frac{3d}{2}\right) \cdot \left(5 - \frac{d}{2}\right) \cdot \left(5 + \frac{d}{2}\right) \cdot \left(5 + \frac{3d}{2}\right)
\end{aligned}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{1}{{}_1\cancel{5 - \frac{3d}{2}}} \cdot \frac{24 \cdot \cancel{\left(5 - \frac{3d}{2}\right)}^1 \cdot \left(5 - \frac{d}{2}\right) \cdot \left(5 + \frac{d}{2}\right) \cdot \left(5 + \frac{3d}{2}\right)}{1} +$$

$$+ \frac{1}{{}_1\cancel{5 - \frac{d}{2}}} \cdot \frac{24 \cdot \left(5 - \frac{3d}{2}\right) \cdot \cancel{\left(5 - \frac{d}{2}\right)}^1 \cdot \left(5 + \frac{d}{2}\right) \cdot \left(5 + \frac{3d}{2}\right)}{1} +$$

$$+\frac{1}{{}_1\cancel{5+\frac{d}{2}}}\cdot\frac{24\cdot\left(5-\frac{3d}{2}\right)\cdot\left(5-\frac{d}{2}\right)\cdot\cancel{\left(5+\frac{d}{2}\right)}^1\cdot\left(5+\frac{3d}{2}\right)}{1}+$$

$$+\frac{1}{{}_1\cancel{5+\frac{3d}{2}}}\cdot\frac{24\cdot\left(5-\frac{3d}{2}\right)\cdot\left(5-\frac{d}{2}\right)\cdot\left(5+\frac{d}{2}\right)\cdot\cancel{\left(5+\frac{3d}{2}\right)}^1}{1}=$$

$$=\frac{25}{{}_1\cancel{24}}\cdot\frac{\cancel{24}^1\cdot\left(5-\frac{3d}{2}\right)\cdot\left(5-\frac{d}{2}\right)\cdot\left(5+\frac{d}{2}\right)\cdot\left(5+\frac{3d}{2}\right)}{1}$$

$$\frac{24\cdot\left(5-\frac{d}{2}\right)\cdot\left(5+\frac{d}{2}\right)\cdot\left(5+\frac{3d}{2}\right)}{1}+\frac{24\cdot\left(5-\frac{3d}{2}\right)\cdot\left(5+\frac{d}{2}\right)\cdot\left(5+\frac{3d}{2}\right)}{1}+$$

$$+\frac{24\cdot\left(5-\frac{3d}{2}\right)\cdot\left(5-\frac{d}{2}\right)\cdot\left(5+\frac{3d}{2}\right)}{1}+\frac{24\cdot\left(5-\frac{3d}{2}\right)\cdot\left(5-\frac{d}{2}\right)\cdot\left(5+\frac{d}{2}\right)}{1}=$$

$$=\frac{25\cdot\left(5-\frac{3d}{2}\right)\cdot\left(5-\frac{d}{2}\right)\cdot\left(5+\frac{d}{2}\right)\cdot\left(5+\frac{3d}{2}\right)}{1}$$

$$24\cdot\left(5-\frac{d}{2}\right)\cdot\left(5+\frac{d}{2}\right)\cdot\left(5+\frac{3d}{2}\right)+24\cdot\left(5-\frac{3d}{2}\right)\cdot\left(5+\frac{d}{2}\right)\cdot\left(5+\frac{3d}{2}\right)+$$

$$+24\cdot\left(5-\frac{3d}{2}\right)\cdot\left(5-\frac{d}{2}\right)\cdot\left(5+\frac{3d}{2}\right)+24\cdot\left(5-\frac{3d}{2}\right)\cdot\left(5-\frac{d}{2}\right)\cdot\left(5+\frac{d}{2}\right)=$$

$$=25\cdot\left(5-\frac{3d}{2}\right)\cdot\left(5-\frac{d}{2}\right)\cdot\left(5+\frac{d}{2}\right)\cdot\left(5+\frac{3d}{2}\right)$$

Poredamo clanove produkta svakog sumanda na malo primjereniji nacin, slijedi:

$$24\cdot\left(5-\frac{d}{2}\right)\cdot\left(5+\frac{d}{2}\right)\cdot\left(5+\frac{3d}{2}\right)+24\cdot\left(5-\frac{3d}{2}\right)\cdot\left(5+\frac{3d}{2}\right)\cdot\left(5+\frac{d}{2}\right)+$$

$$+24\cdot\left(5-\frac{d}{2}\right)\cdot\left(5-\frac{3d}{2}\right)\cdot\left(5+\frac{3d}{2}\right)+24\cdot\left(5-\frac{3d}{2}\right)\cdot\left(5-\frac{d}{2}\right)\cdot\left(5+\frac{d}{2}\right)=$$

$$=25\cdot\left(5-\frac{d}{2}\right)\cdot\left(5+\frac{d}{2}\right)\cdot\left(5-\frac{3d}{2}\right)\cdot\left(5+\frac{3d}{2}\right)$$

Iz prvog i posljednjeg clana sume na lijevoj strani jednakosti izlucimo $24 \cdot \left(5-\frac{d}{2}\right) \cdot \left(5+\frac{d}{2}\right)$, dok iz drugog i treceg clana sume na lijevoj strani jednakosti izlucimo $24 \cdot \left(5-\frac{3d}{2}\right) \cdot \left(5+\frac{3d}{2}\right)$, slijedi:

$$24 \cdot \left(5-\frac{d}{2}\right) \cdot \left(5+\frac{d}{2}\right) \cdot \left(5+\frac{3d}{2}+5-\frac{3d}{2}\right)+$$
$$+24 \cdot \left(5-\frac{3d}{2}\right) \cdot \left(5+\frac{3d}{2}\right) \cdot \left(5+\frac{d}{2}+5-\frac{d}{2}\right)=$$
$$=25 \cdot \left(5-\frac{d}{2}\right) \cdot \left(5+\frac{d}{2}\right) \cdot \left(5-\frac{3d}{2}\right) \cdot \left(5+\frac{3d}{2}\right)$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$24 \cdot \left(5-\frac{d}{2}\right) \cdot \left(5+\frac{d}{2}\right) \cdot \left(5+\cancel{\frac{3d}{2}}+5\cancel{-\frac{3d}{2}}\right)+$$
$$+24 \cdot \left(5-\frac{3d}{2}\right) \cdot \left(5+\frac{3d}{2}\right) \cdot \left(5+\cancel{\frac{d}{2}}+5\cancel{-\frac{d}{2}}\right)=$$
$$=25 \cdot \left(5-\frac{d}{2}\right) \cdot \left(5+\frac{d}{2}\right) \cdot \left(5-\frac{3d}{2}\right) \cdot \left(5+\frac{3d}{2}\right)$$

$$24 \cdot \left(5-\frac{d}{2}\right) \cdot \left(5+\frac{d}{2}\right) \cdot 10+24 \cdot \left(5-\frac{3d}{2}\right) \cdot \left(5+\frac{3d}{2}\right) \cdot 10=$$
$$=25 \cdot \left(5-\frac{d}{2}\right) \cdot \left(5+\frac{d}{2}\right) \cdot \left(5-\frac{3d}{2}\right) \cdot \left(5+\frac{3d}{2}\right)$$

$$240 \cdot \left(5-\frac{d}{2}\right) \cdot \left(5+\frac{d}{2}\right)+240 \cdot \left(5-\frac{3d}{2}\right) \cdot \left(5+\frac{3d}{2}\right)=$$
$$=25 \cdot \left(5-\frac{d}{2}\right) \cdot \left(5+\frac{d}{2}\right) \cdot \left(5-\frac{3d}{2}\right) \cdot \left(5+\frac{3d}{2}\right)$$

Primjetimo da se kod svakog sumanda kao dio produkta nalazi razlika kvadrata koju cemo srediti prema izrazu $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a+b)$. Vrijedi:

$$240 \cdot \overbrace{\left(5-\frac{d}{2}\right) \cdot \left(5+\frac{d}{2}\right)}^{5^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2}+240 \cdot \overbrace{\left(5-\frac{3d}{2}\right) \cdot \left(5+\frac{3d}{2}\right)}^{5^2-\left(\frac{3d}{2}\right)^2}=$$
$$=25 \cdot \underbrace{\left(5-\frac{d}{2}\right) \cdot \left(5+\frac{d}{2}\right)}_{5^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2} \cdot \underbrace{\left(5-\frac{3d}{2}\right) \cdot \left(5+\frac{3d}{2}\right)}_{5^2-\left(\frac{3d}{2}\right)^2}$$

$$240 \cdot \left[5^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2\right] + 240 \cdot \left[5^2 - \left(\frac{3d}{2}\right)^2\right] = 25 \cdot \left[5^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2\right] \cdot \left[5^2 - \left(\frac{3d}{2}\right)^2\right]$$

Drugi clan sume u svakoj od zagrada raspisujem prema pravilu za djeljenje potencija istih eksponenata, odnosno prema $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, slijedi:

$$240 \cdot \left(25 - \frac{d^2}{2^2}\right) + 240 \cdot \left[25 - \frac{(3d)^2}{2^2}\right] = 25 \cdot \left(25 - \frac{d^2}{2^2}\right) \cdot \left[25 - \frac{(3d)^2}{2^2}\right]$$

Nadalje izraz u brojniku drugog sumanda u drugim zagradama na lijevoj i desnoj strani jednakosti rapisujemo prema izrazu za mnozenje potencija istih eksponenata, odnosno prema $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$, slijedi:

$$240 \cdot \left(25 - \frac{d^2}{4}\right) + 240 \cdot \left(25 - \frac{3^2 d^2}{4}\right) = 25 \cdot \left(25 - \frac{d^2}{4}\right) \cdot \left(25 - \frac{3^2 d^2}{4}\right)$$

$$240 \cdot \left(25 - \frac{d^2}{4}\right) + 240 \cdot \left(25 - \frac{9d^2}{4}\right) = 25 \cdot \left(25 - \frac{d^2}{4}\right) \cdot \left(25 - \frac{9d^2}{4}\right)$$

Dobiveni izraz zapisemo na malo drugaciji nacin, vrijedi:

$$240 \cdot \left(25 - \frac{d^2}{4}\right) + 240 \cdot \left(25 - 9 \cdot \frac{d^2}{4}\right) = 25 \cdot \left(25 - \frac{d^2}{4}\right) \cdot \left(25 - 9 \cdot \frac{d^2}{4}\right)$$

Uvodimo supstituciju $\frac{d^2}{4} = w$. Sada jednakost poprima sljedeci oblik:

$$240 \cdot \left(25 - \overset{\overset{w}{\uparrow}}{\frac{d^2}{4}}\right) + 240 \cdot \left(25 - 9 \cdot \overset{\overset{w}{\uparrow}}{\frac{d^2}{4}}\right) = 25 \cdot \left(25 - \overset{\overset{w}{\uparrow}}{\frac{d^2}{4}}\right) \cdot \left(25 - 9 \cdot \overset{\overset{w}{\uparrow}}{\frac{d^2}{4}}\right)$$

$$240 \cdot (25 - w) + 240 \cdot (25 - 9w) = 25 \cdot (25 - w) \cdot (25 - 9w)$$

Rijesimo se zagrada s obje strane jednakosti, slijedi:

$$240 \cdot 25 + 240 \cdot (-w) + 240 \cdot 25 + 240 \cdot (-9w) = 25 \cdot [25 \cdot 25 + 25 \cdot (-9w) + (-w) \cdot 25 + (-w) \cdot (-9w)]$$

$$6000 - 240w + 6000 - 2160w = 25 \cdot \left(625 - 225w - 25w + 9w^2\right)$$

Zbrojimo istovjetne potencije, slijedi:

$$12000 - 2400w = 25 \cdot \left(625 - 250w + 9w^2\right)$$

Rijesimo se zagrade na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$12000 - 2400w = 25 \cdot 625 + 25 \cdot (-250w) + 25 \cdot 9w^2$$

$$12000 - 2400w = 15625 - 6250w + 225w^2$$

Prebacimo sve s lijeve strane jednakosti na desnu, slijedi:

$$\overset{\mapsto}{12000} - \overset{\mapsto}{2400w} = 15625 - 6250w + 225w^2$$

$$0 = -12000 + 2400w + 15625 - 6250w + 225w^2$$

Zbrojimo istovjetne potencije, slijedi:

$$0 = 3625 - 3850w + 225w^2$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{25}$, slijedi:

$$0 = 3625 - 3850w + 225w^2 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{25}$$

$$0 = 3625 \cdot \frac{1}{25} - 3850w \cdot \frac{1}{25} + 225w^2 \cdot \frac{1}{25}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$0 = \frac{{}^{145}\cancel{3625}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{25}_1} - \frac{{}^{154}\cancel{3850}w}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{25}_1} + \frac{{}^{9}\cancel{225}w^2}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{25}_1}$$

$$0 = \frac{145}{1} - \frac{154w}{1} + \frac{9w^2}{1}$$

$$0 = 145 - 154w + 9w^2$$

Zamijenimo lijevu i desnu stranu jednakosti te poredamo potencije po stupnju, vrijedi:

$$9w^2 - 154w + 145 = 0$$

Rjesenja dobivene kvadratne jednadzbe trazimo pomoocu izraza:

$$w_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Racunam:

$$w_{1,2} = \frac{-(-154) \pm \sqrt{(-154)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 145}}{2 \cdot 9}$$

$$w_{1,2} = \frac{154 \pm \sqrt{23716 - 5220}}{18}$$

$$w_{1,2} = \frac{154 \pm \sqrt{18496}}{18}$$

$$w_{1,2} = \frac{154 \pm 136}{18}$$

Odredimo prvo rjesenje, racunamo:

$$w_1 = \frac{154 - 136}{2} = \frac{18}{18}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$w_1 = \frac{{}^{1}\cancel{18}}{\cancel{18}_1} = \frac{1}{1} = 1$$

Dakle prvo rjesenje jednko je $w_1 = 1$. Odredimo jos i drugo rjesenje, slijedi:

$$w_2 = \frac{154 + 136}{18} = \frac{290}{18}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$w_2 = \frac{{}^{145}\cancel{290}}{\cancel{18}_9} = \frac{145}{9}$$

Drugo rjesenje jednako je $w_2 = \dfrac{145}{9}$. Preostaje jos vratiti supstituciju, odnosno rijesiti sljedece dvije kvadratne jednadzbe:

$$\frac{d_1^2}{4} = \overset{\overset{1}{\downarrow}}{w_1} \quad \text{i} \quad \frac{d_2^2}{4} = \overset{\overset{\frac{145}{9}}{\downarrow}}{w_2}$$

$$\frac{d_1^2}{4} = 1 \quad \text{i} \quad \frac{d_2^2}{4} = \frac{145}{9}$$

Lijeve strane obje jednakosti sredimo prema izrazu za dijeljenje potencija istih eksponenanta, odnosno prema $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$. Imajuci na umu da vrijedi $4 = 2^2$ jednakosti poprimaju sljedeci oblik:

$$\frac{d_1^2}{2^2} = 1 \quad \text{i} \quad \frac{d_2^2}{2^2} = \frac{145}{9}$$

$$\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = 1 \quad \text{i} \quad \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = \frac{145}{9}$$

Korijenujemo obje jednakosti, slijedi:

$$\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = 1 \Big/ \sqrt{} \quad \text{i} \quad \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = \frac{145}{9} \Big/ \sqrt{}$$

$$\frac{d_1}{2} = \pm 1 \quad \text{i} \quad \frac{d_2}{2} = \pm\sqrt{\frac{145}{9}}$$

$$\frac{d_2}{2} = \pm\frac{\sqrt{145}}{3}$$

Dakle govorimo o sljedecim nizovima:

$$\begin{aligned}
\text{Prvi niz:} &\quad x = 5,\ \frac{d}{2} = -1 \\
\text{Drugi niz:} &\quad x = 5,\ \frac{d}{2} = 1 \\
\text{Treci niz:} &\quad x = 5,\ \frac{d}{2} = -\frac{\sqrt{145}}{3} \\
\text{Cetvrti niz:} &\quad x = 5,\ \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{145}}{3}
\end{aligned}$$

Time je zadatak rijesen.

Zadatak 29: (str. 92) Zbroj cetiriju brojeva sto cine aritmeticki niz jednak je 1, a zbroj njihovih kubova iznosi 0.1. Koji su to brojevi?

Rjesenje: Niz od cetiri broja koja cine cetiri uzastopna clana aritmetickog niza zapisat cemo na poprilicno specifican nacin.

Neka je dan neki realan broj x. Difirencija danog niza oznacimo standardnom oznaom d. Dva susjedna clana aritmetickog niza mozemo pomocu x i d zapisati na sljedeci nacin:

$$x - \frac{d}{2} \quad \text{i} \quad x + \frac{d}{2}$$

Promotrimo li malo dane izraze vidimo da se oni razlikuju tocno za diferenciju d sto je u skladu s definicijom aritmetickog niza. Nadalje oduzmem li d od prvog od ta dva broja te dodam d drugom od ta dva broja dobit cemo jos dva clana aritmetickog niza, odnosno sljedeci izrazi cine cetiri uzastopna clana aritmetickog niza:

$$x - \frac{d}{2} - d,\ x - \frac{d}{2},\ x + \frac{d}{2},\ x + \frac{d}{2} + d$$

Sredimo krajnje clanove niza:

$$x - \frac{d}{2} - d \quad \text{i} \quad x + \frac{d}{2} + d$$

Svedemo na zajednicki nazivnik 2 posljednja dva clana sume kod obaju clanova, slijedi:

$$\begin{aligned}
x + \frac{-d \cdot 1 - d \cdot 2}{2} &\quad \text{i} \quad x + \frac{d \cdot 1 + d \cdot 2}{2} \\
x + \frac{-d - 2d}{2} &\quad \text{i} \quad x + \frac{d + 2d}{2} \\
x + \frac{-3d}{2} &\quad \text{i} \quad x + \frac{2d}{2}
\end{aligned}$$

$$x - \frac{3d}{2} \quad \text{i} \quad x + \frac{3d}{2}$$

Cijeli niz sada ima sljedeci oblik:

$$x - \frac{3d}{2},\ x - \frac{d}{2},\ x + \frac{d}{2},\ x + \frac{3d}{2}$$

Podatke dane u zadatku mozemo zapisati pomocu sljedeceg sustava jednadzbi:

$$\begin{cases} x - \frac{3d}{2} + x - \frac{d}{2} + x + \frac{d}{2} + x + \frac{3d}{2} = 1 \\ \left(x - \frac{3d}{2}\right)^3 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^3 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^3 + \left(x + \frac{3d}{2}\right)^3 = 0.1 \end{cases}$$

Usredotocimo se na prvu jednadzbu:

$$x - \frac{3d}{2} + x - \frac{d}{2} + x + \frac{d}{2} + x + \frac{3d}{2} = 1$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$x \cancel{- \frac{3d}{2}} + x \cancel{- \frac{d}{2}} + x + \cancel{\frac{d}{2}} + x + \cancel{\frac{3d}{2}} = 1$$

$$x + x + x + x = 1$$

Zbrojimo istovjetne potencije, slijedi:

$$4x = 1$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{4}$, slijedi:

$$4x = 1 \ / \cdot \frac{1}{4}$$

$$4x \cdot \frac{1}{4} = 1 \cdot \frac{1}{4}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^1\cancel{4}x}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{4}_1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{4}$$

Nadalje obratimo pozornost da drugu jednadzbu:

$$\left(x - \frac{3d}{2}\right)^3 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^3 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^3 + \left(x + \frac{3d}{2}\right)^3 = 0.1$$

Primjenimo cinjenicu da vrijedi $x = 5$. Dakle jednakost poprima sljedeci oblik:

$$\left(\underset{\substack{\uparrow\\ \frac{1}{4}}}{x} - \frac{3d}{2}\right)^3 + \left(\underset{\substack{\uparrow\\ \frac{1}{4}}}{x} - \frac{d}{2}\right)^3 + \left(\underset{\substack{\uparrow\\ \frac{1}{4}}}{x} + \frac{d}{2}\right)^3 + \left(\underset{\substack{\uparrow\\ \frac{1}{4}}}{x} + \frac{3d}{2}\right)^3 = 0.1$$

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{3d}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{4} - \frac{d}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{4} + \frac{d}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{4} + \frac{3d}{2}\right)^3 = 0.1$$

Svaku zagradu raspisujemo prema izrazu za kub binoma, odnosno prema $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$, slijedi:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{4}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{3d}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3d}{2}\right)^2 - \left(\frac{3d}{2}\right)^3 + \\
&\quad + \left(\frac{1}{4}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{d}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^3 + \\
&\quad\quad + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{d}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^3 + \\
&\quad\quad + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{3d}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3d}{2}\right)^2 + \left(\frac{3d}{2}\right)^3 = 0.1
\end{aligned}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cancel{-3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{3d}{2}} + 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3d}{2}\right)^2 \cancel{- \left(\frac{3d}{2}\right)^3} + \\
&\quad + \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cancel{-3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{d}{2}} + 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cancel{- \left(\frac{d}{2}\right)^3} + \\
&\quad\quad + \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cancel{+ 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{d}{2}} + 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cancel{+ \left(\frac{d}{2}\right)^3} + \\
&\quad\quad + \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cancel{+ 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{3d}{2}} + 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3d}{2}\right)^2 \cancel{+ \left(\frac{3d}{2}\right)^3} = 0.1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{4}\right)^3 + 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3d}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \\
&\quad + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3d}{2}\right)^2 = 0.1
\end{aligned}$$

Posljednji clan produkta u svakom drugom clanu sume na lijevoj strani jednakosti raspisujem prema pravilu za djeljenje potencija istih eksponenata, odnosno prema $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, slijedi:

$$\frac{1}{64} + \frac{3}{4} \cdot \frac{(3d)^2}{2^2} + \frac{1}{64} + \frac{3}{4} \cdot \frac{d^2}{2^2} + \frac{1}{64} + \frac{3}{4} \cdot \frac{(3d)^2}{2^2} + \frac{1}{64} + \frac{3}{4} \cdot \frac{d^2}{2^2} = 0.1$$

$$\frac{1}{64} + \frac{3}{4} \cdot \frac{(3d)^2}{4} + \frac{1}{64} + \frac{3}{4} \cdot \frac{d^2}{4} + \frac{1}{64} + \frac{3}{4} \cdot \frac{(3d)^2}{4} + \frac{1}{64} + \frac{3}{4} \cdot \frac{d^2}{4} = 0.1$$

Sve preostale zagrade raspisemo prema pravilu za mnozenje potencija istih eksponenata, odnosno prema $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^2$, slijedi:

$$\frac{1}{64} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3^2 \cdot d^2}{4} + \frac{1}{64} + \frac{3}{4} \cdot \frac{d^2}{4} + \frac{1}{64} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3^2 \cdot d^2}{4} + \frac{1}{64} + \frac{3}{4} \cdot \frac{d^2}{4} = 0.1$$

$$\frac{1}{64} + \frac{3}{4} \cdot \frac{9d^2}{4} + \frac{1}{64} + \frac{3}{4} \cdot \frac{d^2}{4} + \frac{1}{64} + \frac{3}{4} \cdot \frac{9d^2}{4} + \frac{1}{64} + \frac{3}{4} \cdot \frac{d^2}{4} = 0.1$$

$$\frac{1}{64} + \frac{27d^2}{16} + \frac{1}{64} + \frac{3d^2}{16} + \frac{1}{64} + \frac{27d^2}{16} + \frac{1}{64} + \frac{3d^2}{16} = 0.1$$

Zbrojimo istovjetne potencije te decimalan broj na desnoj strani jednakosti prikazemo u obliku razlomka, slijedi:

$$\frac{1+1+1+1}{64} + \frac{27d^2 + 3d^2 + 27d^2 + 3d^2}{16} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{4}{64} + \frac{60d^2}{16} = \frac{1}{10}$$

Pomnozimo cijelu jednakost s 640, slijedi:

$$\frac{4}{64} + \frac{60d^2}{16} = \frac{1}{10} \quad \Big/ \cdot 640$$

$$\frac{4}{{}_1\cancel{64}} \cdot \frac{\cancel{640}^{10}}{1} + \frac{60d^2}{{}_1\cancel{16}} \cdot \frac{\cancel{640}^{40}}{1} = \frac{1}{{}_1\cancel{10}} \cdot \frac{\cancel{640}^{64}}{1}$$

$$\frac{40}{1} + \frac{2400d^2}{1} = \frac{64}{1}$$

$$40 + 2400d^2 = 64$$

Prebacimo broj 40 s lijeve na desnu stranu jednakosti, slijedi:

$$2400d^2 = 64 - 40$$

$$2400d^2 = 24$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{2400}$, slijedi:

$$2400d^2 = 24 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{2400}$$

$$2400d^2 \cdot \frac{1}{2400} = 24 \cdot \frac{1}{2400}$$

Pokratimo sto se poktatiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{2400}d^2}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2400}_1} = \frac{{}^{1}\cancel{24}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2400}_{100}}$$

$$\frac{d^2}{1} = \frac{1}{100}$$

$$d^2 = \frac{1}{100}$$

Korijenujemo cijelu jednakost, slijedi:

$$d^2 = \frac{1}{100} \Big/ \sqrt{\ }$$

$$d_{1,2} = \pm \frac{1}{10}$$

Dakle govorimo o sljedecim nizovima:

$$\text{Prvi niz:} \quad x = \frac{1}{4},\ d = -\frac{1}{10}$$
$$\text{Drugi niz:} \quad x = \frac{1}{4},\ d = \frac{1}{10}$$

Time je zadatak rijesen.

Zadatak 30: (str. 92) Cetiri pozitivna broja uzastopni su clanovi aritmetickog niza s razlikom 2. Umnozak tih brojeva jednak je 19305. Koji su to brojevi?

Rjesenje: Niz od cetiri broja koja cine cetiri uzastopna clana aritmetickog niza zapisat cemo na poprilicno specifican nacin.

Neka je dan neki realan broj x. Difirencija danog niza oznacimo standardnom oznaom d. Dva susjedna clana aritmetickog niza mozemo pomocu x i d zapisati na sljedeci nacin:

$$x - \frac{d}{2} \quad \text{i} \quad x + \frac{d}{2}$$

Promotrimo li malo dane izraze vidimo da se oni razlikuju tocno za diferenciju d sto je u skladu s definicijom aritmetickog niza. Nadalje oduzmem li d od prvog od ta dva broja te dodam d drugom od ta dva broja dobit cemo jos dva clana aritmetickog niza, odnosno sljedeci izrazi cine cetiri uzastopna clana aritmetickog niza:

$$x - \frac{d}{2} - d,\ x - \frac{d}{2},\ x + \frac{d}{2},\ x + \frac{d}{2} + d$$

Sredimo krajnje clanove niza:

$$x - \frac{d}{2} - d \quad \text{i} \quad x + \frac{d}{2} + d$$

Svedemo na zajednicki nazivnik 2 posljednja dva clana sume kod obaju clanova, slijedi:

$$x + \frac{-d \cdot 1 - d \cdot 2}{2} \quad \text{i} \quad x + \frac{d \cdot 1 + d \cdot 2}{2}$$

$$x + \frac{-d - 2d}{2} \quad \text{i} \quad x + \frac{d + 2d}{2}$$

$$x + \frac{-3d}{2} \quad \text{i} \quad x + \frac{2d}{2}$$

$$x - \frac{3d}{2} \quad \text{i} \quad x + \frac{3d}{2}$$

Cijeli niz sada ima sljedeci oblik:

$$x - \frac{3d}{2},\ x - \frac{d}{2},\ x + \frac{d}{2},\ x + \frac{3d}{2}$$

Nadalje primjenimo cinjenicu da je dana vrijednost diferencije (razlike) niza, $d = 2$, slijedi:

$$x - \frac{3\overset{\overset{2}{\downarrow}}{d}}{2},\ x - \frac{\overset{\overset{2}{\downarrow}}{d}}{2},\ x + \frac{\overset{\overset{2}{\downarrow}}{d}}{2},\ x + \frac{3\overset{\overset{2}{\downarrow}}{d}}{2}$$

$$x - \frac{3 \cdot 2}{2},\ x - \frac{2}{2},\ x + \frac{2}{2},\ x + \frac{3 \cdot 2}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$x - \frac{3 \cdot \cancel{2}^1}{{}_1\cancel{2}},\ x - \frac{\cancel{2}^1}{{}_1\cancel{2}},\ x + \frac{\cancel{2}^1}{{}_1\cancel{2}},\ x + \frac{3 \cdot \cancel{2}^1}{{}_1\cancel{2}}$$

$$x - \frac{3}{1},\ x - \frac{1}{1},\ x + \frac{1}{1},\ x + \frac{3}{1}$$

$$x - 3,\ x - 1,\ x + 1,\ x + 3$$

Posljednji podatak dan u zadatku mozemo zapisati pomocu sljedece jednadzbe:

$$(x - 3) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 3) = 19305$$

Zamijenimo poredak zagrada, vrijedi:

$$(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 3) \cdot (x + 3) = 19305$$

Primjetimo da se u danoj jednakosti pojavljuju dvije razlike kvadrata koje cemo srediti prema izrazu $a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a+b)$. Vrijedi:

$$\overbrace{(x-1)\cdot(x+1)}^{\overset{x^2-1^2}{\uparrow}}\cdot\overbrace{(x-3)\cdot(x+3)}^{\overset{x^2-3^2}{\uparrow}} = 19305$$

$$\left(x^2-1^2\right)\cdot\left(x^2-3^2\right) = 19305$$

$$\left(x^2-1\right)\cdot\left(x^2-9\right) = 19305$$

Rijesimo se zagrade na lijevoj strani jednakosti, slijedi:

$$x^2\cdot x^2 + x^2\cdot(-9) + (-1)\cdot x^2 + (-1)\cdot(-9) = 19305$$

Zamijenimo svako pojavljivanje izraza x^2 s g, odnosno uvodimo supstituciju $x^2 = g$, vrijedi:

$$\overset{\overset{g}{\uparrow}}{x^2}\cdot \overset{\overset{g}{\uparrow}}{x^2} + \overset{\overset{g}{\uparrow}}{x^2}\cdot(-9) + (-1)\cdot \overset{\overset{g}{\uparrow}}{x^2} + (-1)\cdot(-9) = 19305$$

$$g\cdot g + g\cdot(-9) + (-1)\cdot g + (-1)\cdot(-9) = 19305$$

$$g^2 - 9g - g + 9 = 19305$$

Prebacimo broj 19305 s desne strane jednakosti na lijevu, slijedi:

$$g^2 - 9g - g + 9 = 19305$$

$$g^2 - 9g - g + 9 - 19305 = 0$$

Zbrojimo istovjetne potencije, slijedi:

$$g^2 - 10g - 19296 = 0$$

Rjesenja dobivene kvadratne jednadzbe trazimo pomoocu izraza:

$$g_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Racunam:

$$g_{1,2} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4\cdot 1\cdot(-19305)}}{2\cdot 1}$$

$$g_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 77184}}{2}$$

$$g_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{77284}}{2}$$

$$g_{1,2} = \frac{10 \pm 278}{2}$$

Odredimo prvo rjesenje, racunamo:

$$g_1 = \frac{10 - 278}{2} = \frac{-268}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$g_1 = \frac{{}^{-134}\cancel{-268}}{\cancel{2}_1} = \frac{-134}{1} = -134$$

Dakle prvo rjesenje jednko je $g_1 = -134$. Odredimo jos i drugo rjesenje, slijedi:

$$g_2 = \frac{10 + 278}{2} = \frac{288}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$g_2 = \frac{{}^{144}\cancel{288}}{\cancel{2}_1} = \frac{144}{1} = 144$$

Drugo rjesenje jednako je $g_2 = 144$. Preostaje jos vratiti supstituciju, odnosno rijesiti sljedece dvije kvadratne jednadzbe:

$$x_1^2 = \overset{\overset{-134}{\downarrow}}{g_1} \quad \text{i} \quad x_2^2 = \overset{\overset{144}{\downarrow}}{g_2}$$

$$x_1^2 = -134 \quad \text{i} \quad x_2^2 = 144$$

Lijeva jednadzba nema realnih rjesenja pa se usredotocujemo na desnu jednadzbu:

$$x_2^2 = 144$$

Korijenujemo cijelu jednakost, slijedi:

$$x_2^2 = 144 \;/\sqrt{}$$

$$x_{2_{1,2}} = \pm 12$$

Dakle govorimo o sljedecim nizovima:

$$\begin{aligned} \text{Prvi niz:} \quad & x = -12,\ d = 2 \\ \text{Drugi niz:} \quad & x = 12,\ d = 2 \end{aligned}$$

Time je zadatak rijesen.

Zadatak 31: (str. 92) Clanovi aritmetickog niza su cijeli brojevi. Dokazi da je umnozak cetiriju uzastopnih clanova niza uvecan za cetvrtu potenciju razlike niza, kvadrat cijelog broja.

Rjesenje: Niz od cetiri broja koja cine cetiri uzastopna clana aritmetickog niza zapisat cemo na poprilicno specifican nacin.

Neka je dan neki realan broj x. Difirencija danog niza oznacimo standardnom oznaom d. Dva susjedna clana aritmetickog niza mozemo pomocu x i d zapisati na sljedeci nacin:

$$x - \frac{d}{2} \quad \text{i} \quad x + \frac{d}{2}$$

Promotrimo li malo dane izraze vidimo da se oni razlikuju tocno za diferenciju d sto je u skladu s definicijom aritmetickog niza. Nadalje oduzmem li d od prvog od ta dva broja te dodam d drugom od ta dva broja dobit cemo jos dva clana aritmetickog niza, odnosno sljedeci izrazi cine cetiri uzastopna clana aritmetickog niza:

$$x - \frac{d}{2} - d,\ x - \frac{d}{2},\ x + \frac{d}{2},\ x + \frac{d}{2} + d$$

Sredimo krajnje clanove niza:

$$x - \frac{d}{2} - d \quad \text{i} \quad x + \frac{d}{2} + d$$

Svedemo na zajednicki nazivnik 2 posljednja dva clana sume kod obaju clanova, slijedi:

$$x + \frac{-d \cdot 1 - d \cdot 2}{2} \quad \text{i} \quad x + \frac{d \cdot 1 + d \cdot 2}{2}$$
$$x + \frac{-d - 2d}{2} \quad \text{i} \quad x + \frac{d + 2d}{2}$$
$$x + \frac{-3d}{2} \quad \text{i} \quad x + \frac{2d}{2}$$
$$x - \frac{3d}{2} \quad \text{i} \quad x + \frac{3d}{2}$$

Cijeli niz sada ima sljedeci oblik:

$$x - \frac{3d}{2},\ x - \frac{d}{2},\ x + \frac{d}{2},\ x + \frac{3d}{2}$$

Nas je zadatak pokazati da je sljedeci izraz kvadrat cijelog broja:

$$\left(x - \frac{3d}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{d}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{d}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{3d}{2}\right) + d^4 = (\star)$$

Poredajmo clanove produkta u prvom clanu sume na malo drugaciji, vrijedi:

$$(\star) = \left(x - \frac{d}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{d}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{3d}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{3d}{2}\right) + d^4 = (\star\star)$$

Primjetimo da se u danoj jednakosti pojavljuju dvije razlike kvadrata koje cemo srediti prema izrazu $a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a+b)$. Vrijedi:

$$(\star\star) = \overbrace{\left(x - \frac{d}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{d}{2}\right)}^{x^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} \cdot \overbrace{\left(x - \frac{3d}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{3d}{2}\right)}^{x^2 - \left(\frac{3d}{2}\right)^2} + d^4 =$$

$$= \left[x^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2\right] \cdot \left[x^2 - \left(\frac{3d}{2}\right)^2\right] + d^4 = (\star\star\star)$$

Druge clanove suma u zagradama raspisujemo prema izrazu za djeljenje potencija istih eksponenata, odnosno prema $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, slijedi:

$$(\star\star\star) = \left[x^2 - \frac{d^2}{2^2}\right] \cdot \left[x^2 - \frac{(3d)^2}{2^2}\right] + d^4 =$$

$$= \left[x^2 - \frac{d^2}{4}\right] \cdot \left[x^2 - \frac{(3d)^2}{4}\right] + d^4 = (\spadesuit)$$

Izraz u brojniku drugog clana sume u drugoj zagradi produkta raspisujemo prema izrazu za umnozak potencija istih eksponenata, odnosno prema $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^2$, slijedi:

$$(\spadesuit) = \left[x^2 - \frac{d^2}{4}\right] \cdot \left[x^2 - \frac{3^2 d^2}{4}\right] + d^4 = \left[x^2 - \frac{d^2}{4}\right] \cdot \left[x^2 - \frac{9d^2}{4}\right] + d^4 = (\spadesuit\spadesuit)$$

Rijesimo se zagrada, slijedi:

$$(\spadesuit\spadesuit) = x^2 \cdot x^2 + x^2 \cdot \left(-\frac{9d^2}{4}\right) + \left(-\frac{d^2}{4}\right) \cdot x^2 + \left(-\frac{d^2}{4}\right) \cdot \left(-\frac{9d^2}{4}\right) + d^4 =$$

$$= x^4 - \frac{9d^2}{4}x^2 - \frac{d^2}{4}x^2 + \frac{9d^4}{16} + d^4 = (\spadesuit\spadesuit\spadesuit)$$

Pozbrojimo istovjetne izraze, slijedi:

$$(\spadesuit\spadesuit\spadesuit) = x^4 - \frac{10d^2}{4}x^2 + \frac{9d^4}{16} + \frac{16d^4}{16} = x^4 - \frac{10d^2}{4}x^2 + \frac{25d^4}{16} = (\clubsuit)$$

Moj krajnji cilj je dobiveni izraz svesti na potpuni kvadrat. U tu svrhu dobiveni izraz zapisimo na malo drugaciji nacin, naime broj 10 u srednjem clanu izraza zapisimo kao $2 \cdot 5$, prvi clan sume zapisimo kao $x^{2\cdot 2}$, dijelove posljednjeg clana sume na sljedeci nacin i to 25 kao 5^2, d^4 kao $d^{2\cdot 2}$ te 16 kao 4^2, slijedi:

$$(\clubsuit) = \overset{x^{2\cdot 2}}{x^4} - \frac{\overset{2\cdot 5}{10}d^2}{4}x^2 + \frac{\overset{5^2}{25}\overset{d^{2\cdot 2}}{d^4}}{\underset{4^2}{16}} = x^{2\cdot 2} - \frac{2 \cdot 5 \cdot d^2}{4}x^2 + \frac{5^2 d^{2\cdot 2}}{4^2} = (\clubsuit\clubsuit)$$

Sredimo drugi clan sume, vrijedi:

$$(\clubsuit\clubsuit) = x^{2\cdot 2} - 2\cdot x^2 \cdot \frac{5d^2}{4} + \frac{5^2 d^{2\cdot 2}}{4^2} = (\clubsuit\clubsuit\clubsuit)$$

Nadalje prvi clan sume i dio posljednjeg clana sume sredjujemo prema izrazu za potenciranje potencija, odnosno prema $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$, slijedi:

$$(\clubsuit\clubsuit\clubsuit) = \overset{\left(x^2\right)^2}{\overset{\nwarrow}{x^{2\cdot 2}}} - 2\cdot x^2 \cdot \frac{5d^2}{4} + \frac{5^2 \overset{\left(d^2\right)^2}{\overset{\uparrow}{d^{2\cdot 2}}}}{4^2} = \left(x^2\right)^2 - 2\cdot x^2 \cdot \frac{d^2}{4} + \frac{5^2\left(d^2\right)^2}{4^2} = (\diamondsuit)$$

Brojnik posljednjeg clana sume sredimo prema izrazu za mnozenje potencija istih eksponenata, odnosno prema $a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n$, slijedi:

$$(\diamondsuit) = \left(x^2\right)^2 - 2\cdot x^2 \cdot \frac{5d^2}{4} + \frac{\left(5d^2\right)^2}{4^2} = (\diamondsuit\diamondsuit)$$

Preostaje nam jos posljednji clan sume srediti prema izrazu za djeljenje potencija istih eksponenata, osnosno prema $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, slijedi:

$$(\diamondsuit\diamondsuit) = \left(x^2\right)^2 - 2\cdot x^2 \cdot \frac{5d^2}{4} + \left(\frac{5d^2}{4}\right)^2 = (\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit)$$

Dakle dosli smo do oblika kojeg mozemo lako prepoznati kao kvadrat binoma, odnosno izraz $(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, sliejedi:

$$(\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit) = \left(x^2 - \frac{5d^2}{4}\right)^2$$

Zaista izraz s pocetka sveli smo na potpuni kvadrat. Jedino pitanje koje se postavlja jest je li broj u zagradi nuzno cijeli. Primjetimo pritom da jedino sto znamo je da su clanovi danog niza cijeli brojevi. Dakle zadatak nam je dobiveni izraz prikazati pomocu izraza koji opisuju clanove niza.

Sredimo malcice dobiveni izraz. Naime broj 5 mozemo zapisati kao $1+4$. Tada vrijedi:

$$\left(x^2 - \frac{\overset{1+4}{\overset{\uparrow}{5}}d^2}{4}\right)^2 = \left(x^2 - \frac{(1+4)\,d^2}{4}\right)^2 = (\circ)$$

Rijesimo se zagrade u brojniku razlomka unutar zagrade, slijedi:

$$(\circ) = \left(x^2 - \frac{d^2 + 4d^2}{4}\right)^2 = \left(x^2 - \left(\frac{d^2}{4} + \frac{4d^2}{4}\right)\right)^2 = (\circ\circ)$$

Pokratimo sto se pokratiti daate te se se rijesimo unutarnje zagrade, slijedi:

$$(\circ\circ) = \left(x^2 - \left(\frac{d^2}{4} + \frac{{}^1\cancel{4}d^2}{\cancel{4}}\right)\right)^2 = \left(x^2 - \left(\frac{d^2}{4} + \frac{d^2}{1}\right)\right)^2 =$$

$$= \left(x^2 - \left(\frac{d^2}{4} + d^2\right)\right)^2 = \left(x^2 - \frac{d^2}{4} - d^2\right)^2 = (\circ\circ\circ)$$

Zapisimo broj 4 kao 2^2, slijedi:

$$(\circ\circ\circ) = \left(x^2 - \frac{d^2}{\underset{\underset{2^2}{\uparrow}}{4}} - d^2\right)^2 = (\text{❦})$$

$$(\text{❦}) = \left(x^2 - \frac{d^2}{2^2} - d^2\right)^2 = (\text{❦❦})$$

Drugi clan sume u zagradi sredimo prema izrazu za djeljenje potencija istih eksponenata, osnosno prema $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$, slijedi:

$$(\text{❦❦}) = \left(x^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 - d^2\right)^2 = (\text{❦❦❦})$$

Prva dva clana sume pod zagradom prepoznajemo kao razliku kavadrata koju cemo raspisati prema izrazu $a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a+b)$. Vrijedi:

$$(\text{❦❦❦}) = \left(x^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 - d^2\right)^2 = \left[\left(x - \frac{d}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{d}{2}\right) - d^2\right]^2 = (\text{❁})$$

Prije svega uocavamo da je prvi dio izraza ispod zagrade zapravo jednak umnosku dva clana danog aritmetickog niza. Preostaje jos diferenciju d prikazati pomocu izraza koji predstavlja neke od clanova niza. U tu svrhu oduzmimo sljedeca dva izraza koji predstavljaju clanove niza:

$$x + \frac{d}{2} - \left(x - \frac{d}{2}\right) = (\text{❖})$$

Rijesimo se zagrade, slijedi:

$$(\text{❖}) = x + \frac{d}{2} - x + \frac{d}{2} = (\text{❖❖})$$

Zbrojimo sto se zbrojiti dade, slijedi:

$$(\text{❖❖}) = \cancel{x} + \frac{d}{2} \cancel{- x} + \frac{d}{2} = \frac{d+d}{2} = \frac{2d}{2} = (\text{❖❖❖})$$

Pokratimo sto se poktratiti dade, slijedi:

$$(\text{❖❖❖}) = \frac{{}^{1}\cancel{2}d}{\cancel{2}_{1}} = \frac{d}{1} = d$$

Zakljucujemo da vrijedi:

$$d = x + \frac{d}{2} - \left(x - \frac{d}{2}\right)$$

Tada potpuni kvadrat poprima sljedeci oblik, slijedi:

$$(❁) = \left[\left(x - \frac{d}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{d}{2}\right) - \underset{\underset{x + \frac{d}{2} - \left(x - \frac{d}{2}\right)}{\uparrow}}{d}{}^2\right]^2 = \left\{\left(x - \frac{d}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{d}{2}\right) - \left[x + \frac{d}{2} - \left(x - \frac{d}{2}\right)\right]^2\right\}^2$$

Dakle potpuni kvadrat prikazali smo pomocu izraza koji predstavljaju clanove niza koji su cijeli brojevi. Kako su cijeli brojeci zatvoreni na operacije zbrajanja, oduzimanja i mnozenja, broj ispod posljednje zagrade je cijeli broj. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 32: (str. 92) Krajnji clanovi aritmetickog niza od 7 clanova jednaki su 11 i 35. Koliko clanova ima niz ciji su krajnji clanovi 38 i 13, ako su cetvrti clanovi ovih nizova jednaki?

Rjesenje: Neka su (a_n) s opcim clanom a_n i (b_n) s opcim clanom b_n aritmeticki nizovi za koje vrijedi:

$$a_1 = 11 \quad \text{i} \quad a_7 = 35$$

$$b_1 = 38 \quad \text{i} \quad b_n = 13$$

$$a_4 = b_4$$

Prvo cemo odrediti kako izgleda aritmeticki niz (a_n). Prisjetimo se da opci clan aritmetickog niza (a_n) odredjujemo prema izrazu:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

pri cemu su a_1 pocetan clan tog niza, a d razlika (diferencija) niza (a_n). Tada sedmi clan niza a_7 poprima sljedeci oblik:

$$a_{\underset{\underset{7}{\uparrow}}{n}} = a_1 + (\underset{\underset{7}{\uparrow}}{n} - 1) \cdot d \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a_7 &= a_1 + (7-1) \cdot d \\ a_7 &= a_1 + 6d \end{aligned}$$

Trebamo rijesiti sljedeci sustav jednadzbi:

$$\begin{cases} a_1 = 11 \\ a_7 = 35 \end{cases}$$

Uvrstimo poznate cinjenice, slijedi:

$$\begin{cases} a_1 = 11 \\ \underset{\substack{\uparrow \\ a_1+6d}}{a_7} = 35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 11 \\ a_1 + 6d = 35 \end{cases}$$

Primjenimo cinjenicu da je prvi clan aritmetickog niza (a_n) jednak 11 u drugu jednadzbu, slijedi:

$$\overset{\substack{11 \\ \downarrow}}{a_1} + 6d = 35 \quad \Rightarrow \quad 11 + 6d = 35$$

Prebacimo broj 11 s lijeve na desnu stranu jednakosti, slijedi:

$$11 + 6d = 35$$

$$6d = -11 + 35$$

$$6d = 24$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{6}$, slijedi:

$$6d = 24 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{6}$$

$$6d \cdot \frac{1}{6} = 24 \cdot \frac{1}{6}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{6}d}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{6}_1} = \frac{{}^{4}\cancel{24}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{6}_1}$$

$$\frac{d}{1} = \frac{4}{1}$$

$$d = 4$$

Dakle razlika (diferencija) aritmetickog niza (a_n) jednaka je 4. Nadalje odredimo cemu je jednak cetvrti clan aritmetickog niza (a_n). Racunamo:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ 4}}{a_n} = a_1 + (\underset{\substack{\uparrow \\ 4}}{n} - 1) \cdot d \quad \Rightarrow \quad a_4 = a_1 + (4-1) \cdot d$$

$$a_4 = a_1 + 3d$$

Uvrstimo poznate vrijednosti, slijedi:

$$a_4 = \overset{11}{a_1} + 3\overset{4}{d} \quad \Rightarrow \quad a_4 = 11 + 3 \cdot 4$$

$$a_4 = 11 + 12$$

$$a_4 = 33$$

Dakle kako su cetvrti clanovi obaju aritmetickih nizova jednaki jasno je da mora vrijediti $b_4 = 33$. Odrediti kako izgleda aritmeticki niz (b_n). Prisjetimo se da opci clan aritmetickog niza (b_n) odredjujemo prema izrazu:

$$b_n = b_1 + (n-1) \cdot d$$

pri cemu su b_1 pocetan clan tog niza, a d razlika (diferencija) niza (b_n). Tada sedmi clan niza b_4 poprima sljedeci oblik:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ 4}}{b_n} = b_1 + (\underset{\substack{\uparrow \\ 4}}{n} - 1) \cdot d \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} b_4 &= b_1 + (4-1) \cdot d \\ b_4 &= b_1 + 3d \end{aligned}$$

Trebamo rijesiti sljedeci sustav jednadzbi:

$$\begin{cases} b_1 = 11 \\ b_4 = 33 \end{cases}$$

Uvrstimo poznate cinjenice, slijedi:

$$\begin{cases} b_1 = 11 \\ \underset{\substack{\uparrow \\ b_1 + 3d}}{b_4} = 33 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 = 38 \\ b_1 + 3d = 33 \end{cases}$$

Primjenimo cinjenicu da je prvi clan aritmetickog niza (a_n) jednak 38 u drugu jednadzbu, slijedi:

$$\overset{\substack{38 \\ \downarrow}}{b_1} + 6d = 33 \quad \Rightarrow \quad 38 + 3d = 33$$

Prebacimo broj 11 s lijeve na desnu stranu jednakosti, slijedi:

$$38 + 3d = 33$$

$$3d = -38 + 33$$

$$3d = -5$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{3}$, slijedi:

$$3d = -5 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{3}$$

$$3d \cdot \frac{1}{3} = -5 \cdot \frac{1}{3}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{3}d}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{3}_1} = \frac{-5}{1} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\frac{d}{1} = -\frac{5}{3}$$

$$d = -\frac{5}{3}$$

Dakle razlika (diferencija) aritmetickog niza (b_n) jednaka je $-\frac{5}{3}$. Preostaje jos samo odrediti koliko clanova ima aritmeticki niz (b_n). To cemo uciniti iz cinjenice da je n-ti clan tog niza jednak 13. Uvrstimo poznate cinjenice u izraz za opci clan aritmetickog niza (b_n), slijedi:

$$\overset{13}{b_n} = \overset{38}{b_1} + (n-1) \cdot \overset{-\frac{5}{3}}{d} \quad \Rightarrow \quad 13 = 38 + (n-1) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)$$

$$13 = 38 + (n-1) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)$$

Prebacimo broj 38 s desne strane jednakosti na lijevu, slijedi:

$$13 = 38 + (n-1) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)$$

$$13 - 38 = (n-1) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)$$

$$-25 = (n-1) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $-\frac{3}{5}$, slijedi:

$$-25 = (n-1) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) \quad / \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$-25 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = (n-1) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{-5}\cancel{-25}}{1} \cdot \left(-\frac{3}{\cancel{5}_1}\right) = (n-1) \cdot \left(-\frac{{}^1\cancel{5}}{{}_1\cancel{3}}\right) \cdot \left(-\frac{\cancel{3}^1}{\cancel{5}_1}\right)$$

$$\frac{-5}{1} \cdot \left(-\frac{3}{1}\right) = (n-1) \cdot \left(-\frac{1}{1}\right) \cdot \left(-\frac{1}{1}\right)$$

$$\frac{15}{1} = (n-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$$

$$15 = (n-1) \cdot 1$$

$$15 = n - 1$$

Prebacimo broj -1 s desne na lijevu stranu jednakosti, slijedi:

$$15 = n - 1$$

$$15 + 1 = n$$

$$16 = n$$

Dakle aritmeticki niz (b_n) ima 16 clanova. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 38: (str. 92) U aritmetickom nizu je 12 clanova. Zbroj onih na parnim mjestima je 186, a onih na neparnim mjestima 156. Kolika je razlika niza?

Rjesenje: Neka je (a_n) s opcim clanom a_n aritmeticki niz opisan u zadatku. Taj niz mozemo podijeliti na nova dva aritmeticka niza, (b_k) koji ce sadrzavati samo clanove na neparnim mjestima i (c_k) koji ce sadrzavati samo clanove na parnim mjestima.

aritmeticki niz (b_k)

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8,\ a_9,\ a_{10},\ a_{11},\ a_{12}$$

aritmeticki niz (c_k)

Prije svega uocimo da oba niza imaju tocno 6 clanova. Nadalje ako je razlika niza (a_n) jednaka d tada razlike obaju novih nizova moraju biti duplo vece, odnosno $2d$, jer uzimamo svaki drugi clan, dakle svaki put se pomaknemo za dvije diferencije od prethodnog clana.

Ako je b_1 pocetan clan aritmetickog niza (b_k), a $d_{(b_k)}$ njegova diferencija, tada opci clan b_k ima oblik:

$$b_k = b_1 + (k-1) \cdot d_{(b_k)}$$

No kako je pocetan clan tog aritmetickog niza zapravo pocetan clan aritmetickog niza (a_n), a diferencija jednaka $2d$, tada opci clan aritmetickog niza (b_k) poprima sljedeci oblik:

$$b_k = \overset{a_1}{b_1} + (k-1) \cdot \overset{2d}{d_{(b_k)}} \quad \Rightarrow \quad b_k = a_1 + (k-1) \cdot 2d$$

Prisjetimo se da sumu prvih k clanova aritmetickog niza (b_k) racunamo prema izrazu:

$${}^{(b_k)}S_k = \frac{k}{2} \cdot (b_1 + b_k)$$

Primjenimo poznate cinjenice pa izraz poprima sljedeci oblik:

$$^{(b_k)}S_k = \frac{k}{2} \cdot (\overset{\overset{a_1}{\swarrow}}{b_1} + \underset{\underset{a_1 + (k-1)\cdot 2d}{\uparrow}}{b_k}) \quad \Rightarrow \quad ^{(b_k)}S_k = \frac{k}{2} \cdot [a_1 + a_1 + (k-1) \cdot 2d]$$

Pozbrojimo istovjetne izraze, slijedi:

$$^{(b_k)}S_k = \frac{k}{2}\,[2a_1 + (k-1) \cdot 2d]$$

Izlucimo dva iz oba clana sume unutar zagrade, slijedi:

$$^{(b_k)}S_k = \frac{k}{2} \cdot 2 \cdot [a_1 + (k-1) \cdot d]$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$^{(b_k)}S_k = \frac{k}{{}_1\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}^1}{1} \cdot [a_1 + (k-1) \cdot d]$$

$$^{(b_k)}S_k = \frac{k}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot [a_1 + (k-1) \cdot d]$$

$$^{(b_k)}S_k = k \cdot [a_1 + (k-1) \cdot d]$$

U zadatku je zadana suma tog niza koji ima 6 clanova pa jednakost poprima sljedeci oblik:

$$^{(b_k)}\underset{\underset{6}{\uparrow}}{S_k} = \overset{\overset{6}{\downarrow}}{k} \cdot [a_1 + (\overset{\overset{6}{\downarrow}}{k} - 1) \cdot d] \quad \Rightarrow \quad ^{(b_k)}S_6 = 6 \cdot [a_1 + (6-1) \cdot d]$$

$$^{(b_k)}S_6 = 6 \cdot (a_1 + 5d)$$

Kako je suma svih clanova niza (b_k), odnosno $^{(b_k)}S_6$ jednaka 156, jednakost poprima sljedeci oblik:

$$\overset{\overset{156}{\downarrow}}{^{(b_k)}S_6} = 6 \cdot (a_1 + 5d) \quad \Rightarrow \quad 156 = 6 \cdot (a_1 + 5d)$$

Pomnozimo dobivenu jednakost s $\frac{1}{6}$, slijedi:

$$156 = 6 \cdot (a_1 + 5d) \quad \Big/ \cdot \frac{1}{6}$$

$$156 \cdot \frac{1}{6} = 6 \cdot (a_1 + 5d) \cdot \frac{1}{6}$$

Pokratimo sto se poktatiti dade, slijedi:

$$\frac{^{26}\cancel{156}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{6}_1} = \frac{^1\cancel{6} \cdot (a_1 + 5d)}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{6}_1}$$

$$\frac{26}{1} = \frac{(a_1 + 5d)}{1}$$
$$26 = a_1 + 5d$$

Isti postupak uz malo vise paznje na ponekim dijelovima ponovit cemo i za drugi aritmeticki niz.

Ako je c_1 pocetan clan aritmetickog niza (c_k), a $d_{(c_k)}$ njegova diferencija, tada opci clan c_k ima oblik:

$$c_k = c_1 + (k-1) \cdot d_{(c_k)}$$

No kako je pocetan clan tog aritmetickog niza zapravo drugi clan aritmetickog niza (a_n), a diferencija jednaka $2d$, tada opci clan aritmetickog niza (c_k) poprima sljedeci oblik:

$$c_k = \overset{\overset{a_2}{\searrow}}{c_1} + (k-1) \cdot \overset{\overset{2d}{\swarrow}}{d_{(c_k)}} \quad \Rightarrow \quad c_k = a_2 + (k-1) \cdot 2d$$

Opci clan pocetnog aritmetickog niza (a_n) kojem je prvi clan a_1, a diferencija jednaka d ima oblik:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Tada je drugi clan a_2 tog aritmetickog niza jednak:

$$\underset{\underset{2}{\uparrow}}{a_n} = a_1 + (\overset{\overset{2}{\downarrow}}{n} - 1) \cdot d \quad \Rightarrow \quad a_2 = a_1 + (2-1) \cdot d$$

$$a_2 = a_1 + d$$

Dakle sada vijedi $c_1 = a_2 = a_1 + d$, dok opci clan c_k aritmetickog niza (c_k) poprima sljedeci oblik:

$$c_k = \overset{\overset{a_1 + d}{\downarrow}}{a_2} + (k-1) \cdot 2d \quad \Rightarrow \quad c_k = a_1 + d + (k-1) \cdot 2d$$

Rijesimo se zagrade, slijedi:

$$c_k = a_1 + d + k \cdot 2d - 2d$$

Zbrojimo istovjetne potencije, slijedi:

$$c_k = a_1 - d + k \cdot 2d$$

Prisjetimo se da sumu prvih k clanova aritmetickog niza (c_k) racunamo prema izrazu:

$${}^{(c_k)}S_k = \frac{k}{2} \cdot (c_1 + c_k)$$

Primjenimo poznate cinjenice pa izraz poprima sljedeci oblik:

$$
{}^{(c_k)}S_k = \frac{k}{2}\cdot(\overset{\overset{a_1+d}{\swarrow}}{c_1} + \underset{\underset{a_1-d+k\cdot 2d}{\uparrow}}{c_k}) \quad\Rightarrow\quad {}^{(c_k)}S_k = \frac{k}{2}\cdot[a_1+d+a_1-d+k\cdot 2d]
$$

Pozbrojimo istovjetne izraze, slijedi:

$$
{}^{(c_k)}S_k = \frac{k}{2}\,[2a_1 + k\cdot 2d]
$$

Izlucimo dva iz oba clana sume unutar zagrade, slijedi:

$$
{}^{(c_k)}S_k = \frac{k}{2}\cdot 2\cdot[a_1 + k\cdot d]
$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$
{}^{(c_k)}S_k = \frac{k}{{}_1\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}^1}{1}\cdot[a_1 + k\cdot d]
$$

$$
{}^{(c_k)}S_k = \frac{k}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot[a_1 + k\cdot d]
$$

$$
{}^{(c_k)}S_k = k\cdot[a_1 + k\cdot d]
$$

U zadatku je zadana suma tog niza koji ima 6 clanova pa jednakost poprima sljedeci oblik:

$$
{}^{(c_k)}S_{\underset{\underset{6}{\uparrow}}{k}} = \overset{\overset{6}{\downarrow}}{k}\cdot[a_1 + \overset{\overset{6}{\downarrow}}{k}\cdot d] \quad\Rightarrow\quad {}^{(c_k)}S_6 = 6\cdot[a_1 + 6\cdot d]
$$

$$
{}^{(c_k)}S_6 = 6\cdot(a_1 + 6d)
$$

Kako je suma svih clanova niza (c_k), odnosno ${}^{(c_k)}S_6$ jednaka 186, jednakost poprima sljedeci oblik:

$$
\overset{\overset{186}{\downarrow}}{{}^{(c_k)}S_6} = 6\cdot(a_1 + 6d) \quad\Rightarrow\quad 186 = 6\cdot(a_1 + 6d)
$$

Pomnozimo dobivenu jednakost s $\frac{1}{6}$, slijedi:

$$
186 = 6\cdot(a_1 + 6d) \ \Big/ \cdot\frac{1}{6}
$$

$$
186\cdot\frac{1}{6} = 6\cdot(a_1 + 6d)\cdot\frac{1}{6}
$$

Pokratimo sto se poktatiti dade, slijedi:

$$
\frac{{}^{31}\cancel{186}}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{6}_1} = \frac{{}^{1}\cancel{6}\cdot(a_1 + 6d)}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{6}_1}
$$

$$\frac{31}{1} = \frac{(a_1 + 6d)}{1}$$
$$31 = a_1 + 6d$$

Time smo dobili sljedeci sutav jednadzbi:

$$\begin{cases} 25 = a_1 + 5d \\ 31 = a_1 + 6d \end{cases}$$

Oduzmemo prvu jednadzbu od druge, slijedi:

$$\begin{cases} 25 = a_1 + 5d \\ 31 = a_1 + 6d \end{cases} \Bigg/ -$$

$$25 - 31 = a_1 + 5d - (a_1 + 6d)$$

Rijesimo se zagrade, slijedi:

$$25 - 31 = a_1 + 5d - a_1 - 6d$$

Pozbrojimo istovjetne potencije, slijedi:

$$-6 = -d$$

Pomnozimo cijelu jednakost s -1, slijedi:

$$-6 = -d \;/ \cdot (-1)$$

$$-6 \cdot (-1) = -d \cdot (-1)$$
$$6 = d$$

Time smo odredili diferenciju pocetnog aritmetickog niza (a_n) pa je zadatak rijesen.

Zadatak 41: (str. 92) Koliko clanova ima aritmeticki niz ako je $a_2 + a_4 + ... + a_{2n} = 126$, $a_2 + a_{2n} = 42$?

Rjesenje: Opci clan a_n aritmetickog niza (a_n) s prvim clanom a_1 i diferencijom d ima oblik:
$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$
Drugi clan aritmetickog niza (a_n) tada ima oblik:

$$\underset{\underset{2}{\uparrow}}{a_n} = a_1 + (\overset{\overset{2}{\downarrow}}{n} - 1) \cdot d \quad \Rightarrow \quad a_2 = a_1 + (2-1) \cdot d$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ 4}}{a_n} = a_1 + (\overset{\substack{4 \\ \downarrow}}{n} - 1) \cdot d \quad \Rightarrow \quad a_4 = a_1 + (4 - 1) \cdot d$$

I tako bi racunali do clana a_{2n}. Razlike u zagradi ne odedjujemo iz razloga jer cemo tako lakse srediti jednakosti dane u zadatku. Prvo cemo se pozabaviti prvom jednakoscu:

$$a_2 + a_4 + ... + a_{2n} = 126$$

Uocimo da suma na lijevoj strani jednakosti sadrzi n clanova. Taj podatak trebat ce nam kasnije. Imajuci na umu izvedene jednakosti prva jednakost poprima sljedeci oblik:

$$\overset{\substack{a_1 + (2-1) \cdot d \\ \searrow}}{a_2} + \underset{\substack{\uparrow \\ a_1 + (4-1) \cdot d}}{a_4} + ... + \overset{\substack{a_1 + (2n-1) \cdot d \\ \swarrow}}{a_{2n}} = 126$$

$$a_1 + (2 - 1) \cdot d + a_1 + (4 - 1) \cdot d + ... + a_1 + (2n - 1) \cdot d = 126$$

Poredamo clanove sume tako da clanove sume oblika a_1 preselimo na pocetak sume, relativan poredak ostalih clanova ne mijenjam, slijedi:

$$a_1 + a_1 + ... + a_1 + (2 - 1) \cdot d + (4 - 1) \cdot d + ... + (2n - 1) \cdot d = 126$$

Dakle kako je lijeva strana jednakosti sadrzavala n clanova aritmetickog niza (a_n) to znaci da sada sadrzi n izraza oblika a_1 koje zbrojimo, slijedi:

$$n \cdot a_1 + (2 - 1) \cdot d + a_1 + (4 - 1) \cdot d + ... + a_1 + (2n - 1) \cdot d = 126$$

Izlucimo d iz svakog clana sume poslije prvog, slijedi:

$$n \cdot a_1 + (2 - 1 + 4 - 1 + ... + 2n - 1) \cdot d = 126$$

Poredamo brojeve u zagradi na lijevoj strani sume tako da se prvo pojavljuju parni brojevi, a nakon toga sve -1, slijedi:

$$n \cdot a_1 + (2 + 4 + ... + 2n - 1 - 1 - ... - 1) \cdot d = 126$$

Dakle parnih brojeva je sveukupno n kao i brojeva -1.

$$n \cdot a_1 + (2 + 4 + ... + 2n \underbrace{- 1 - 1 - ... - 1}_{\substack{\downarrow \\ n \text{ puta}}}) \cdot d = 126$$

Izlucimo broj 2 iz svih parnih brojeva, te zbrojimo sve -1, kako ih ima n rezultat je $-n$. Sada jednakost poprima sljedeci oblik:

$$n \cdot a_1 + [2 \cdot (1+2+...+n) \underbrace{-1-1-...-1}_{-n}] \cdot d = 126$$

$$n \cdot a_1 + [2 \cdot (1+2+...+n) - n] \cdot d = 126$$

Prisjetimo se da se suma prvih n prirodnih brojeva racuna prema izrazu:

$$1+2+3+..+n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Sada jednakost poprima sljedeci oblik:

$$n \cdot a_1 + [2 \cdot \overbrace{(1+2+...+n)}^{\frac{n \cdot (n+1)}{2}} - n] \cdot d = 126$$

$$n \cdot a_1 + \left[2 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} - n\right] \cdot d = 126$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$n \cdot a_1 + \left[\frac{{}^{1}\cancel{2}}{1} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{\cancel{2}_1} - n\right] \cdot d = 126$$

$$n \cdot a_1 + \left[\frac{n \cdot (n+1)}{1} - n\right] \cdot d = 126$$

$$n \cdot a_1 + [n \cdot (n+1) - n] \cdot d = 126$$

Rijesimo se unutarnje zagrade, slijedi:

$$n \cdot a_1 + (n \cdot n + n \cdot 1 - n) \cdot d = 126$$

$$n \cdot a_1 + \left(n^2 + n - n\right) \cdot d = 126$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$n \cdot a_1 + \left(n^2 + \cancel{n - n}\right) \cdot d = 126$$

$$n \cdot a_1 + n^2 \cdot d = 126$$

Izlucimo n iz oba clana sume na lijevoj strani jednakosti, slijedi:

$$n \cdot (a_1 + n \cdot d) = 126$$

Nadalje pozabavimo se drugom jednakoscu:

$$a_2 + a_{2n} = 42$$

Imajuci na umu jednakosti izvedene na samom pocetku druga jednakost poprima sljedeci oblik:

$$\overset{a_1 + (2-1) \cdot d}{a_2} + \overset{a_1 + (2n-1) \cdot d}{a_{2n}} = 42$$

$$a_1 + (2-1) \cdot d + a_1 + (2n-1) \cdot d = 42$$
$$a_1 + d + a_1 + (2n-1) \cdot d = 42$$

Rijesimo se zagrade, slijedi:

$$a_1 + d + a_1 + 2n \cdot d - 1 \cdot d = 42$$
$$a_1 + d + a_1 + 2n \cdot d - d = 42$$

Zbrojimo istovjetne potencije, slijedi:

$$a_1 + \cancel{d} + a_1 + 2n \cdot d \cancel{- d} = 42$$
$$2a_1 + 2n \cdot d = 42$$

Izlucimo 2 iz oba clana sume na lijevoj strani jednakosti, slijedi:

$$2 \cdot (a_1 + n \cdot d) = 42$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{2}$, slijedi:

$$2 \cdot (a_1 + n \cdot d) = 42 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{2}$$
$$2 \cdot (a_1 + n \cdot d) \cdot \frac{1}{2} = 42 \cdot \frac{1}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{2} \cdot (a_1 + n \cdot d)}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1} = \frac{{}^{21}\cancel{42}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1}$$
$$\frac{a_1 + n \cdot d}{1} = \frac{21}{1}$$
$$a_1 + n \cdot d = 21$$

Naposlijetku trebamo rijesiti sljedeci sustav jednadzbi:

$$\begin{cases} n \cdot (a_1 + n \cdot d) = 126 \\ a_1 + n \cdot d = 21 \end{cases}$$

Uocimo da je dio prve jednadzbe opisan drugom, slijedi:

$$n \cdot \overbrace{(a_1 + n \cdot d)}^{21} = 126$$
$$21n = 126$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{21}$, slijedi:

$$21n = 126 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{21}$$

$$21n \cdot \frac{1}{21} = 126 \cdot \frac{1}{21}$$

Pokratimo sto se pokratit dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{21}n}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{21}_1} = \frac{{}^{6}\cancel{126}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{21}_1}$$

$$\frac{n}{1} = \frac{6}{1}$$

$$n = 6$$

Dakle dani niz ima 12 clanova, time je zadatak rijesen.

Zadatak 43: (str. 92) U aritmetickom je nizu $a_{m+n} = A$ i $a_{m-n} = B$. Odredi a_m i a_n.

Rjesenje: Opci clan a_k aritmetickog niza (a_k) s prvim clanom a_1 i diferencijom d ima oblik:

$$a_k = a_1 + (k-1) \cdot d$$

Sada $(m+n)$-ti clan i $(m-n)$-ti clan aritmetickog niza (a_n) imaju oblik:

$$\underset{\underset{m+n}{\uparrow}}{a_n} = a_1 + (\overset{\overset{m+n}{\downarrow}}{n} - 1) \cdot d \quad \Rightarrow \quad a_{m+n} = a_1 + (m+n-1) \cdot d$$

$$\underset{\underset{m-n}{\uparrow}}{a_n} = a_1 + (\overset{\overset{m-n}{\downarrow}}{n} - 1) \cdot d \quad \Rightarrow \quad a_{m-n} = a_1 + (m-n-1) \cdot d$$

Dobivene jednakosti cine sljedeci sustav jednadzbi, slijedi:

$$\begin{cases} a_{m+n} = a_1 + (m+n-1) \cdot d \\ a_{m-n} = a_1 + (m-n-1) \cdot d \end{cases}$$

Uvrstimo vrijednosti $(m+n)$-tog i $(m-n)$-tog clana aritmetickog niza (a_n) u dobiveni sustrav jednadzbi, slijedi:

$$\begin{cases} \overset{\overset{A}{\uparrow}}{a_{m+n}} = a_1 + (m+n-1) \cdot d \\ \underset{\underset{B}{\downarrow}}{a_{m-n}} = a_1 + (m-n-1) \cdot d \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = a_1 + (m+n-1) \cdot d \\ B = a_1 + (m-n-1) \cdot d \end{cases}$$

Zbrojimo jednakosti iz sustava, slijedi:

$$A + B = a_1 + (m+n-1) \cdot d + a_1 + (m-n-1) \cdot d$$

Promijenimo poredak sumanada na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$A + B = a_1 + a_1 + (m+n-1) \cdot d + (m-n-1) \cdot d$$

Izlucimo d iz druga dva clana sume s desne stranje jednakosti, slijedi:

$$A + B = a_1 + a_1 + (m+n-1+m-n-1) \cdot d$$

Zbrojimo istovjetne potencije, slijedi:

$$A + B = a_1 + a_1 + (m \cancel{+n} - 1 + m \cancel{-n} - 1) \cdot d$$

$$A + B = 2 \cdot a_1 + (2m - 2) \cdot d$$

Izlucimo broj 2 iz oba clana sume u zagradi na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$A + B = 2 \cdot a_1 + 2 \cdot (m-1) \cdot d$$

Izlucimo broj 2 iz oba clana sume na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$A + B = 2 \cdot [a_1 + (m-1) \cdot d]$$

Prepoznamo da se u zagradi zapravo nalazi izraz za m-ti clan aritmetickog niza (a_k), slijedi:

$$A + B = 2 \cdot \overbrace{[a_1 + (m-1) \cdot d]}^{a_m}$$

$$A + B = 2 \cdot a_m$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{2}$, slijedi:

$$A + B = 2 \cdot a_m \quad \Big/ \cdot \frac{1}{2}$$

$$(A + B) \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot a_m \cdot \frac{1}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{A+B}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{{}^{1}\cancel{2} \cdot a_m}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1}$$

$$\frac{A+B}{2} = \frac{a_m}{1}$$

$$\frac{A+B}{2} = a_m$$

Dakle m-ti clan clan aritmetickog niza (a_k) ima oblik $a_m = \dfrac{A+B}{2}$. Potrebno je jos odrediti n-ti clan aritmetickog niza (a_k). U tu svrhu obratimo ponovno pozornost na sustav jednadzbi:

$$\begin{cases} A = a_1 + (m+n-1) \cdot d \\ B = a_1 + (m-n-1) \cdot d \end{cases}$$

Oduzmimo jednakosti iz sustava, slijedi:

$$A - B = a_1 + (m+n-1) \cdot d - [a_1 + (m-n-1) \cdot d]$$

Rijesimo se uglate zagrade na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$A - B = a_1 + (m+n-1) \cdot d - a_1 - (m-n-1) \cdot d$$

Pokratimo sto se poktatiti dade, slijedi:

$$A - B = \cancel{a_1} + (m+n-1) \cdot d \cancel{- a_1} - (m-n-1) \cdot d$$

$$A - B = (m+n-1) \cdot d - (m-n-1) \cdot d$$

Izlucimo d iz oba clana jednakosti na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$A - B = [m+n-1-(m-n-1)] \cdot d$$

Rijesimo se unutarnje zagrade na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$A - B = (m+n-1-m+n+1) \cdot d$$

Pozbrojimo istovjetne potencije, slijedi:

$$A - B = (\cancel{m} + n \cancel{-1} \cancel{-m} + n + \cancel{1}) \cdot d$$

$$A - B = 2n \cdot d$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\dfrac{1}{2n}$, slijedi:

$$A - B = 2n \cdot d \Big/ \cdot \frac{1}{2n}$$

$$(A-B) \cdot \frac{1}{2n} = 2n \cdot d \cdot \frac{1}{2n}$$

Pokratimo sto se poktratiti dade, slijedi:

$$\frac{A-B}{1} \cdot \frac{1}{2n} = \frac{{}^{1}\cancel{2n} \cdot d}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2n}_1}$$

$$\frac{A-B}{2n}=\frac{d}{1}$$
$$\frac{A-B}{2n}=d$$

Naposlijetku se opet vracamo na sustav jednadzbi:

$$\begin{cases} A=a_1+(m+n-1)\cdot d \\ B=a_1+(m-n-1)\cdot d \end{cases}$$

Preostaje jos odrediti n-ti clan clan aritmetickog niza (a_k), a odredit cemo preko prve jednakosti:

$$A=a_1+(m+n-1)\cdot d$$

Clanove sume u zagradi ne desnoj strani jednakosti zapisimo drugim redoslijedom te ih grupirano na specifican nacin, slijedi:

$$A=a_1+[(n-1)+m]\cdot d$$

Rijesimo se zagrade na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$A=a_1+(n-1)\cdot d+m\cdot d$$

Prepoznamo da prva dva clana suma na desnoj strani jednakosti predstavljaju n-ti clan aritmetickog niza (a_k), slijedi:

$$A=\overbrace{a_1+(n-1)\cdot d}^{a_n}+m\cdot d$$
$$A=a_n+m\cdot d$$

Nadalje primjenimo posljednju cinjenicu koju smo izveli, slijedi:

$$A=a_n+m\cdot \overset{\frac{A-B}{2n}}{\overset{\downarrow}{d}}$$
$$A=a_n+m\cdot\frac{A-B}{2n}$$

Prebacimo drugi clan sume na desnoj strani jednakosti na lijevu, slijedi:

$$A-m\cdot\frac{A-B}{2n}=a_n$$

Svedemo izraze na lijevoj strani jednakosti na zajednicki nazivnik $2n$, slijedi:

$$\frac{A\cdot 2n-m\cdot(A-B)}{2n}=a_n$$

Rijesimo se zagrade u brojniku razlomka na lijevoj strani jednakosti, slijedi:

$$\frac{A\cdot 2n-m\cdot A+m\cdot B}{2n}=a_n$$

Izlucimo A iz prva dva clana sume u brojniku razlomka na lijevoj strani jednakosti, slijedi:

$$\frac{(2n-m)\cdot A + m\cdot B}{2n} = a_n$$

Dakle odredili smo i n-ti clan aritmetickog niza (a_k) ciji je oblik $a_n = \dfrac{(2n-m)\cdot A + m\cdot B}{2n}$. Time je zadatak rijesen.

∽ ✧ ∾

Zadatak 44: (str. 92) Dokazi da je svaki clan aritmetickog niza, pocevsi od drugog, aritmeticka sredina dvaju clanova koji su od njega jednako udaljeni.

Rjesenje: Dakle ono sto moramo pokazati jest da vrijedi sljedeca jednakost:

$$a_m = \frac{a_{m-k} + a_{m+k}}{2}, \quad \text{za } m-k > 0$$

Drugim rijecima da je aritmeticka sredina dvaju clanova koji su udaljeni za k od m-tog clana aritmetickog niza (a_m) jednaka upravo tom clanu.

Opci clan a_n aritmetickog niza (a_n) s prvim clanom a_1 i diferencijom d ima oblik:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$

Sada $(m-k)$-ti clan i $(m+k)$-ti clan aritmetickog niza (a_n) imaju oblik:

$$\underset{\underset{m-k}{\uparrow}}{a_n} = a_1 + (\overset{\overset{m-k}{\downarrow}}{n} - 1)\cdot d \quad \Rightarrow \quad a_{m-k} = a_1 + (m-k-1)\cdot d$$

$$\underset{\underset{m+k}{\uparrow}}{a_n} = a_1 + (\overset{\overset{m+k}{\downarrow}}{n} - 1)\cdot d \quad \Rightarrow \quad a_{m+k} = a_1 + (m+k-1)\cdot d$$

$$\underset{\underset{m}{\uparrow}}{a_n} = a_1 + (\overset{\overset{m}{\downarrow}}{n} - 1)\cdot d \quad \Rightarrow \quad a_m = a_1 + (m-1)\cdot d$$

Jednakost koju moramo pokazati sada poprima sljedeci oblik, slijedi:

$$a_m = \frac{\overset{a_1+(m-k-1)\cdot d}{a_{m-k}} + \overset{a_1+(m+k-1)\cdot d}{a_{m+k}}}{2}$$

$$a_m = \frac{a_1 + (m-k-1)\cdot d + a_1 + (m+k-1)\cdot d}{2}$$

Nadalje zamijenimo poredak drugog i treceg clana sume u brojniku razlomka na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$a_m = \frac{a_1 + a_1 + (m - k - 1) \cdot d + (m + k - 1) \cdot d}{2}$$

Izlucimo d iz druga dva clana sume u brojniku razlomka na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$a_m = \frac{a_1 + a_1 + (m - k - 1 + m + k - 1) \cdot d}{2}$$

Zbrojimo istovjetne potenicije, slijedi:

$$a_m = \frac{a_1 + a_1 + \left(m \cancel{- k} - 1 + m + \cancel{k} - 1\right) \cdot d}{2}$$

$$a_m = \frac{2 \cdot a_1 + (2m - 2) \cdot d}{2}$$

Izlucimo broj 2 iz oba clana sume u zagradi u brojniku razlomka na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$a_m = \frac{2 \cdot a_1 + 2 \cdot (m - 1) \cdot d}{2}$$

Izlucimo broj 2 iz oba clana sume u brojniku razlomka na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$a_m = \frac{2 \cdot [a_1 + (m - 1) \cdot d]}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$a_m = \frac{{}^{1}\cancel{2} \cdot [a_1 + (m - 1) \cdot d]}{\cancel{2}_1}$$

$$a_m = \frac{a_1 + (m - 1) \cdot d}{1}$$

$$a_m = a_1 + (m - 1) \cdot d$$

Ono sto smo dobili na desnoj strani jednakosti jest upravo ono sto smo odredili pri pocetku rjesavanja zadatka. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 45: (str. 92) Dokazi da je u svakom aritmetickom nizu $a_m + a_n = a_p + a_q$ ako i samo ako je $m + n = p + q$.

Rjesenje: Prije svega uocimo da trebamo pokazati sljedece dvije tvrdnje:

I. tvrdnja:	Ako vrijedi $a_m + a_n = a_p + a_q$ onda mora vrijediti $m + n = p + q$
II. tvrdnja:	Ako vrijedi $m + n = p + q$ onda mora vrijediti $a_m + a_n = a_p + a_q$

Kod pokazivanja obje tvrdnje koristit cemo izraz za opci clan a_n aritmetickog niza (a_n) s prvim clanom a_1 i diferencijom d:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

Sada clanovi aritmetickog niza (a_n) iz tvrdnji imaju sljedeci oblik:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ m}}{a_n} = a_1 + (\overset{\substack{m \\ \downarrow}}{n} - 1) \cdot d \quad \Rightarrow \quad a_m = a_1 + (m - 1) \cdot d$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ p}}{a_n} = a_1 + (\overset{\substack{p \\ \downarrow}}{n} - 1) \cdot d \quad \Rightarrow \quad a_p = a_1 + (p - 1) \cdot d$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ q}}{a_n} = a_1 + (\overset{\substack{q \\ \downarrow}}{n} - 1) \cdot d \quad \Rightarrow \quad a_q = a_1 + (q - 1) \cdot d$$

Prvo pokazujemo I. tvrdnju.

Pretpostavimo da vrijedi $a_m + a_n = a_p + a_q$. Pokusajmo pokazati da tada vrijedi $m + n = p + q$. Sredimo danu jednakost prema jednakostima koje smo izveli pri samom pocetku, slijedi:

$$\overset{a_1 + (m-1) \cdot d}{a_m} + \underset{a_1 + (n-1) \cdot d}{a_n} = \overset{a_1 + (p-1) \cdot d}{a_p} + \underset{a_1 + (q-1) \cdot d}{a_q} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} & a_1 + (m - 1) \cdot d + a_1 + (n - 1) \cdot d = \\ & = a_1 + (p - 1) \cdot d + a_1 + (q - 1) \cdot d \end{aligned}$$

Rijesimo se zagrada na obje strane jednakosti, slijedi:

$$a_1 + m \cdot d - 1 \cdot d + a_1 + n \cdot d - 1 \cdot d = a_1 + p \cdot d - 1 \cdot d + a_1 + q \cdot d - 1 \cdot d$$

$$a_1 + m \cdot d - d + a_1 + n \cdot d - d = a_1 + p \cdot d - d + a_1 + q \cdot d - d$$

Pozbrojimo istovjetne potencije, slijedi:

$$2a_1 + m \cdot d + n \cdot d - 2d = 2a_1 + p \cdot d + q \cdot d - 2d$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\cancel{2a_1} + m \cdot d + n \cdot d - \cancel{2d} = \cancel{2a_1} + p \cdot d + q \cdot d - \cancel{2d}$$

$$m \cdot d + n \cdot d = p \cdot d + q \cdot d$$

Izlucimo d iz oba clana sume na obje strane jednakosti, slijedi:

$$d \cdot (m+n) = d \cdot (p+q)$$

Pomnozimo cijelu jednkost s $\dfrac{1}{d}$, slijedi:

$$d \cdot (m+n) = d \cdot (p+q) \quad \Big/ \cdot \frac{1}{d}$$

$$d \cdot (m+n) \cdot \frac{1}{d} = d \cdot (p+q) \cdot \frac{1}{d}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{d} \cdot (m+n)}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{d}_1} = \frac{{}^{1}\cancel{d} \cdot (p+q)}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{d}_1}$$

$$\frac{m+n}{1} = \frac{p+q}{1}$$

$$m+n = p+q$$

Dakle pokazali smo da vrijedi $m+n = p-q$ ako vrijedi $a_m + a_n = a_p + a_q$ cime je I. tvrdnja pokazana. Nadalje pokazujemo II. tvrdnju.

Pretpostavimo da vrijedi $m+n = p+q$. Pokusajmo pokazati da tada vrijedi $a_m + a_n = a_p + a_q$. Pokusajmo malo srediti lijevu stranu jednkosti koju trebamo dobiti, slijedi:

$$\overset{a_1+(m-1)\cdot d}{a_m} + \underset{a_1+(n-1)\cdot d}{a_n} = a_1 + (m-1)\cdot d + a_1 + (n-1)\cdot d = (\star)$$

Poredamo clanove sume tako da su clanovi koji sadrze d na kraju, slijedi:

$$(\star) = a_1 + a_1 + (m-1)\cdot d + (n-1)\cdot d = (\star\star)$$

Izlucimo d iz posljednja dva clana sume, slijedi:

$$(\star\star) = a_1 + a_1 + (m-1+n-1)\cdot d = (\star\star\star)$$

Grupiramo sumande u zagradi na malo drugaciji nacin, te primjenimo cinjenicu da prema pretpostavci vrijedi $m+n = p+q$, slijedi:

$$(\star\star\star) = a_1 + a_1 + (\overbrace{m+n}^{p+q} - 1 - 1)\cdot d =$$
$$= a_1 + a_1 + (p+q-1-1)\cdot d = (\spadesuit)$$

Promijenimo poredak clanova sume u zagradi te ih pregrupiramo, slijedi:

$$(\spadesuit) = a_1 + a_1 + [(p-1)+(q-1)]\cdot d = (\spadesuit\spadesuit)$$

Rijesimo se vanjske zagrade, slijedi:

$$(\spadesuit\spadesuit) = a_1 + a_1 + (p-1)\cdot d + (q-1)\cdot d = (\spadesuit\spadesuit\spadesuit)$$

Zamijenimo poredak drugom i trecem clanu sume, slijedi:

$$(\spadesuit\spadesuit\spadesuit) = a_1 + a_1 + (p-1)\cdot d + (q-1)\cdot d =$$
$$= a_1 + (p-1)\cdot d + a_1 + (q-1)\cdot d = (\clubsuit)$$

Uocimo da prva dva clana sume zapravo prestavljaju p-ti, a druga dva clana sume q-ti clan aritmetickog niza (a_n), slijedi:

$$(\clubsuit) = \overbrace{a_1 + (p-1)\cdot d}^{a_p} + \overbrace{a_1 + (q-1)\cdot d}^{a_q} = a_p + a_q$$

Dakle pokazali smo da vrijedi $a_m + a_n = a_p + a_q$ ako vrijedi $m + n = p - q$ cime je II. tvrdnja pokazana.

No kako smo pokazali da vrijede obje tvrdnje zaparavo smo pokazali da vrijedi tvrdnja dana u zadatku te je time zadatak rijesen.

Zadatak 46: (str. 92) Pokazi da je aritmeticka sredina prvog i posljednjeg clana aritmetickog niza jednaka aritmetickoj sredini svih njegovih clanova.

Rjesenje: Neka je (a_k) aritmeticki niz koji ima ukupno n clanova. Izraz za opci clan a_k aritmetickog niza (a_k) s prvim clanom a_1 i diferencijom d ima oblik:

$$a_k = a_1 + (k-1)\cdot d$$

Trebamo prikazati da vijedi:

$$\frac{a_1 + a_n}{2} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

Prisjetimo se da sumu prvih n clanova aritmetickog niza (a_k) racunamo prema izrazu:

$$S_n = \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_n)$$

Promotrimo li brojnik u razlomku desne strane jednakosti mozemo zakljuciti da je to upravo zbroj prvih n clanova niza te mozemo primjeniti izraz za sumu prvih prvih n clanova aritmetickog niza. Tada jednakost poprima sljedeci oblik:

$$\frac{a_1 + a_n}{2} = \frac{\overbrace{a_1 + a_2 + ... + a_n}^{\frac{n}{2}(a_1 + a_n)}}{n}$$

$$\frac{a_1 + a_n}{2} = \frac{\frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)}{n}$$

Pomnozimo izraze u brojniku razlomka desne strane jednakosti, slijedi:

$$\frac{a_1 + a_n}{2} = \frac{\frac{n}{2} \cdot \frac{a_1 + a_n}{1}}{n}$$

$$\frac{a_1 + a_n}{2} = \frac{\frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}}{n}$$

Sredimo desnu stranu jednakosti prema pravilu sredjivanja dvojnog razlomka, odnosno prema $\left(\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}\right) = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$, slijedi:

$$\frac{a_1 + a_n}{2} = \frac{\frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}}{\frac{n}{1}}$$

$$\frac{a_1 + a_n}{2} = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2 \cdot n}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{a_1 + a_n}{2} = \frac{{}^{1}\cancel{n} \cdot (a_1 + a_n)}{2 \cdot \cancel{n}_1}$$

$$\frac{a_1 + a_n}{2} = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Kako je lijeva strana jednaka desnoj, tvrdnja je pokazana te je time zadatak rijesen.

<u>Zadatak 52</u>: 3) (str. 93) Rijesi jednadzb:

$$x - 1 + x - 3 + ... + x - 27 = 70$$

<u>Rjesenje</u>: Uocimo de sa na lijevoj strani nalazi suma nekoliko clanova aritmetickog niza. Odredit cemo opci clan tog niza i koliko zapravo clanova tog niza se nalazi u sumi na lijevoj strani jednkosti. Oznacimo taj niz s (a_n), tada vrijedi:

$$\overbrace{x - 1}^{a_1} + \overbrace{x - 3}^{a_2} + ... + \overbrace{x - 27}^{a_n} = 70$$

Izraz za opci clan a_n aritmetickog niza (a_n) s prvim clanom a_1 i diferencijom d ima oblik:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Pocetni clan a_1 aritmetickog niza (a_n) jest poznat. Potrebno je odrediti cemu je jednaka diferencija. U tu svrhu prisjetimo se osnovnog svojstva aritmetickog niza. Naime znamo da mora vrijediti cinjenica da je razlika svakog niza i njegovog neposrednog prethodnika stalna, odnosno da vrijedi:

$$a_{n+1} - a_n = d$$

Za n jednak jedan taj izraz poprima sljedeci oblik:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{a_{n+1}} - \underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{a_n} = d \quad \Rightarrow \quad a_{1+1} - a_1 = d$$

$$a_2 - a_1 = d$$

Uvrstimo vrijednosti prva dva clana aritmetickog niza (a_n) u dobivenu jednakost, slijedi:

$$\overset{x-3}{a_2} - \overset{x-1}{a_1} = d$$

$$x - 3 - (x-1) = d$$

Rjiesimo se zagrade na lijevoj strani jednakosti, slijedi:

$$x - 3 - x + 1 = d$$

Zbrojimo istovjetne potencije, slijedi:

$$\cancel{x} - 3 \cancel{- x} + 1 = d$$

$$-3 + 1 = d$$

$$-2 = d$$

Dakle diferencija aritmetickog niza (a_n) jednaka je -2. Odredimo koliko se clanova aritmetickog niza (a_n) nalazi u sumi na lijevoj strani jednakosti. To cemo uciniti pomocu opceg clana a_n aritmetickog niza (a_n):

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Uvrstimo poznate vrijednosti, slijedi:

$$\overset{x-27}{a_n} = a_1 + (n-1) \cdot \overset{-2}{d} \quad \Rightarrow \quad x - 27 = x - 1 + (n-1) \cdot (-2)$$

Rijesimo se zagrade na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$x - 27 = x - 1 + n \cdot (-2) + (-1) \cdot (-2)$$

$$x - 27 = x - 1 - 2n + 2$$

Pokratimo sto se poktatiti dade, slijedi:

$$\cancel{x} - 27 = \cancel{x} - 1 - 2n + 2$$

$$-27 = -1 - 2n + 2$$

Prbacimo sve poznanice s desne strane jednakosti na lijevu, slijedi:

$$-27 = -1 - 2n + 2$$

$$-27 + 1 - 2 = -2n$$

Zbrojim sto se zbrojiti dade, slijedi:

$$-28 = -2n$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{-2}$, slijedi:

$$-28 = -2n \quad \Big/ \cdot \frac{1}{-2}$$

$$-28 \cdot \frac{1}{-2} = -2n \cdot \frac{1}{-2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{14}\cancel{-28}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{-2}_1} = \frac{{}^{1}\cancel{-2}n}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{-2}_1}$$

$$\frac{14}{1} = \frac{n}{1}$$

$$14 = n$$

Dakle pocetnom jednakoscu dana je suma 14 clanova aritmetickog niza (a_n). Prisjetimo se nadalje da sumu S_n prvih n clanova aritmetickog niza (a_n) racunamo prema izrazu:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

Uvrstimo poznate vrijednosti, slijedi:

$$\overset{70}{S_n} = \frac{\overset{14}{n}}{2} \cdot (\underset{x-1}{a_1} + \underset{x-27}{a_n}) \quad \Rightarrow \quad 70 = \frac{14}{2} \cdot (x - 1 + x - 27)$$

Pozbrojimo istovjetne potencije u zagradi desne strane jednakosti, slijedi:

$$70 = \frac{14}{2} \cdot (2x - 28)$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$70 = \frac{{}^{7}\cancel{14}}{\cancel{2}_{1}} \cdot (2x - 28)$$

$$70 = \frac{7}{1} \cdot (2x - 28)$$

$$70 = 7 \cdot (2x - 28)$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{7}$, slijedi:

$$70 = 7 \cdot (2x - 28) \quad \Big/ \cdot \frac{1}{7}$$

$$70 \cdot \frac{1}{7} = 7 \cdot (2x - 28) \cdot \frac{1}{7}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{10}\cancel{70}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{7}_{1}} = \frac{{}^{1}\cancel{7} \cdot (2x - 28)}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{7}_{1}}$$

$$\frac{10}{1} = \frac{2x - 28}{1}$$

$$10 = 2x - 28$$

Prebacimo sve poznanice s desne jednakosti na lijevu, slijedi:

$$10 = 2x - \overset{\hookleftarrow}{28}$$

$$10 + 28 = 2x$$

$$38 = 2x$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{2}$, slijedi:

$$38 = 2x \quad \Big/ \cdot \frac{1}{2}$$

$$38 \cdot \frac{1}{2} = 2x \cdot \frac{1}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{19}\cancel{38}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_{1}} = \frac{{}^{1}\cancel{2}x}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_{1}}$$

$$\frac{19}{1} = \frac{x}{1}$$

$$19 = x$$

Dakle rjesenje dane jednadzbe jednako je 19. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 59: (str. 93) Koliki je zbroj prvih trinaest clanova aritmetickog niza ako je zbroj njegovih prvih sest clanova s parnim indeksima jednak 90.

Rjesenje: Neka je (a_n) aritmeticki niz. Sumu prvih n clanova tog niza racunamo prema izrazu:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

Nadalje opci clan a_n aritmetickog niza (a_n) s prvim clanom a_1 i diferencijom d ima oblik:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Sada izraz za sumu poprima sljedeci oblik:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + \overset{a_1 + (n-1) \cdot d}{\overset{\downarrow}{a_n}}) \quad \Rightarrow \quad S_n = \frac{n}{2} \cdot [a_1 + a_1 + (n-1) \cdot d]$$

Zbrojimo istovjetne potencije, slijedi:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot [2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d]$$

Suma prvih 13 clanova aritmetickog niza sada je jednaka:

$$\underset{\overset{\uparrow}{13}}{S_n} = \frac{n}{2} \cdot [2 \cdot a_1 + (\underset{\overset{\uparrow}{13}}{n} - 1) \cdot d] \quad \Rightarrow \quad S_{13} = \frac{13}{2} \cdot [2 \cdot a_1 + (13-1) \cdot d]$$

$$S_{13} = \frac{13}{2} \cdot (2 \cdot a_1 + 12 \cdot d)$$

Izlucimo broj 2 iz oba clana sume na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$S_{13} = \frac{13}{2} \cdot 2 \cdot (a_1 + 6 \cdot d)$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$S_{13} = \frac{13}{{}_1\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}^1 \cdot (a_1 + 6 \cdot d)}{1}$$

$$S_{13} = \frac{13 \cdot (a_1 + 6 \cdot d)}{1}$$

$$S_{13} = 13 \cdot (a_1 + 6 \cdot d)$$

Prema tvrdnji II. razmatranoj u dodatku suma prvih k clanova na parnim pozicijama aritmetickog niza (a_n), pri cemu je a_1 pocetan clan, a d diferencija, racuna se prema izrazu:

$${}^{\text{parna}}_{\text{mjesta}}S_k = k \cdot (a_1 + k \cdot d)$$

Sada je suma prvih 6 clanova na parnim pozicijama aritmetickog niza (a_n) jednaka:

$$\underset{\text{mjesta}}{\overset{\text{parna}}{}}\underset{\substack{\uparrow\\6}}{S_k} = \underset{\substack{\uparrow\\6}}{k} \cdot (a_1 + \underset{\substack{\uparrow\\6}}{k} \cdot d) \quad \Rightarrow \quad \underset{\text{mjesta}}{\overset{\text{parna}}{}}S_6 = 6 \cdot (a_1 + 6 \cdot d)$$

Znamo da je ta suma jednaka 90 pa jednakost poprima sljedeci oblik:

$$\underset{\text{mjesta}}{\overset{\text{parna}}{}}\overset{90}{S_6} = 6 \cdot (a_1 + 6 \cdot d)$$

$$90 = 6 \cdot (a_1 + 6 \cdot d)$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{6}$, slijedi:

$$90 = 6 \cdot (a_1 + 6 \cdot d) \quad \Big/ \cdot \frac{1}{6}$$

$$90 \cdot \frac{1}{6} = 6 \cdot (a_1 + 6 \cdot d) \cdot \frac{1}{6}$$

$$\frac{{}^{15}\cancel{90}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{6}_1} = \frac{{}^{1}\cancel{6} \cdot (a_1 + 6 \cdot d)}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{6}_1}$$

$$\frac{15}{1} = \frac{a_1 + 6 \cdot d}{1}$$

$$15 = a_1 + 6 \cdot d$$

Sada mozemo odrediti koliko iznosi suma prvih 11 clanova aritmetickog niza (a_n), jer uocavamo da je dio izraza upravo jednak jednkosti koju smo izveli, slijedi:

$$S_{13} = 13 \cdot \overbrace{(a_1 + 6 \cdot d)}^{15} \quad \Rightarrow \quad S_{13} = 13 \cdot 15$$

$$S_{13} = 195$$

Dakle suma prvih 11 clanova aritmetickog niza (a_n) iznosi 195 cim je zadatak rijesen.

Zadatak 60: (str. 93) Za $n = 1, 2, ..., 10$ neka je A_n zbroj prvih 40 clanova aritmetickog niza s prvim clanom n i razlikom $2n - 1$. Koliko je $A_1 + A_1 + A_2 + ... + A_{10}$?

Rjesenje: Neka je (a_k) aritmeticki niz kojem je prvi clan a_1 jednak n, a diferencija jednaka $2 \cdot n - 1$. Opcenito opci clan a_k aritmetickog niza (a_k) kojem je prvi clan a_1, a diferencija d ima oblik:

$$a_k = a_1 + (k-1) \cdot d$$

Uvrstimo poznate vrijednosti, slijedi:

$$a_k = \overset{\substack{n \\ \searrow}}{a_1} + (k-1) \cdot \overset{\substack{2 \cdot n - 1 \\ \swarrow}}{d} \quad \Rightarrow \quad a_k = n + (k-1) \cdot (2 \cdot n - 1)$$

Rijesimo se zagrada ne desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$a_k = n + k \cdot 2 \cdot n + k \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 \cdot n + (-1) \cdot (-1)$$

$$a_k = n + k \cdot 2 \cdot n - k - 2 \cdot n + 1$$

Pozbrojimo istovjetne potencije, slijedi:

$$a_k = k \cdot 2 \cdot n - k - n + 1$$

Suma prvih k clanova aritmetickog niza (a_k) racunamo prema izrazu:

$$S_k = \frac{k}{2} \cdot (a_1 + a_k)$$

Imajuci na umu izvedenu jednakost izraz za sumu poprima sljedeci oblik:

$$S_k = \frac{k}{2} \cdot (\underset{\substack{\uparrow \\ n}}{a_1} + \overset{\substack{k \cdot 2 \cdot n - k - n + 1 \\ \downarrow}}{a_k}) \quad \Rightarrow \quad S_k = \frac{k}{2} \cdot (n + k \cdot 2 \cdot n - k - n + 1)$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$S_k = \frac{k}{2} \cdot (\cancel{n} + k \cdot 2 \cdot n - k \cancel{- n} + 1)$$

$$S_k = \frac{k}{2} \cdot (k \cdot 2 \cdot n - k + 1)$$

Sada je suma prvih 40 clanova aritmetickog niza (a_k) jednako:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ 40}}{S_k} = \frac{\overset{\substack{40 \\ \downarrow}}{k}}{2} \cdot (\underset{\substack{\uparrow \\ 40}}{k} \cdot 2 \cdot n - \underset{\substack{\uparrow \\ 40}}{k} + 1) \quad \Rightarrow \quad S_{40} = \frac{40}{2} \cdot (40 \cdot 2 \cdot n - 40 + 1)$$

Zbrojimo sto se dade. slijedi:

$$S_{40} = \frac{40}{2} \cdot (80 \cdot n - 39)$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$S_{40} = \frac{{}^{20}\cancel{40}}{\cancel{2}_1} \cdot (80 \cdot n - 39)$$

$$S_{40} = \frac{20}{1} \cdot (80 \cdot n - 39)$$

$$S_{40} = 20 \cdot (80 \cdot n - 39)$$

Rijesimo se zagrade na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$S_{40} = 20 \cdot 80 \cdot n + 20 \cdot (-39)$$

$$S_{40} = 1600 \cdot n - 780$$

Dakle odredili smo sumu prvih 40 clanova aritmeticki niza (a_k) kojem je prvi clan a_1 jednak n, a diferencija jednaka $2 \cdot n - 1$. Ta suma je u zadatku oznacena s A_n, dakle vrijedi:

$$A_n = 1600 \cdot n - 780$$

Zadatak nam je odrediti sljedecu sumu:

$${}^{A}S_{10} = A_1 + A_2 + ... + A_{10}$$

Promotrimo li izraz za A_n mozemo zakljuciti da je time za pravo dan opci clan aritmetickog niza, nazovimo ga recimo (A_n). Naime vidimo da kad n uvecamo za jedan vrijednost izraza se poveca za istu vrijednost i to za 1600. Zakljucujemo da tada danu sumu mozemo izracunati prema izrazu za sumu prvih n clanova aritmetickog niza (A_n). Vrijedi:

$${}^{A}S_n = \frac{n}{2}(A_1 + A_n)$$

Sada je suma prvih 10 clanova aritmetickog niza (A_n) jednaka:

$${}^{A}\underset{\substack{\uparrow \\ 10}}{S_n} = \frac{\overset{\substack{40 \\ \downarrow}}{n}}{2}(A_1 + \underset{\substack{\uparrow \\ 10}}{A_n}) \quad \Rightarrow \quad {}^{A}S_{10} = \frac{10}{2}(A_1 + A_{10})$$

Odredimo cemu su jednaki A_1 i A_{10}. Vrijedi:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{A_n} = 1600 \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{n} - 780 \quad \Rightarrow \quad A_1 = 1600 \cdot 1 - 780$$

$$A_1 = 1600 - 780$$

$$A_1 = 820$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ 10}}{A_n} = 1600 \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ 10}}{n} - 780 \quad \Rightarrow \quad A_{10} = 1600 \cdot 10 - 780$$

$$A_{10} = 16000 - 780$$

$$A_{10} = 15220$$

Sada suma koju odredjujemo poprima sljedeci oblik:

$$
{}^{A}S_{10} = \frac{10}{2}\left(\underset{\substack{\uparrow\\ 820}}{A_1} + \overset{\substack{15220\\ \downarrow}}{A_{10}}\right) \quad \Rightarrow \quad {}^{A}S_{10} = \frac{10}{2}(820 + 15220)
$$

$$
{}^{A}S_{10} = \frac{10}{2} \cdot 16040
$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$
\begin{aligned}
{}^{A}S_{10} &= \frac{10}{{}_1\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{16040}^{8020}}{1} \\
{}^{A}S_{10} &= \frac{10 \cdot 8020}{1} \\
{}^{A}S_{10} &= \frac{80200}{1} \\
{}^{A}S_{10} &= 80200
\end{aligned}
$$

Dakle trazena suma jednaka je 80200 pa je time zadatak rijesen.

Zadatak 63: (str. 93) U aritmetickom je nizu $a_n = \frac{1}{m}$, $a_m = \frac{1}{n}$. Odredi zbroj prvih mn njegovih clanova.

Rjesenje: Opcenito opci clan a_k aritmetickog niza (a_k) kojem je prvi clan a_1, a diferencija d ima oblik:

$$a_k = a_1 + (k-1) \cdot d$$

Pokusajmo odrediti taj niz. U tu svrhu zapisimo clanove aritmetickog niza a_n i a_m preko izraza za opci clan a_k, slijedi:

$$
\underset{\substack{\uparrow\\ n}}{a_k} = a_1 + (\overset{\substack{n\\ \downarrow}}{k} - 1) \cdot d \quad \Rightarrow \quad a_n = a_1 + (n-1) \cdot d
$$

$$
\underset{\substack{\uparrow\\ m}}{a_k} = a_1 + (\overset{\substack{m\\ \downarrow}}{k} - 1) \cdot d \quad \Rightarrow \quad a_m = a_1 + (m-1) \cdot d
$$

Time dobivamo sljedeci sustav jednadzbi:

$$
\begin{cases}
a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \\
a_m = a_1 + (m-1) \cdot d
\end{cases}
$$

Uvrstimo poznate vrijednosti za clanove niza a_n i a_m, slijedi:

$$\begin{cases} \overset{\frac{1}{m}}{\overset{\downarrow}{a_n}} = a_1 + (n-1)\cdot d \\ \underset{\underset{\frac{1}{n}}{\uparrow}}{a_m} = a_1 + (m-1)\cdot d \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{m} = a_1 + (n-1)\cdot d \\[2ex] \dfrac{1}{n} = a_1 + (m-1)\cdot d \end{cases}$$

Oduzmemo jednakosti iz sustava jednadzbi, slijedi:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{n} = a_1 + (n-1)\cdot d - [a_1 + (m-1)\cdot d]$$

Rijesimo se zagrade na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{n} = a_1 + (n-1)\cdot d - a_1 - (m-1)\cdot d$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{n} = \cancel{a_1} + (n-1)\cdot d \cancel{- a_1} - (m-1)\cdot d$$

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{n} = (n-1)\cdot d - (m-1)\cdot d$$

Izlucimo d iz oba clana sume na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{n} = [n - 1 - (m-1)]\cdot d$$

Rijesimo se unutranje zagrade na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{n} = (n - 1 - m + 1)\cdot d$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{n} = \left(n \cancel{-1} - m + \cancel{1}\right)\cdot d$$

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{n} = (n - m)\cdot d$$

Svedemo razlomke na lijevoj strani jednakosti na zajednicki nazivnik $m \cdot n$ i zbrojimo ih, slijedi:

$$\frac{1\cdot n - 1\cdot n}{m\cdot n} = (n - m)\cdot d$$

$$\frac{n-m}{m \cdot n} = (n-m) \cdot d$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\dfrac{1}{n-m}$, slijedi:

$$\frac{n-m}{m \cdot n} = (n-m) \cdot d \quad \Big/ \cdot \frac{1}{n-m}$$

$$\frac{n-m}{m \cdot n} \cdot \frac{1}{n-m} = (n-m) \cdot d \cdot \frac{1}{n-m}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{n-m}}{m \cdot n} \cdot \frac{1}{\cancel{n-m}_{1}} = \frac{{}^{1}\cancel{(n-m)} \cdot d}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{n-m}_{1}}$$

$$\frac{1}{m \cdot n} = \frac{d}{1}$$

$$\frac{1}{m \cdot n} = d$$

Dakle diferenicija danog aritmetickog niza (a_k) jednaka je $d = \dfrac{1}{m \cdot n}$. Preostaje nam odrediti a_1. Vratimo se na sustav jednadzbi:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{m} = a_1 + (n-1) \cdot d \\[2ex] \dfrac{1}{n} = a_1 + (m-1) \cdot d \end{cases}$$

Zbrojimo jednakosti iz sustava jednadzbi, slijedi:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = a_1 + (n-1) \cdot d + a_1 + (m-1) \cdot d$$

Zbrojimo istovjetne potencije, slijedi:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d + (m-1) \cdot d$$

Izlucimo d iz oba clana sume na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 2 \cdot a_1 + (n-1+m-1) \cdot d$$

Zbrojimo sto se zbrojiti dade u zagradi na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 2 \cdot a_1 + (n+m-2) \cdot d$$

Svedemo razlomke na lijevoj strani jednakosti na zajednicki nazivnik $m \cdot n$ i zbrojimo ih, slijedi:

$$\frac{1 \cdot n + 1 \cdot n}{m \cdot n} = 2 \cdot a_1 + (n+m-2) \cdot d$$

$$\frac{n+m}{m\cdot n} = 2\cdot a_1 + (n+m-2)\cdot d$$

Zamijenimo d s izrazom koji smo izveli, slijedi:

$$\frac{n+m}{m\cdot n} = 2\cdot a_1 + (n+m-2)\cdot \overset{\frac{1}{m\cdot n}}{\overset{\downarrow}{d}}$$

$$\frac{n+m}{m\cdot n} = 2\cdot a_1 + (n+m-2)\cdot \frac{1}{m\cdot n}$$

Izmnozimo izraze u zadnjem clanu sume na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$\frac{n+m}{m\cdot n} = 2\cdot a_1 + \frac{(n+m-2)}{1}\cdot \frac{1}{m\cdot n}$$

$$\frac{n+m}{m\cdot n} = 2\cdot a_1 + \frac{n+m-2}{m\cdot n}$$

Prebacimo drugi clan sume na desnoj strani jednakosti na lijevu, slijedi:

$$\frac{n+m}{m\cdot n} = 2\cdot a_1 + \frac{n+m-2}{m\cdot n}$$

$$\frac{n+m}{m\cdot n} - \frac{n+m-2}{m\cdot n} = 2\cdot a_1$$

$$\frac{n+m-(n+m-2)}{m\cdot n} = 2\cdot a_1$$

Rijesimo se zagrade u brojniku razlomka na lijevoj strani jednakosti, slijedi:

$$\frac{n+m-n-m+2}{m\cdot n} = 2\cdot a_1$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{\cancel{n}+\cancel{m}\cancel{-n}\cancel{-m}+2}{m\cdot n} = 2\cdot a_1$$

$$\frac{2}{m\cdot n} = 2\cdot a_1$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{2}$, slijedi:

$$\frac{2}{m\cdot n} = 2\cdot a_1 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{m\cdot n}\cdot\frac{1}{2} = 2\cdot a_1\cdot\frac{1}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{2}}{m\cdot n}\cdot\frac{1}{\cancel{2}_1} = \frac{{}^{1}\cancel{2}\cdot a_1}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{2}_1}$$

$$\frac{1}{m \cdot n} = \frac{a_1}{1}$$

$$\frac{1}{m \cdot n} = a_1$$

Dakle pocetni clan danog aritmetickog niza (a_k) jednak je $a_1 = \dfrac{1}{m \cdot n}$. Sada opci clan a_k danog aritmetickog niza (a_k) poprima sljedeci oblik:

$$a_k = \overset{\frac{1}{m \cdot n}}{a_1} + (k-1) \cdot \overset{\frac{1}{m \cdot n}}{d} \quad \Rightarrow \quad a_k = \frac{1}{m \cdot n} + (k-1) \cdot \frac{1}{m \cdot n}$$

Pomnozimo izraze u posljednjem clanu sume na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$a_k = \frac{1}{m \cdot n} + \frac{k-1}{1} \cdot \frac{1}{m \cdot n}$$

$$a_k = \frac{1}{m \cdot n} + \frac{k-1}{m \cdot n}$$

Zbrojimo razlomke na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$a_k = \frac{1 + k - 1}{m \cdot n}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$a_k = \frac{\cancel{1} + k \cancel{- 1}}{m \cdot n}$$

$$a_k = \frac{k}{m \cdot n}$$

Preostaje jos samo odrediti sumu prvih $m \cdot n$ clanova aritmetickog niza (a_k). Sumu prvih k clanova aritmetickog niza (a_k) racunamo prema izrazu:

$$S_k = \frac{k}{2} \cdot (a_1 + a_k)$$

Uvrstimo jednakosti koje smo izveli, sjedi:

$$S_k = \frac{k}{2} \left(\underset{\frac{1}{m \cdot n}}{a_1} + \overset{\frac{k}{m \cdot n}}{a_k} \right) \quad \Rightarrow \quad S_k = \frac{k}{2} \cdot \left(\frac{1}{m \cdot n} + \frac{k}{m \cdot n} \right)$$

Zbrojimo razlomke u zagradi desne strane jednakosti, slijedi:

$$S_k = \frac{k}{2} \cdot \frac{1+k}{m \cdot n}$$

Sada je suma prvih $m \cdot n$ clanova aritmetickog niza (a_k) jednaka:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ m\cdot n}}{S_k} = \frac{\overset{\substack{m\cdot n \\ \downarrow}}{k}}{2} \cdot \frac{1+\overset{\substack{m\cdot n \\ \downarrow}}{k}}{m \cdot n} \quad \Rightarrow \quad S_{m\cdot n} = \frac{m \cdot n}{2} \cdot \frac{1 + m \cdot n}{m \cdot n}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$S_{m\cdot n} = \frac{{}^1\cancel{m \cdot n}}{2} \cdot \frac{1 + m \cdot n}{\cancel{m \cdot n}_1}$$

$$S_{m\cdot n} = \frac{1 + m \cdot n}{2}$$

Dakle odredili smo sumu prvih $m \cdot n$ clanova aritmetickog niza (a_k) te je time zadatak rijesen.

Zadatak 64: (str. 93) Odredi zbroj prvih $m+n$ clanova aritmetickog niza ako je $a_m = n$, $a_n = m$.

Rjesenje: Opcenito opci clan a_k aritmetickog niza (a_k) kojem je prvi clan a_1, a diferencija d ima oblik:

$$a_k = a_1 + (k-1) \cdot d$$

Pokusajmo odrediti taj niz. U tu svrhu zapisimo clanove aritmetickog niza a_n i a_m preko izraza za opci clan a_k, slijedi:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ n}}{a_k} = a_1 + (\overset{\substack{n \\ \downarrow}}{k} - 1) \cdot d \quad \Rightarrow \quad a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ m}}{a_k} = a_1 + (\overset{\substack{m \\ \downarrow}}{k} - 1) \cdot d \quad \Rightarrow \quad a_m = a_1 + (m-1) \cdot d$$

Time dobivamo sljedeci sustav jednadzbi:

$$\begin{cases} a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \\ a_m = a_1 + (m-1) \cdot d \end{cases}$$

Uvrstimo poznate vrijednosti za clanove niza a_n i a_m, slijedi:

$$\begin{cases} \overset{m}{\overset{\downarrow}{a_n}} = a_1 + (n-1) \cdot d \\ \underset{n}{\underset{\uparrow}{a_m}} = a_1 + (m-1) \cdot d \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = a_1 + (n-1) \cdot d \\ n = a_1 + (m-1) \cdot d \end{cases}$$

Oduzmemo jednakosti iz sustava jednadzbi, slijedi:

$$m - n = a_1 + (n-1) \cdot d - [a_1 + (m-1) \cdot d]$$

Rijesimo se zagrade na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$m - n = a_1 + (n-1) \cdot d - a_1 - (m-1) \cdot d$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$m - n = \cancel{a_1} + (n-1) \cdot d \cancel{- a_1} - (m-1) \cdot d$$

$$m - n = (n-1) \cdot d - (m-1) \cdot d$$

Izlucimo d iz oba clana sume na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$m - n = [n - 1 - (m-1)] \cdot d$$

Rijesimo se unutranje zagrade na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$m - n = (n - 1 - m + 1) \cdot d$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$m - n = \left(n \cancel{- 1} - m + \cancel{1}\right) \cdot d$$

$$m - n = (n - m) \cdot d$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\dfrac{1}{n-m}$, slijedi:

$$m - n = (n - m) \cdot d \quad \Big/ \cdot \frac{1}{n-m}$$

$$(m - n) \cdot \frac{1}{n-m} = (n - m) \cdot d \cdot \frac{1}{n-m}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{m-n}{1} \cdot \frac{1}{n-m} = \frac{{}^{1}\cancel{(n-m)} \cdot d}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{n-m}_{1}}$$

$$\frac{m-n}{n-m} = \frac{d}{1}$$

$$\frac{m-n}{n-m}=d$$

Izlucimo broj -1 iz oba clana sume u brojniku razlomka na lijevoj strani jednakosti, slijedi:

$$\frac{(-1)\cdot(-m+n)}{n-m}=d$$

$$\frac{(-1)\cdot(n-m)}{n-m}=d$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{(-1)\cdot^{1}\cancel{(n-m)}}{\cancel{n-m}_{1}}=d$$

$$\frac{-1}{1}=d$$

$$-1=d$$

Dakle diferenicija danog aritmetickog niza (a_k) jednaka je $d=-1$. Preostaje nam odrediti a_1. Vratimo se na sustav jednadzbi:

$$\begin{cases} m=a_1+(n-1)\cdot d \\ n=a_1+(m-1)\cdot d \end{cases}$$

Zbrojimo jednakosti iz sustava jednadzbi, slijedi:

$$m+n=a_1+(n-1)\cdot d+a_1+(m-1)\cdot d$$

Zbrojimo istovjetne potencije, slijedi:

$$m+n=2\cdot a_1+(n-1)\cdot d+(m-1)\cdot d$$

Izlucimo d iz oba clana sume na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$m+n=2\cdot a_1+(n-1+m-1)\cdot d$$

Zbrojimo sto se zbrojiti dade u zagradi na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$m+n=2\cdot a_1+(n+m-2)\cdot d$$

$$m+n=2\cdot a_1+(n+m-2)\cdot \overset{\substack{-1\\ \downarrow}}{d}$$

$$m+n=2\cdot a_1+(n+m-2)\cdot(-1)$$

Rijesimo se zagrade na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$m+n=2\cdot a_1+n\cdot(-1)+m\cdot(-1)+(-2)\cdot(-1)$$

$$m+n=2\cdot a_1-n-m+2$$

Prebacimo posljednja tri clana sume na desnoj strani jednakosti na lijevu, slijedi:

$$m + n = 2 \cdot a_1 - n - m + 2$$

$$m + n + n + m - 2 = 2 \cdot a_1$$

Zbrojimo istovjete potencije, slijedi:

$$2 \cdot m + 2 \cdot n - 2 = 2 \cdot a_1$$

Izlucimo broj 2 iz svih clanova sume na lijevoj strani jednakosti, slijedi:

$$2 \cdot (m + n - 1) = 2 \cdot a_1$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{2}$, slijedi:

$$2 \cdot (m + n - 1) = 2 \cdot a_1 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{2}$$

$$2 \cdot (m + n - 1) \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot a_1 \cdot \frac{1}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{2} \cdot (m + n - 1)}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1} = \frac{{}^{1}\cancel{2} \cdot a_1}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1}$$

$$\frac{m + n - 1}{1} = \frac{a_1}{1}$$

$$m + n - 1 = a_1$$

Dakle pocetni clan danog aritmetickog niza (a_k) jednak je $a_1 = m + n - 1$. Sada opci clan a_k danog aritmetickog niza (a_k) poprima sljedeci oblik:

$$a_k = \overset{m+n-1}{a_1} + (k - 1) \cdot \overset{-1}{d} \quad \Rightarrow \quad a_k = m + n - 1 + (k - 1) \cdot (-1)$$

Rijesimo se zagrade na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$a_k = m + n - 1 + k \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1)$$

$$a_k = m + n - 1 - k + 1$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$a_k = m + n \cancel{- 1} - k + \cancel{1}$$

$$a_k = m + n - k$$

Preostaje jos samo odrediti sumu prvih $m+n$ clanova aritmetickog niza (a_k). Sumu prvih k clanova aritmetickog niza (a_k) racunamo prema izrazu:

$$S_k = \frac{k}{2} \cdot (a_1 + a_k)$$

Uvrstimo jednakosti koje smo izveli, slijedi:

$$S_k = \frac{k}{2}\,(\underset{m+n-1}{\underset{\uparrow}{a_1}} + \overset{m+n-k}{\overset{\downarrow}{a_k}}) \quad \Rightarrow \quad S_k = \frac{k}{2} \cdot (m+n-1+m+n-k)$$

Zbrojimo istovjetne potencije, slijedi:

$$S_k = \frac{k}{2} \cdot (2 \cdot m + 2 \cdot n - k - 1)$$

Sada je suma prvih $m+n$ clanova aritmetickog niza (a_k) jednaka:

$$\underset{m+n}{\underset{\uparrow}{S_k}} = \frac{\overset{m+n}{\overset{\downarrow}{k}}}{2} \cdot (2 \cdot m + 2 \cdot n - \underset{m+n}{\underset{\uparrow}{k}} - 1) \quad \Rightarrow \quad S_{m+n} = \frac{m+n}{2} \cdot [2 \cdot m + 2 \cdot n - (m+n) - 1]$$

Rjesimo se unutarnje zagrade na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$S_{m+n} = \frac{m+n}{2} \cdot (2 \cdot m + 2 \cdot n - m - n - 1)$$

Zbrojimo istovjetne potencije, slijedi:

$$S_{m+n} = \frac{m+n}{2} \cdot (m+n-1)$$

$$S_{m+n} = \frac{m+n}{2} \cdot \frac{m+n-1}{1}$$

$$S_{m+n} = \frac{(m+n) \cdot (m+n-1)}{2}.$$

Dakle odredili smo sumu prvih $m+n$ clanova aritmetickog niza (a_k) te je time zadatak rijesen.

Zadatak 67: (str. 93) U aritmetickim nizovima $17, 21, 25, 29, \ldots$ i $16, 21, 26, 31, \ldots$ ima jednakih clanova. Ako redom ispisemo te clanove, oni ce cinit novi niz. Odredi zbroj prvih 100 clanova tog niza.

Rjesenje: Prvi niz oznacimo s (a_n), a drugi s (b_n). Odredimo opce clanove tih nizova, krenuvsi s prvim nizom:

$$17, 21, 25, 29, ...$$

Opci clan a_n prvog aritmetickog niza (a_n) ciji je pocetni clan a_1, a diferenicija $d_{(a_n)}$ ima oblik:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d_{(a_n)}$$

Oznacimo clanove danog niza:

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 17, & 21, & 25, & 29, ... \end{array}$$

Pocetni clan mu je poznat i jednak je 17. Ono sto moramo odrediti jest njegova diferencija. Prisjetimo se da je osnovno svojstvo aritmetickih nizova cinjenica da je razlika svakog clana niza i njegovog neposrednog prethodnika uvijek jednak, odnosno da vrijedi:

$$a_{n+1} - a_n = d_{(a_n)}$$

Odredimo koliko iznosi diferenicija niza (a_n), racunamo:

$$n = 1 \quad \Rightarrow \quad \underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{a_{n+1}} - \underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{a_n} = d_{(a_n)}$$

$$a_{1+1} - a_1 = d_{(a_n)}$$

$$a_2 - a_1 = d_{(a_n)}$$

Uvrstimo poznate vrijednosti, slijedi:

$$\overset{\substack{21 \\ \downarrow}}{a_2} - \overset{\substack{17 \\ \downarrow}}{a_1} = d_{(a_n)} \quad \Rightarrow \quad 21 - 17 = d_{(a_n)}$$

$$4 = d_{(a_n)}$$

Sada opci clan aritmetickog niza (a_n) poprima sljedeci oblik:

$$a_n = \overset{\substack{17 \\ \searrow}}{a_1} + (n-1) \cdot \overset{\substack{4 \\ \swarrow}}{d_{(a_n)}} \quad \Rightarrow \quad a_n = 17 + (n-1) \cdot 4$$

Odredimo nadalje opci clan drugog niza:

$$16, 21, 26, 31, ...$$

Opci clan b_n prvog aritmetickog niza (b_n) ciji je pocetni clan b_1, a diferenicija $d_{(b_n)}$ ima oblik:

$$b_n = b_1 + (n-1) \cdot d_{(b_n)}$$

Oznacimo clanove danog niza:

$$\begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 17, & 21, & 25, & 29, \ldots \end{array}$$

Pocetni clan mu je poznat i jednak je 17. Ono sto moramo odrediti jest njegova diferencija. Prisjetimo se da je osnovno svojstvo aritmetickih nizova cinjenica da je razlika svakog clana niza i njegovog neposrednog prethodnika uvijek jednak, odnosno da vrijedi:

$$b_{n+1} - b_n = d_{(b_n)}$$

Odredimo koliko iznosi diferenicija niza (b_n), racunamo:

$$n = 1 \quad \Rightarrow \quad \underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{b_{n+1}} - \underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{b_n} = d_{(b_n)}$$

$$b_{1+1} - b_1 = d_{(b_n)}$$

$$b_2 - b_1 = d_{(b_n)}$$

Uvrstimo poznate vrijednosti, slijedi:

$$\overset{\substack{21 \\ \downarrow}}{b_2} - \overset{\substack{16 \\ \downarrow}}{b_1} = d_{(b_n)} \quad \Rightarrow \quad 21 - 16 = d_{(b_n)}$$

$$5 = d_{(b_n)}$$

Sada opci clan aritmetickog niza (b_n) poprima sljedeci oblik:

$$b_n = \overset{\substack{16 \\ \searrow}}{b_1} + (n-1) \cdot \overset{\substack{5 \\ \swarrow}}{d_{(a_n)}} \quad \Rightarrow \quad b_n = 16 + (n-1) \cdot 5$$

Ustvari da bismo odredili novi niz koji sadrzi iste clanove obaju nizova bitne su nam samo njihove diferenicije. Naime sasvim je jasno da prvi clan tog niza jednak prvim clanovima koji se poklapaju, dakle 21. Diferencija novog niza bit ce jednaka najmanjem zajednickom visekratniku diferencija dvaju pocetnih nizova.

Neka je c_n opci clan aritmetickog niza (c_n) koji se sastoji od identicnih clanova (a_n) i (b_n). Tada vrijedi:

$$c_1 = 21$$

$$d_{(c_n)} = \text{NZV}\left(d_{(a_n)}, d_{(b_n)}\right)$$

Odredimo diferenciju aritmetickog niza (c_n), uvrstimo poznate vrijednosti, slijedi:

$$d_{(c_n)} = \text{NZV}\left(\overset{\substack{4 \\ \downarrow}}{d_{(a_n)}}, \overset{\substack{5 \\ \downarrow}}{d_{(b_n)}}\right) \quad \Rightarrow \quad d_{(c_n)} = \text{NZV}\,(4, 5)$$

Kako znamo da je najmanji zajednicki visekratnik bojeva 4 i 5 jednak 20, vrijedi:

$$d_{(c_n)} = 20$$

Opci clan a_n prvog aritmetickog niza (a_n) ciji je pocetni clan a_1, a diferenicija $d_{(a_n)}$ ima oblik:

$$c_n = c_1 + (n-1) \cdot d_{(c_n)}$$

Sada opci clan aritmetickog niza (a_n) poprima sljedeci oblik:

$$c_n = \overset{21}{c_1} + (n-1) \cdot \overset{20}{d_{(c_n)}} \quad \Rightarrow \quad c_n = 21 + (n-1) \cdot 20$$

Preostaje jos samo odrediti sumu prvih 100 clanova tog niza. Sumu prvih k clanova aritmetickog niza (a_n) racunamo prema izrazu:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (c_1 + c_n)$$

Sada je suma prvih 100 jednaka:

$$S_{\underset{100}{n}} = \frac{\overset{100}{n}}{2} (c_1 + c_{\underset{100}{n}}) \quad \Rightarrow \quad S_{100} = \frac{100}{2} (c_1 + c_{100})$$

Odredimo cemu je jednak c_{100}. Vrijedi:

$$c_{\underset{100}{n}} = 21 + (\underset{100}{n} - 1) \cdot 20 \quad \Rightarrow \quad c_{100} = 21 + (100-1) \cdot 20$$

$$c_{100} = 21 + 99 \cdot 20$$
$$c_{100} = 21 + 1980$$
$$c_{100} = 2001$$

Sada suma koju odredjujemo poprima sljedeci oblik:

$$S_{100} = \frac{100}{2} (\underset{21}{c_1} + \overset{2001}{c_{100}}) \quad \Rightarrow \quad S_{100} = \frac{100}{2} (21 + 2001)$$

$$S_{100} = \frac{100}{2} \cdot 2022$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$S_{100} = \frac{100}{{}_1\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2022}^{1011}}{1}$$

$$S_{100} = \frac{100 \cdot 1011}{1}$$

$$S_{100} = \frac{101100}{1}$$

$$S_{100} = 101100$$

Dakle trazena suma jednaka je 101100 pa je time zadatak rijesen.

Zadatak 69: (str. 93) U aritmetickom nizu (a_n) zbroj prvih n clanova jednak je $S_n = 2 \cdot n + 3 \cdot n^2$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Kako glasi opci clan niza?

Rjesenje: Kako bismo odredili opci clan opisanog niza moramo odrediti njegov pocetni clan i diferenciju. Neka je to niz (a_n). Razmislimo li malo mozemo zakljuciti da mora vrijediti sljedece:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

Iz prve jednakosti mozemo direktno odrediti prvi clan niza (a_n), racunamo:

$$\underset{\underset{1}{\uparrow}}{S_n} = 2 \cdot \underset{\underset{1}{\uparrow}}{n} + 3 \cdot \underset{\underset{1}{\uparrow}}{n}^2 \quad \Rightarrow \quad S_1 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2$$

$$S_1 = 2 + 3 \cdot 1$$

$$S_1 = 2 + 3$$

$$S_1 = 5$$

Odredimo i drugu jednakost, slijedi:

$$\underset{\underset{2}{\uparrow}}{S_n} = 2 \cdot \underset{\underset{2}{\uparrow}}{n} + 3 \cdot \underset{\underset{2}{\uparrow}}{n}^2 \quad \Rightarrow \quad S_2 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2$$

$$S_2 = 4 + 3 \cdot 4$$

$$S_2 = 4 + 12$$

$$S_2 = 16$$

Da bismo odredili aritmeticki niz potrebno mu je jos odrediti diferenciju. Prisjetimo se da je osnovno svojstvo aritmetickih nizova cinjenica da je razlika svakog clana niza i njegovog neposrednog prethodnika uvijek jednak, odnosno da vrijedi:

$$a_{n+1} - a_n = d_{(a_n)}$$

Odredimo koliko iznosi diferenicija niza (a_n), racunamo:

$$n = 1 \quad \Rightarrow \quad \underset{\underset{1}{\uparrow}}{a_{n+1}} - \underset{\underset{1}{\uparrow}}{a_n} = d_{(a_n)}$$

$$a_{1+1} - a_1 = d_{(a_n)}$$

$$a_2 - a_1 = d_{(a_n)}$$

Dakle trebamo odrediti cemu je jednak drugi clan niza. Uocimo da ako oduzmemo iznos prve sume od druge upravo cemo dobiti vrijednost drugog clana niza. Vrijedi:

$$S_2 - \overset{\overset{a_1 + a_2}{\downarrow}}{} \underset{\underset{a_2}{\uparrow}}{S_1} = a_1 + a_2 - a_1 = a_2$$

Uvrstimo poznate vrijednosti, slijedi:

$$a_2 = \overset{\overset{16}{\downarrow}}{S_2} - \overset{\overset{5}{\downarrow}}{S_1} \quad \Rightarrow \quad a_2 = 16 - 5$$

$$a_2 = 11$$

Sada mozemo odrediti difereniciju niza $d_{(a_n)}$. Uvrstimo poznate vrijednosti, slijedi:

$$\overset{\overset{11}{\downarrow}}{a_2} - \overset{\overset{5}{\downarrow}}{a_1} = d_{(a_n)} \quad \Rightarrow \quad 11 - 5 = d_{(a_n)}$$

$$6 = d_{(a_n)}$$

Preostaje jos odrediti opci clan opisnog aritmetickog niza. Opcenito opci clan a_n aritmetickog niza (a_n) kojem je prvi clan a_1, a diferencija $d_{(a_n)}$ ima oblik:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d_{(a_n)}$$

Pokusajmo odrediti taj niz. U tu svrhu zapisimo clanove aritmetickog niza a_n i a_m preko izraza za opci clan a_k, slijedi:

$$a_n = \underset{\underset{5}{\uparrow}}{a_1} + (n-1) \cdot \overset{\overset{6}{\downarrow}}{d} \quad \Rightarrow \quad a_n = 5 + (n-1) \cdot 6$$

Dakle opci clan a_n aritmetickog niza (a_n) ima oblik $a_n = 5 + (n-1) \cdot 6$. Time je zadatak rijesen.