Pojam niza. Zadavanje niza

Zadatak 10: (str. 83) Zadan je niz (a_n):

$$a_n = \begin{cases} 4n - 1, & \text{ako je } n \text{ neparan broj} \\ -1, & \text{ako je } n \text{ paran broj} \end{cases}$$

Koliki je zbroj prvih 100 clanova ovog niza?

Rjesenje: Ispisimo prvih nekoliko clanova niza:

$$\text{prvi clan niza: } n = \overset{\substack{\text{neparan broj}\\ \downarrow}}{1} \quad \Rightarrow \quad \underset{\substack{\uparrow\\ 1}}{a_n} = 4\overset{\substack{1\\ \downarrow}}{n} - 1 = 4 \cdot 1 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$\text{drugi clan niza: } n = \overset{\substack{\text{paran broj}\\ \downarrow}}{2} \quad \Rightarrow \quad \underset{\substack{\uparrow\\ 2}}{a_n} = -1$$

$$\text{treci clan niza: } n = \overset{\substack{\text{neparan broj}\\ \downarrow}}{3} \quad \Rightarrow \quad \underset{\substack{\uparrow\\ 3}}{a_n} = 4\overset{\substack{3\\ \downarrow}}{n} - 1 = 4 \cdot 3 - 1 = 12 - 1 = 11$$

$$\text{cetvrti clan niza: } n = \overset{\substack{\text{paran broj}\\ \downarrow}}{4} \quad \Rightarrow \quad \underset{\substack{\uparrow\\ 4}}{a_n} = -1$$

$$\text{peti clan niza: } n = \overset{\substack{\text{neparan broj}\\ \downarrow}}{5} \quad \Rightarrow \quad \underset{\substack{\uparrow\\ 5}}{a_n} = 4\overset{\substack{5\\ \downarrow}}{n} - 1 = 4 \cdot 5 - 1 = 20 - 1 = 19$$

Dakle u prvih 100 clanova niza nalazi se 50 puta -1, jer se na svakoj parnoj "poziciji" nalazi broj -1. No to znaci da je suma svih clanova niza na parnim "pozicijama" jednaka -50.

Preostaje pogledati koliki je zbroj clanova niza na neparnim pozicijama, njih je takodjer ukupno 50 i svaki je oblika:

$$a_n = 4n - 1$$

Neparne brojeve mozemo prikazati na sljedeci nacin:

$$n = 2k - 1 \quad \text{pri cemu je } k \in \mathbb{N}$$

Clanovi niza na neparnim "pozicijama" sada poprimaju sljedeci oblik:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ 2k-1}}{a_n} = 4\overset{\substack{2k-1 \\ \downarrow}}{n} - 1 \quad \Rightarrow \quad a_{2k-1} = 4 \cdot (2k-1) - 1 =$$
$$= 8k - 4 - 1 = 8k - 5$$

Dakle trebamo odrediti sljedecu sumu:

$$a_1 + a_3 + a_5 + ... + a_{99} = \sum_{k=1}^{50} a_{2k-1} = \sum_{k=1}^{50} (8k - 5) = (\star)$$

Dobivenu sumu mozemo rastaviti na sljedece dvije sume, slijedi:

$$(\star) = \sum_{k=1}^{50} (8k - 5) = \sum_{k=1}^{50} 8k - \sum_{k=1}^{50} 5 = (\star\star)$$

Sve sto ne ovisi o indeksu sumacije mozemo staviti ispred znaka sumacije, dakle stavljamo broj 8, slijedi:

$$(\star\star) = 8 \sum_{k=1}^{50} k - \sum_{k=1}^{50} 5 = (\star\star\star)$$

Prva suma zapravo je suma prvih 50 prirodnih brojeva. Prisjetimo se da tu sumu racunamo prema sljedecem izrazu:

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dakle slijedi:

$$(\star\star\star) = 8 \underbrace{\sum_{k=1}^{50} k}_{\frac{50 \cdot (50+1)}{2}} - \underbrace{\sum_{k=1}^{50} 5}_{50 \cdot 5} = (\clubsuit)$$

$$(\clubsuit) = 8 \cdot \frac{50 \cdot (50+1)}{2} - 50 \cdot 5 = 8 \cdot \frac{50 \cdot 51}{2} - 250 = (\clubsuit\clubsuit)$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$(\clubsuit\clubsuit) = 8 \cdot \frac{{}^{25}\cancel{50} \cdot 51}{\cancel{2}_1} - 250 = 8 \cdot \frac{25 \cdot 51}{1} - 250 = 8 \cdot 1275 - 250 = 10200 - 250 = 9950$$

Dakle suma prvih 100 clanova niza jest 9950. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 14: (str. 83) Odredi zbroj prvih pet clanova niza (a_n) s parnim indeksima ako je $a_n = n - (-1)^n \cdot 2^{n-1}$.

Rjesenje: Ispisimo prvih pet clanova niza na parnim "pozicijama":

drugi clan niza: $n = 2 \quad \Rightarrow$
$$\underset{\underset{2}{\uparrow}}{a_n} = \overset{\overset{2}{\downarrow}}{n} - (-1)^{\overset{\overset{2}{\downarrow}}{n}} \cdot 2^{\overset{\overset{2}{\downarrow}}{n}-1} = 2 - (-1)^2 \cdot 2^{2-1} = 2 - 2^1 = 2 - 2 = 0$$

cetvrti clan niza: $n = 4 \quad \Rightarrow$
$$\underset{\underset{4}{\uparrow}}{a_n} = \overset{\overset{4}{\downarrow}}{n} - (-1)^{\overset{\overset{4}{\downarrow}}{n}} \cdot 2^{\overset{\overset{4}{\downarrow}}{n}-1} = 4 - (-1)^4 \cdot 2^{4-1} = 4 - 2^3 = 4 - 8 = -4$$

sesti clan niza: $n = 6 \quad \Rightarrow$
$$\underset{\underset{6}{\uparrow}}{a_n} = \overset{\overset{6}{\downarrow}}{n} - (-1)^{\overset{\overset{6}{\downarrow}}{n}} \cdot 2^{\overset{\overset{6}{\downarrow}}{n}-1} = 6 - (-1)^6 \cdot 2^{6-1} = 6 - 2^5 = 6 - 32 = -26$$

osmi clan niza: $n = 8 \quad \Rightarrow$
$$\underset{\underset{8}{\uparrow}}{a_n} = \overset{\overset{8}{\downarrow}}{n} - (-1)^{\overset{\overset{8}{\downarrow}}{n}} \cdot 2^{\overset{\overset{8}{\downarrow}}{n}-1} = 8 - (-1)^8 \cdot 2^{8-1} = 8 - 2^7 = 8 - 128 = -120$$

deseti clan niza: $n = 10 \quad \Rightarrow$
$$\underset{\underset{10}{\uparrow}}{a_n} = \overset{\overset{10}{\downarrow}}{n} - (-1)^{\overset{\overset{10}{\downarrow}}{n}} \cdot 2^{\overset{\overset{10}{\downarrow}}{n}-1} = 10 - (-1)^{10} \cdot 2^{10-1} = 10 - 2^9 = 10 - 512 = -502$$

Suma je sada jedanaka:
$$\overset{\overset{0}{\downarrow}}{a_2} + \underset{\underset{-4}{\uparrow}}{a_4} + \overset{\overset{-26}{\downarrow}}{a_6} + \underset{\underset{-120}{\uparrow}}{a_8} + \overset{\overset{-512}{\downarrow}}{a_{10}} = 0 + (-4) + (-26) + (-120) + (-512) = 0 - 4 - 26 - 120 - 502 = -652$$

Dakle dana suma jenaka je -652. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 16: (str. 83) Opci clan niza je $a_n = (-1)^{n+1} \cdot n$. Odredi aritmeticku sredinu prvih 100 clanova ovog niza.

Rjesenje: Ispisimo prvih par clanova niza:

$$\text{prvi clan niza: } n = 1 \quad \Rightarrow \quad \underset{\underset{1}{\uparrow}}{a_n} = (-1)^{\overset{1}{\overset{\downarrow}{n}}+1} \cdot \overset{1}{\overset{\downarrow}{n}} = (-1)^{1+1} \cdot 1 = \\ = (-1)^2 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\text{drugi clan niza: } n = 2 \quad \Rightarrow \quad \underset{\underset{2}{\uparrow}}{a_n} = (-1)^{\overset{2}{\overset{\downarrow}{n}}+1} \cdot \overset{2}{\overset{\downarrow}{n}} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = \\ = (-1)^3 \cdot 2 = -1 \cdot 2 = -2$$

$$\text{treci clan niza: } n = 3 \quad \Rightarrow \quad \underset{\underset{3}{\uparrow}}{a_n} = (-1)^{\overset{3}{\overset{\downarrow}{n}}+1} \cdot \overset{3}{\overset{\downarrow}{n}} = (-1)^{3+1} \cdot 3 = \\ = (-1)^4 \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3$$

$$\text{cetvrti clan niza: } n = 4 \quad \Rightarrow \quad \underset{\underset{4}{\uparrow}}{a_n} = (-1)^{\overset{4}{\overset{\downarrow}{n}}+1} \cdot \overset{4}{\overset{\downarrow}{n}} = (-1)^{4+1} \cdot 4 = \\ = (-1)^5 \cdot 4 = -1 \cdot 4 = -4$$

$$\text{peti clan niza: } n = 5 \quad \Rightarrow \quad \underset{\underset{5}{\uparrow}}{a_n} = (-1)^{\overset{5}{\overset{\downarrow}{n}}+1} \cdot \overset{5}{\overset{\downarrow}{n}} = (-1)^{5+1} \cdot 5 = \\ = (-1)^6 \cdot 6 = 1 \cdot 5 = 5$$

Dakle mozemo uociti da se dani niz sastoji od cijelih brojeva takvih da neparni brojevi dolaze s pozitivnim, a parni brojevi s negativnim predznakom. Pokusajmo odrediti aritmeticku sredinu prvih 100 clanova danog niza. Racunamo:

$$\begin{aligned} A(a_1, a_2, a_3, ..., a_{100}) &= \frac{\overset{1}{\overset{\downarrow}{a_1}} + \overset{-2}{\overset{\downarrow}{a_2}} + \overset{3}{\overset{\downarrow}{a_3}} + ... + \overset{-100}{\overset{\downarrow}{a_{100}}}}{100} = \\ &= \frac{1 + (-2) + 3 + (-4) + ... + 99 + (-100)}{100} = \\ &= \frac{1 - 2 + 3 - 4 + ... + 99 - 100}{100} = (\star) \end{aligned}$$

Primjetimo da svaka dva uzasopna para, pocevsi od prvog, u zbroju daju broj -1. Kako je ukupno 100 brojeva, parova je onda 50. Nastavljamo racun:

$$(\star) = \frac{\overbrace{1-2}^{-1} + \overbrace{3-4}^{-1} + ... + \overbrace{99-100}^{-1}}{100} =$$
$$= \frac{\overbrace{-1 + (-1) + ... + (-1)}^{\text{ukupno 50 puta -1}}}{100} =$$
$$= \frac{50 \cdot (-1)}{100} = \frac{-50}{100} = (\star\star)$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$(\star\star) = \frac{\cancel{-50}^{-1}}{_{2}\cancel{100}} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Dakle aritmeticka sredina prvih 100 clanova danog niza jest $-\frac{1}{2}$. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 20: (str. 84) Dan je niz (a_n) pri cemu je $a_1 = 1$, a za sve $n > 1$ je $a_n = \frac{n}{a_{n-1}}$. Izracunaj $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_{100}$.

Rjesenje: Zapisimo rekurzivnu relaciju na malo drugaciji nacin, drugim rijecima pomnizimo je s a_{n-1}, slijedi:

$$a_n = \frac{n}{a_{n-1}} \;/ \cdot a_{n-1}$$
$$a_n \cdot a_{n-1} = \frac{n}{a_{n-1}} \cdot a_{n-1}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$a_n \cdot a_{n-1} = \frac{n}{_{1}\cancel{a_{n-1}}} \cdot \frac{\cancel{a_{n-1}}^{1}}{1}$$
$$a_n \cdot a_{n-1} = \frac{n}{1}$$
$$a_n \cdot a_{n-1} = n$$

Zapisimo dobiveni izraz na malo drugaciji nacin, vrijedi:

$$a_{n-1} \cdot a_n = n$$

Promotrimo sada produkt koji trebamo odrediti:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_{100} = (\star)$$

Primjetimo da je prema prethodnom izrazu umnozak dvaju uzastopnih clanova niza jednak vecem indeksu tih dvaju clanova niza, to nas navodi na zakljucak da mora vrijediti sljedece:

$$(\star) = \overset{2}{\overbrace{a_1 \cdot a_2}} \cdot \overset{4}{\overbrace{a_3 \cdot a_4}} \cdot \ldots \cdot \overset{100}{\overbrace{a_{99} \cdot a_{100}}} =$$

$$= 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 100 = (\star\star)$$

Uocimo da je ovo umnozak prvih 100 parnih brojeva. Izlucimo 2 iz svakog clana produkta, slijedi:

$$(\star\star) = \overset{2\cdot 1}{2} \cdot \overset{2\cdot 2}{4} \cdot \ldots \cdot \overset{2\cdot 50}{100} =$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 50 = (\star\star\star)$$

Izdvojimo sve brojeve 2 na pocetak produkta, a ostale brojke prema kraju, slijedi:

$$(\star\star\star) = \overbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}^{\text{50 puta broj 2}} \cdot \underbrace{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 50}_{\text{brojevi od 1 do 50}} =$$

$$= 2^{50} \cdot 50!$$

Dakle umnozak prvih 100 clanova danog niza jednak je $2^{50 \cdot 50!}$. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 21: (str. 84) U nizu (a_n) je $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, a za sve $n > 2$ je $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$. Odredi a_{1000}.

Rjesenje: Zapisimo rekurzivnu relaciju na malo drugaciji nacin, drugim rijecima pomnozimo je s $\frac{1}{a_{n-1}}$, slijedi:

$$a_n = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \;/ \cdot \frac{1}{a_{n-1}}$$

$$a_n \cdot \frac{1}{a_{n-1}} = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_{n-1}}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{a_n}{1} \cdot \frac{1}{a_{n-1}} = \frac{{}^{1}\cancel{a_{n-1}} \cdot a_{n+1}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{a_{n-1}}1}$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{1}$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = a_{n+1}$$

Zapisimo dobiveni izraz na malo drugaciji nacin, vrijedi:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Ispisimo nekoliko clanova niza:

$$\text{treci clan niza: } \overbrace{n+1=3}^{\substack{n=2\\ \Uparrow}} \Rightarrow \underbrace{a_{n+1}}_{\substack{\downarrow\\ 3}} = \frac{a_n \overset{2}{\swarrow}}{\underset{\substack{\uparrow\\ 2}}{a_{n-1}}} \Rightarrow a_3 = \frac{a_2}{a_{2-1}} = \frac{\overset{\substack{3\\ \downarrow}}{a_2}}{\underset{\substack{\uparrow\\ 2}}{a_1}} =$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$\text{cetvrti clan niza: } \overbrace{n+1=4}^{\substack{n=3\\ \Uparrow}} \Rightarrow \underbrace{a_{n+1}}_{\substack{\downarrow\\ 4}} = \frac{a_n \overset{3}{\swarrow}}{\underset{\substack{\uparrow\\ 3}}{a_{n-1}}} \Rightarrow a_4 = \frac{a_3}{a_{3-1}} = \frac{\overset{\substack{\frac{3}{2}\\ \downarrow}}{a_3}}{\underset{\substack{\uparrow\\ 3}}{a_2}} =$$

$$= \frac{\frac{{}^{1}\cancel{3}}{2}}{\frac{\cancel{3}_{1}}{1}} = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{1}}\right) = \frac{1\cdot 1}{2\cdot 1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{peti clan niza: } \overbrace{n+1=5}^{\substack{n=4\\ \Uparrow}} \Rightarrow \underbrace{a_{n+1}}_{\substack{\downarrow\\ 5}} = \frac{a_n \overset{4}{\swarrow}}{\underset{\substack{\uparrow\\ 4}}{a_{n-1}}} \Rightarrow a_5 = \frac{a_4}{a_{4-1}} = \frac{\overset{\substack{\frac{1}{2}\\ \downarrow}}{a_4}}{\underset{\substack{\uparrow\\ \frac{3}{2}}}{a_3}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\cancel{2}^{1}}}{\frac{3}{{}_{1}\cancel{2}}} = \left(\frac{\frac{1}{1}}{\frac{3}{1}}\right) = \frac{1\cdot 1}{3\cdot 1} = \frac{1}{3}$$

$$\text{sesti clan niza: } \overbrace{n+1=6}^{\substack{n=5\\ \Uparrow}} \Rightarrow \underbrace{a_{n+1}}_{\substack{\downarrow\\ 6}} = \frac{a_n \overset{5}{\swarrow}}{\underset{\substack{\uparrow\\ 5}}{a_{n-1}}} \Rightarrow a_6 = \frac{a_5}{a_{5-1}} = \frac{\overset{\substack{\frac{1}{3}\\ \downarrow}}{a_5}}{\underset{\substack{\uparrow\\ \frac{1}{2}}}{a_4}} =$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{2\cdot 1}{3\cdot 1} = \frac{2}{3}$$

$$\text{sedmi clan niza: } \overbrace{n+1=7}^{n=6} \Rightarrow \underbrace{a_{n+1}}_{7} = \frac{\overset{6}{a_n}}{\underset{6}{a_{n-1}}} \Rightarrow a_7 = \frac{a_6}{a_{6-1}} = \frac{\overset{\frac{2}{3}}{a_6}}{\underset{\frac{1}{3}}{a_5}} =$$

$$= \frac{\frac{2}{\cancel{3}_1}}{\frac{1}{{}_1\cancel{3}}} = \left(\frac{\frac{2}{1}}{\frac{1}{1}}\right) = \frac{2\cdot 1}{1\cdot 1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{osmi clan niza: } \overbrace{n+1=8}^{n=7} \Rightarrow \underbrace{a_{n+1}}_{8} = \frac{\overset{7}{a_n}}{\underset{7}{a_{n-1}}} \Rightarrow a_8 = \frac{a_7}{a_{7-1}} = \frac{\overset{2}{a_7}}{\underset{\frac{2}{3}}{a_6}} =$$

$$= \left(\frac{\frac{{}^1\cancel{2}}{1}}{\frac{\cancel{2}_1}{3}}\right) = \frac{1\cdot 3}{1\cdot 1} = \frac{3}{1} = 3$$

Dakle vidimo da se clanovi niza pocinju ponavljati nakon svakih sest clanova niza, odnosno vrijedi:

$$a_n = \begin{cases} 2\,; & \text{ako broj } n \text{ pri dijeljenju sa 6 daje ostatak 1} \\ 3\,; & \text{ako broj } n \text{ pri dijeljenju sa 6 daje ostatak 2} \\ \frac{3}{2}\,; & \text{ako broj } n \text{ pri dijeljenju sa 6 daje ostatak 3} \\ \frac{1}{2}\,; & \text{ako broj } n \text{ pri dijeljenju sa 6 daje ostatak 4} \\ \frac{1}{3}\,; & \text{ako broj } n \text{ pri dijeljenju sa 6 daje ostatak 5} \\ \frac{2}{3}\,; & \text{ako broj } n \text{ pri dijeljenju sa 6 daje ostatak 0} \end{cases}$$

Da bi odredili 1000 clan niza, podijelimo broj 1000 sa 6, vrijedi:

$$1000 = 166 \cdot 6 + 4$$

Kako je ostatak jednak 4 zakljucujemo da je $a_{1000} = \frac{1}{2}$. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 24: (str. 84) Opci clan niza (a_n) zadan je formulom $a_n = 7n+3$.

Isti niz zapisi rekurzivnom relacijom.

Rjesenje: Dakle trebamo zapisati n-ti clan niza preko prethodnih clanova niza (jednog ili vise). Pogledajmo kako izgleda $(n+1)$-vi clan niza, slijedi:

$$\underset{\overset{\uparrow}{n+1}}{a_n} = 7\overset{\overset{n+1}{\downarrow}}{n} + 3 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = 7\,(n+1) + 3$$

Pokusajmo srediti dobiveni izraz tako da pojavi prethodni clan unutar istog, slijedi:

$$a_{n+1} = 7\,(n+1) + 3 = 7n + 7 + 3$$

Promijenimo redoslijed sumanada u danom izrazu, slijedi:

$$a_{n+1} = 7n + 3 + 7$$

Uocimo da su prva dva clana sume na desnoj strani upravo jednaki n-tom clanu niza (a_n), vrijedi:

$$a_{n+1} = \underbrace{7n + 3}_{\overset{\downarrow}{a_n}} + 7 = a_n + 7$$

Dakle vrijedi:

$$a_{n+1} = a_n + 7$$

Kako smo $n+1$-vi clan niza prikazali preko prethodnog clana niza, zapisali smo pocetni izraz rekurzivno. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 25: (str. 84) Ako je opci clan a_n niza (a_n) zadan sa $a_n = 5 \cdot 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$. Kako glasi zapis istog niza rekurzivnom relacijom.

Rjesenje: Dakle trebamo zapisati n-ti clan niza preko prethodnih clanova niza (jednog ili vise). Pogledajmo kako izgleda $(n+1)$-vi clan niza, slijedi:

$$\underset{\overset{\uparrow}{n+1}}{a_n} = 5 \cdot 2^{-\overset{\overset{n+1}{\downarrow}}{n}} \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = 5 \cdot 2^{-(n+1)}$$

Pokusajmo srediti dobiveni izraz tako da pojavi prethodni clan unutar istog, slijedi:

$$a_{n+1} = 5 \cdot 2^{-(n+1)} = 5 \cdot 2^{-n-1}$$

Raspisimo drugi clan produkta na desnoj strani jednakosti prema izrazu za mnozenje potencija iste baze, odnosno prema $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, slijedi:

$$a_{n+1} = 5 \cdot \underbrace{2^{-n-1}}_{\substack{\downarrow \\ 2^{-n} \cdot 2^{-1}}}$$

$$a_{n+1} = 5 \cdot 2^{-n} \cdot 2^{-1}$$

Uocimo da su prva dva clana produkta na desnoj strani upravo jednaki n-tom clanu niza (a_n), slijedi:

$$a_{n+1} = \underbrace{5 \cdot 2^{-n}}_{\substack{\downarrow \\ a_n}} \cdot 2^{-1} = a_n \cdot 2^{-1}$$

Dakle vrijedi:

$$a_{n+1} = a_n \cdot 2^{-1}$$

Prisjetimo se da posljednji clan produkta na desnoj strani izraza mozemo srediti prema izrazu $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, slijedi:

$$a_{n+1} = a_n \cdot \overset{\substack{\frac{1}{2} \\ \downarrow}}{2^{-1}}$$

$$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{2} = \frac{a_n}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a_n}{2}$$

Dakle vrijedi:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$$

Kako smo $n+1$-vi clan niza prikazali preko prethodnog clana niza, zapisali smo pocetni izraz rekurzivno. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 26: (str. 84) Niz a_n ima sljedece svojstvo: Ako su m i n bilo koja dva uzastopna clana niza, onda je sljedeci clan niza jedan razlici $n - m$. Neka je $a_1 = a$, $a_2 = b$. Koliki je zbroj prvih 66 clanova niza?

Rjesenje: Citajuci zadatak mozemo zakljuciti da se niz moze zapisati sljedecom rekurzivnom relacijom:

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2} \text{ za } n > 2$$

pri cemu je $a_1 = a$ i $a_2 = b$. Pretpostavka jest da se clanovi niza nakon nekog trenutka pocnu ponavljati. U tu svrhu odredimo prvih nekoliko clanova niza, vrijedi:

$$\text{prvi clan niza: } n = 1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = a$$

$$\text{drugi clan niza: } n = 2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = b$$

$$\text{treci clan niza: } n = 3 \quad \Rightarrow \quad \underset{\overset{\uparrow}{3}}{a_n} = \underset{\overset{\uparrow}{3}}{a_{n-1}} - \underset{\overset{\uparrow}{3}}{a_{n-2}} \quad \Rightarrow \quad a_3 = a_{3-1} - a_{3-2} = \overset{b}{a_2} - \overset{a}{a_1} =$$

$$= b - a$$

$$\text{cetvrti clan niza: } n = 4 \quad \Rightarrow \quad \underset{\overset{\uparrow}{4}}{a_n} = \underset{\overset{\uparrow}{4}}{a_{n-1}} - \underset{\overset{\uparrow}{4}}{a_{n-2}} \quad \Rightarrow \quad a_3 = a_{4-1} - a_{4-2} = \overset{b-a}{a_3} - \overset{b}{a_2} =$$

$$= \cancel{b} - a \cancel{-b} = -a$$

$$\text{peti clan niza: } n = 5 \quad \Rightarrow \quad \underset{\overset{\uparrow}{5}}{a_n} = \underset{\overset{\uparrow}{5}}{a_{n-1}} - \underset{\overset{\uparrow}{5}}{a_{n-2}} \quad \Rightarrow \quad a_5 = a_{5-1} - a_{5-2} = \overset{-a}{a_4} - \overset{b-a}{a_3} =$$

$$= -a - (b - a) = \cancel{-a} - b + \cancel{a} = -b$$

$$\text{sesti clan niza: } n = 6 \quad \Rightarrow \quad \underset{\overset{\uparrow}{6}}{a_n} = \underset{\overset{\uparrow}{6}}{a_{n-1}} - \underset{\overset{\uparrow}{6}}{a_{n-2}} \quad \Rightarrow \quad a_6 = a_{6-1} - a_{6-2} = \overset{-b}{a_5} - \overset{-a}{a_4} =$$

$$= -b - (-a) = -b + a$$

$$\text{sedmi clan niza: } n = 7 \quad \Rightarrow \quad \underset{\overset{\uparrow}{7}}{a_n} = \underset{\overset{\uparrow}{7}}{a_{n-1}} - \underset{\overset{\uparrow}{7}}{a_{n-2}} \quad \Rightarrow \quad a_7 = a_{7-1} - a_{7-2} = \overset{-b+a}{a_6} - \overset{-b}{a_5} =$$

$$= -b + a - (-b) = \cancel{-b} + a + \cancel{b} = a$$

$$\text{osmi clan niza: } n = 8 \quad \Rightarrow \quad \underset{\overset{\uparrow}{8}}{a_n} = \underset{\overset{\uparrow}{8}}{a_{n-1}} - \underset{\overset{\uparrow}{8}}{a_{n-2}} \quad \Rightarrow \quad a_8 = a_{8-1} - a_{8-2} = \overset{a}{a_7} - \overset{-b+a}{a_6} =$$

$$= a - (-b + a) = \cancel{a} + b + \cancel{-a} = b$$

Dakle vidimo da se clanovi niza pocinju ponavljati nakon svakih sest clanova niza, odnosno vrijedi:

$$a_n = \begin{cases} a\ ; & \text{ako broj } n \text{ pri dijeljenju sa 6 daje ostatak 1} \\ b\ ; & \text{ako broj } n \text{ pri dijeljenju sa 6 daje ostatak 2} \\ b - a\ ; & \text{ako broj } n \text{ pri dijeljenju sa 6 daje ostatak 3} \\ -a\ ; & \text{ako broj } n \text{ pri dijeljenju sa 6 daje ostatak 4} \\ -b\ ; & \text{ako broj } n \text{ pri dijeljenju sa 6 daje ostatak 5} \\ -b + a\ ; & \text{ako broj } n \text{ pri dijeljenju sa 6 daje ostatak 0} \end{cases}$$

Probajmo zbrojiti prvih sest clanova niza, slijedi:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = a + b + b - a + (-a) + (-b) + (-b + a) =$$

$$= a + b + b - a - a - b - b + a = (\star)$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$(\star) = \cancel{a} + \cancel{b} + \cancel{b} - \cancel{a} - \cancel{a} - \cancel{b} - \cancel{b} + \cancel{a} = 0$$

Dakle suma prvih sest clanova niza jednaka je 0, no kako se clanovi niza ponavljaju svakih sest clanova, tada je i suma svakih sljedecih sest clanova niza jedanaka 0.

Nas zadatak je odrediti sumu prvih 66 clanova danog niza. Nas zadatak je odrediti koliko se skupina od po 6 uzastopnih clanova niza nalazi unutar prvih 66 clanova niza. To cemo uciniti tako da podijelimo 66 sa 6. Posto je rezultat 11, znaci da se nalazi 11 skupina po 6 uzastopnih clanova niza koji u sumi daju 0 no zbrojimo li 11 puta 0 sa samom sobom opet cemo dobiti nulu, dakle vrijedi:

$$\sum_{k=1}^{66} a_k = 0$$

Time je zadatak rijesen!

<u>Zadatak 28</u>: (str. 84) Odredi prva tri clana niza a, b, c, 1, 0, 1, 1, 2, ..., ako je svaki clan niza jednak zbroju dvaju prethodnih clanova.

<u>Rjesenje</u>: Citajuci zadatak mozemo zakljuciti da se niz moze zapisati sljedecom rekurzivnom relacijom:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ za } n > 2$$

pri cemu je $a_1 = a$ i $a_2 = b$. Zapisimo treci, cetvrti i peti clan niza preko rekurzivne relacije, dakle vrijedi:

treci clan niza: $n = 3 \quad \Rightarrow \quad \underset{\overset{\uparrow}{3}}{a_n} = \underset{\overset{\uparrow}{3}}{a_{n-1}} + \underset{\overset{\uparrow}{3}}{a_{n-2}} \quad \Rightarrow \quad \overset{c}{\overset{\downarrow}{a_3}} = a_{3-1} + a_{3-2} = \overset{b}{\overset{\searrow}{a_2}} + \overset{a}{\overset{\swarrow}{a_1}}$

$$\Rightarrow \quad c = b + a$$

cetvrti clan niza: $n = 4 \quad \Rightarrow \quad \underset{\overset{\uparrow}{4}}{a_n} = \underset{\overset{\uparrow}{4}}{a_{n-1}} + \underset{\overset{\uparrow}{4}}{a_{n-2}} \quad \Rightarrow \quad \overset{1}{\overset{\downarrow}{a_4}} = a_{4-1} + a_{4-2} = \overset{c}{\overset{\searrow}{a_3}} + \overset{b}{\overset{\swarrow}{a_2}}$

$$\Rightarrow \quad 1 = c + b$$

peti clan niza: $n = 5 \quad \Rightarrow \quad \underset{\substack{\uparrow \\ 5}}{a_n} = \underset{\substack{\uparrow \\ 5}}{a_{n-1}} + \underset{\substack{\uparrow \\ 5}}{a_{n-2}} \quad \Rightarrow \quad \overset{\substack{0 \\ \downarrow}}{a_5} = a_{5-1} + a_{5-2} = \overset{\substack{1 \\ \searrow}}{a_4} + \overset{\substack{c \\ \swarrow}}{a_3}$

$$\Rightarrow \quad 0 = 1 + c$$

Time smo dobili sljedeci sustav jednadzbi:

$$\begin{cases} c = b + a \\ 1 = c + b \\ 0 = 1 + c \end{cases}$$

Iz posljednje jednadzbe slijedi:

$$0 = 1 + c \quad \Rightarrow \quad -1 = c$$

Usredotocimo se dalje na drugu jednadzbu. Primjenimo cinjenicu da vrijedi $c = -1$, slijedi:

$$1 = \overset{\substack{-1 \\ \downarrow}}{c} + b \quad \Rightarrow \quad 1 = -1 + b$$

Prebacimo prvi clan sume na desnoj strani na lijevu stranu, slijedi:

$$1 = -1 + b$$

$$1 + 1 = b$$

$$2 = b$$

Naposlijetku pozabavimo se posljednjom jednadzbom. Primjenjujemo cinjenice da vrijedi $b = 2$ i $c = -1$, slijedi:

$$\overset{\substack{-1 \\ \downarrow}}{c} = \overset{\substack{2 \\ \downarrow}}{b} + a \quad \Rightarrow \quad -1 = 2 + a$$

Prebacimo prvi clan sume na desnoj strani na lijevu stranu, slijedi:

$$-1 = 2 + a$$

$$-1 - 2 = a$$

$$-3 = b$$

Dakle trazeni niz je oblika:

$$-3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, ...$$

Time je zadatak rijesen.

Zadatak 31: (str. 84) Dokazi: ako je $a_1 = 1$ i $a_n = 2a_{n-1} + 3$, $n \geq 2$, tada je opci clan tog niza $a_n = 2^{n+1} - 3$.

Rjesenje: Za pocetak pogledajmo kako izgleda $n-1$-vi clan niza. To cemo uciniti tako da uvrstimo $n-1$ u opci clan, slijedi:

$$\underset{\substack{\uparrow\\ n-1}}{a_n} = 2^{\overset{\substack{n-1\\ \downarrow}}{n}+1} - 3 \quad \Rightarrow \quad a_{n-1} = 2^{n-1+1} - 3$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$a_{n-1} = 2^{n\cancel{-1}+\cancel{1}} - 3$$

$$a_{n-1} = 2^n - 3$$

Uvrstimo n-ti i $(n-1)$-vi clan niza u rekurzivnu relaciju, slijedi:

$$\overset{\substack{2^{n+1}-3\\ \downarrow}}{a_n} = 2\underset{\substack{\uparrow\\ 2^n-3}}{a_{n-1}} + 3 \quad \Rightarrow \quad 2^{n+1} - 3 = 2 \cdot (2^n - 3) + 3$$

Rijesimo se zagrade na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$2^{n+1} - 3 = 2 \cdot 2^n + 2 \cdot (-3) + 3$$

$$2^{n+1} - 3 = 2 \cdot 2^n - 6 + 3$$

$$2^{n+1} - 3 = 2 \cdot 2^n - 3$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$2^{n+1}\cancel{-3} = 2 \cdot 2^n\cancel{-3}$$

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$$

Pomnozimo izraz na desnoj strani jednakosti prema izrazu za mnozenje potencija istih baza, odnosno prema $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, slijedi:

$$2^{n+1} = \underbrace{2^1 \cdot 2^n}_{\substack{\downarrow\\ 2^{1+n}}}$$

$$2^{n+1} = 2^{n+1}$$

Kako je desna strana jednkosti jednaka lijevoj, odnosno opci clan zadovoljava rekurzivnu relaciju tvrdnja je dokazana. Time je zadatak rijesen.