Gaussova ravnina

Definicija: Za kompleksan broj z definiramo modul kompleksnog broja sljedecim izrazom:

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$$

Ako je kompleksan broj oblika $z = x + yi$ izraz poprima sljedeci oblik:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Nadalje svakom kompleksnom broju mozemo pridruziti sljedeci uredjeni par:

$$z \mapsto (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$$

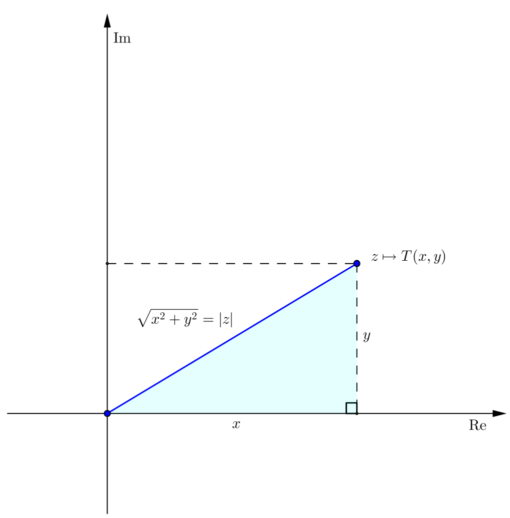
Sto znaci da ako je kompleksan broj oblika $z = x + yi$ vrijedi:

$$z \mapsto (x, y)$$

Uredjeni par brojeva je prirodno poistovjetiti s tockom cije su to koordinate sto nadalje znaci da smo ovim preslikavanjem zapravo kompleksnom broju pridruzili tocku, odnosno:

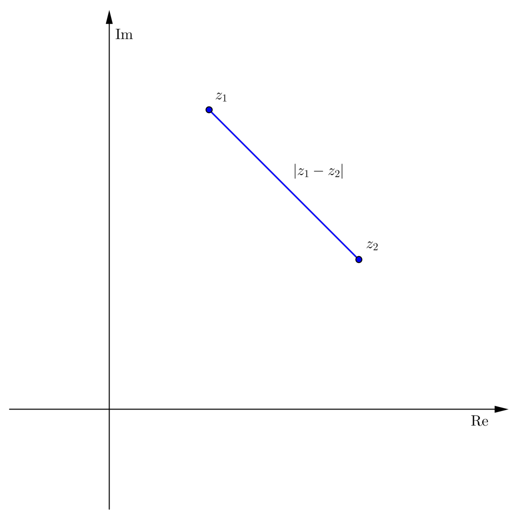
$$z \mapsto T\,(x, y)$$

Ravnina u kojoj takve tocke prikazujemo nazivamo Gaussova ravnina.
Promotrimo sljedecu sliku:



Promatrajuci danu sliku mozemo zakljuciti da modul kompleksnog broja geometrjski gledano zapravo predstavlja udaljenost kompleksnog broja od ishodista koodinatnog sustava.

Pokusamo li sada odredtiti cemu je jednako $|z_1 - z_2||$ zakljucit cemo da je to upravo udaljenost tocaka koje su pridruzene kompleksnim brojevima z_1 i z_2 kako je ilustrirano sljedecom slikom:



Zadatak 17: (str. 26) Odredi skup tocka u kompleksnoj ravnini sto je odredjen uvjetom:

$$|z - 2 + i| > 3$$

Rjesenje: Za pocetak zapisat cemo dani izraz na malo drugaciji nacin, odnosno izlucit cemo $-$ iz druga dva clana sume na lijevoj strani nejednakosti, slijedi:

$$|z - (2 - i)| > 3$$

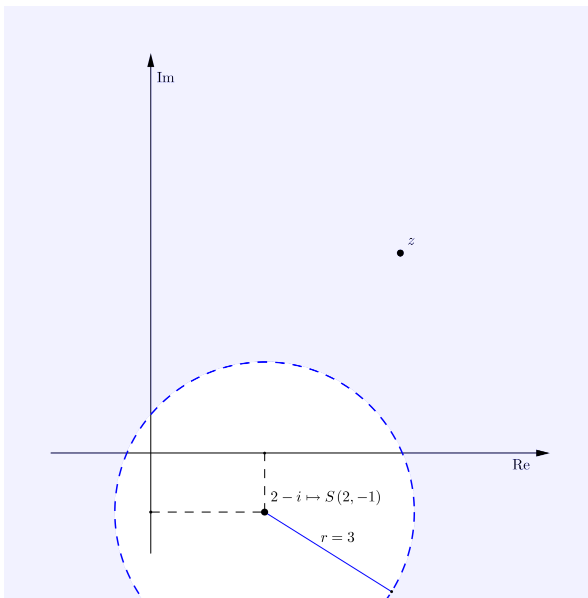
Sada taj izraz malo vise podsjeca na $|z_1 - z_2|$ koji predstavlja udaljenost kompleksnih brojeva z_1 i z_2.
Dakle ono sto dani izraz zapravo predstavlja jesu svi kompleksni brojevi z koji su od kompleksnog broja $2 - i$ udaljeni za vise od 3. Drugim rijecima to su sve one tocke koje se nalaze izvan kruznice cije je srediste kompleksan broj $2 - i$, a radijusa $r = 3$.

$$|z-(\underbrace{2-i}_{\text{srediste kruznice}})| > \overset{\text{radijus kruznice}}{3}$$

Kompleksnom broju $2-i$ pridruzimo tocku koja je srediste kruznice, slijedi:

$$2-i \mapsto S\,(\overset{\mathrm{Re}\,(2-i)}{2}, \overset{\mathrm{Im}\,(2-i)}{-1})$$

Dakle trebamo nacrtati kruznicu cije je srediste tocka $S\,(2,-1)$ radijusa $r=3$. Rjesenje zadatka jest sljedeci skup tocaka (oznacen plavom bojom):



Primjetimo jos samo da tocke koje se nalaze na kruznici nisu dio trazenog skupa tocaka. Time je zadatak rjesen!

Zadatak 19: (str. 26) Prikazi u kompleksnoj ravnini skup svih tocaka z za koje je $|z| \geq 1$ i $|z+2| \leq 2$.

Rjesenje: Za pocetak zapisat cemo prvu nejednakost na drugaciji nacin, odnosno oduzet cemo 0 izrazu koji se nalazi u zagradama na lijevoj strani nejednakosti, slijedi:

$$|z-(0)| > 1$$

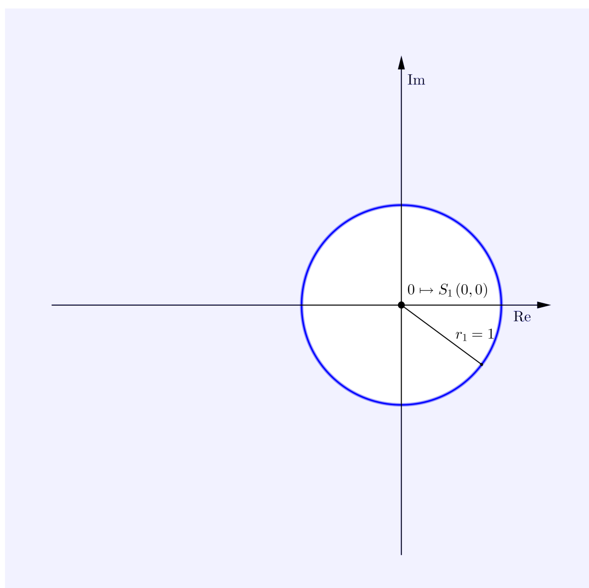
Sada taj izraz malo vise podsjeca na $|z_1 - z_2|$ koji predstavlja udaljenost kompleksnih brojeva z_1 i z_2.
Dakle ono sto dani izraz zapravo predstavlja jesu svi kompleksni brojevi z koji su od kompleksnog broja 0 udaljeni za vise ili jednako 1. Drugim rijecima to su sve one tocke koje se nalaze izvan kruznice cije je srediste kompleksan broj 0, a radijusa $r_1 = 1$.

$$|z - \underset{\text{srediste kruznice}}{\underset{\downarrow}{(0)}}| > \overset{\text{radijus kruznice}}{\overset{\nearrow}{1}}$$

Kompleksnom broju 0 pridruzimo tocku koja je srediste kruznice, slijedi:

$$0 \mapsto S_1\,(\overset{\mathrm{Re}\,(0)}{\overset{\nwarrow}{0}}, \overset{\mathrm{Im}\,(0)}{\overset{\nearrow}{0}})$$

Dakle trebamo nacrtati kruznicu cije je srediste tocka $S_1\,(0,0)$ radijusa $r_1 = 1$. Skup tocaka (oznacen plavom bojom) koji je odredjen prvim izrazom izgleda ovako:



Primjetimo jos samo da tocke koje se nalaze na kruznici jedu dio trazenog skupa tocaka.

Nadalje pogledajmo drugi izraz. I njega cemo ucrtati u istom koordinatnom sustavu. Za pocetak zapisat cemo tu nejednakost na drugaciji nacin, odnosno izlucit cemo $-$ iz drugog clana sume na lijevoj strani nejednakosti, slijedi:

$$|z - (-2)| \leq 2$$

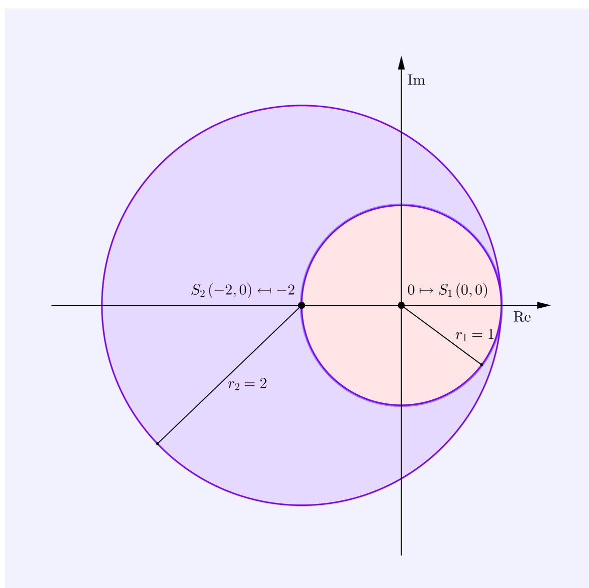
Sada taj izraz malo vise podsjeca na $|z_1 - z_2|$ koji predstavlja udaljenost kompleksnih brojeva z_1 i z_2.
Dakle ono sto dani izraz zapravo predstavlja jesu svi kompleksni brojevi z koji su od kompleksnog broja -2 udaljeni za manje ili jednako 2. Drugim rijecima to su sve one tocke koje se nalaze unutar kruznice cije je srediste kompleksan broj -2, a radijusa $r_2 = 2$.

$$|z - \underset{\substack{\downarrow \\ \text{srediste kruznice}}}{(-2)}| \leq \overset{\substack{\text{radijus kruznice} \\ \nearrow}}{2}$$

Kompleksnom broju -2 pridruzimo tocku koja je srediste kruznice, slijedi:

$$\begin{array}{c} \mathrm{Re}\,(-2) \quad \mathrm{Im}\,(-2) \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ 0 \mapsto S_2\,(-2, 0) \end{array}$$

Dakle trebamo nacrtati kruznicu cije je srediste tocka $S_2\,(-2, 0)$ radijusa $r_2 = 2$. Skup tocaka (oznacen crvenim bojom) koji je odredjen drugim izrazom izgleda ovako:



Konacno rjesenje zadatka jest onaj dio ravnine koji je iscrtan s obje boje (ljubicasto), jer oba uvjeta moraju vrijediti. Time je zadatak rjesen!