Rijeseni neki zadaci iz poglavlja 5.1 (Dio treci)

Prije rijesavanja zadataka prisjetimo se bitnih stvari koje ce nas pratiti tijekom njihovog promatranja.

Tvrdnja: (Osnovni trigonometrijski identiteti)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Tvrdnja: (Adicijski teoremi)

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

$$\operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x}$$

Tvrdnja: Formule redukcije

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos t \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin t$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$$

$$\sin(\pi + t) = -\sin t \qquad \cos(\pi + t) = -\cos t$$

$$\sin(\pi - t) = \sin t \qquad \cos(\pi - t) = -\cos t$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = -\cos t \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = \sin t$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\cos t \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\sin t$$

Tvrdnja: (Trigonometrijske funkcije dvostrukog kuta)

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x}$$

Tvrdnja: Sinus i kosinus polovicnog kuta:

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

Tvrdnja: (Transformacija umnoska u zbroj)

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]$$

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) - \sin(x-y)\right]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$$

Tvrdnja: (Transformacija zbroja u umnozak)

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

Prisjetim se jos vrijednosti trigonometrijskih funkcija za istaknute kuteve:

Kut	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} x$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nedef.	0	nedef.	0
$\operatorname{ctg} x$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	nedef.	0	nedef.

Zadatak 15: (str. 119) 3) Rijesi sljedecu jednadzbu:

$$\sin 5x = \sin 2x \cos 3x$$

Rjesenje: Dakle pogledamo li danu trigonometrijsku jednadzbu mozemo uociti da ona sadrzi i razlicite trigonometrijske funkcije i razlicite argumente sto nije bas dobar znak. No prisjetimo se da postoji nesto sto se formule pretvorbe umnoska u zbroj, tocnije da vrijedi sljedeci identitet:

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin\left(x+y\right) + \sin\left(x-y\right)\right]$$

Taj identitet nam daje ideju da probamo desnu stranu jednadzbe iz umnoska pretvoriti u zbroj te na taj nacin dobiti vise jednakih trigonometrijskih funkcija i/ili argumenata. Racunam:

$$\sin 5x = \sin 2x \cos 3x$$

$$\sin 5x = \frac{1}{2}\left[\sin\left(2x+3x\right) + \sin\left(2x-3x\right)\right]$$

$$\sin 5x = \frac{1}{2}\left[\sin 5x + \sin\left(-x\right)\right]$$

Izmnozim cijelu jednadzbu s 2:

$$\sin 5x = \frac{1}{2}\left[\sin 5x + \sin\left(-x\right)\right] \ / \cdot 2$$

$$\sin 5x \cdot 2 = \frac{1}{{}_1\cancel{2}}\left[\sin 5x + \sin\left(-x\right)\right] \cdot \cancel{2}^1$$

$$2\sin 5x = \sin 5x + \sin\left(-x\right)$$

"Prebacimo" $\sin 5x$ s desne na lijevu stranu:

$$2\sin 5x - \sin 5x = \sin\left(-x\right)$$

$$\sin 5x = \sin\left(-x\right)$$

Ovo je jednadzba koja spada pod one koje se svode na osnovne.

Napomena: Ova jednadzba je tipa:

$$\sin t_1 = \sin t_2, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

Njezina rjesenja dobe se na nacin da se rijese sljedece dvije linearne jednadzbe:

$$t_1 = t_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$t_1 = \pi - t_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Imajuci na umu gornju napomenu argument s lijeve strane $5x$ oznacim s t_1, dok argument s desne strane $-x$ oznacim s t_2:

$$\sin \underbrace{5x}_{t_1} = \sin \underbrace{(-x)}_{t_2}$$

$$\sin t_1 = \sin t_2$$

Prema napomeni tada su rjesenja dana s:

$$t_1 = t_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$t_1 = \pi - t_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Vratim natrag umjesto t_1 izraz $5x$, te umjesto t_2 izraz $-x$. Usredotocim se za pocetak na prvu jednadzbu:

$$\underbrace{t_1}_{5x} = \underbrace{t_2}_{-x} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$5x = -x + 2k\pi$$

"Prebacim" $-x$ na drugu stranu, slijedi:

$$5x + x = 2k\pi$$

$$6x = 2k\pi$$

Podijelim cijelu jednadzbu s 6:

$$6x = 2k\pi \ / : 6$$

$$\frac{6x}{6} = \frac{2k\pi}{6}$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$\frac{{}^1\cancel{6}x}{\cancel{6}_1} = \frac{{}^1\cancel{2}k\pi}{\cancel{6}_3}$$

$$x = \frac{k\pi}{3}$$

Dakle rjesenje prve jednadzbe jest $x_1 = \dfrac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$. Rijesimo sada jos drugu jednadzbu:

$$\underbrace{t_1}_{5x} = \pi - \underbrace{t_2}_{-x} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$5x = \pi - (-x) + 2k\pi$$

$$5x = \pi + x + 2k\pi$$

"Prebacim" x na drugu stranu, slijedi:

$$5x - x = \pi + 2k\pi$$

$$4x = \pi + 2k\pi$$

Podijelim cijelu jednadzbu s 4:

$$4x = \pi + 2k\pi \ / : 4$$

$$\frac{4x}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$\frac{{}^1\cancel{4}x}{\cancel{4}_1} = \frac{\pi}{4} + \frac{{}^1\cancel{2}k\pi}{\cancel{4}_2}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

Dakle rjesenje druge jednadzbe jest $x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
Pocetna trigonometrijska jednadzba ima ukupno dva rjesenja i to $x_1 = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ i $x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Zadatak 16: (str. 119) 3) Rijesi sljedecu jednadzbu:

$$2\sin x + 9\cos x = 7$$

Napomena: Ovo je linearna trigonometrijska jednadzba koja se rijesava uz pomoc univerzalne zamjene. Naime vrijedi:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

Uvodjenjem supstitucije $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ jednadzba se svodi na algebarsku.

Rjesenje: Dakle imajuci na umu napomenu zamijenit cemo $\sin x$ s $\dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}$ te $\cos x$ s $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}$. Dakle dana jednadzba poprima sljedeci oblik:

$$2\frac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}+9\frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}=7$$

Uvedem supstituciju $k=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ pa jednadzba prelazi u algebarsku:

$$2\frac{2k}{1+k^2}+9\frac{1-k^2}{1+k^2}=7$$

Pomnozim cijelu jednadzbu s $1+k^2$. Problem se moze javiti ako je $1+k^2$ jednako 0 no to je nemoguce jer je k^2 uvijek pozitivan, ako pozitivnom broju dodamo 1 on ce sigurno biti veci od 0. Racunam:

$$2\frac{2k}{1+k^2}+9\frac{1-k^2}{1+k^2}=7\ /\cdot\left(1+k^2\right)$$

$$2\frac{2k}{{}_1\cancel{1+k^2}}\cdot\frac{\cancel{1+k^2}^1}{1}+9\frac{1-k^2}{{}_1\cancel{1+k^2}}\cdot\frac{\cancel{1+k^2}^1}{1}=7\left(1+k^2\right)$$

$$2\cdot 2k+9\left(1-k^2\right)=7\left(1+k^2\right)$$

Rijesimo se zagrada:

$$4k+9-9k^2=7+7k^2$$

"Prebacimo" sve na desnu stranu kako bi dobili pozitivan vodeci koeficijent kod kvadratne jednadzbe:

$$0=7+7k^2+9k^2-9-kt$$

Sredimo dobiveni izraz:

$$0=16k^2-4k-2$$

Zamijenimo starne jednakosti kako bi jednadzba poprimila standardni oblik:

$$16k^2-4k-2=0$$

Izraz po kojem izracunavam rjesenja kvadratnih jednadzbi jest:

$$k_1,k_2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Nadalje ispisem koeficijente dane kvadratne jednadbe:

$$a=16$$

$$b = -4$$

$$c = -2$$

Uvrstim ispisane koeficijente u gornji izraz te racunam:

$$k_1, k_2 = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 16 \cdot (-2)}}{2 \cdot 16}$$

$$k_1, k_2 = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 128}}{32}$$

$$k_1, k_2 = \frac{4 \pm \sqrt{144}}{32}$$

$$k_1, k_2 = \frac{4 \pm 12}{32}$$

Dakle jedno rijesenje dane kvadratne jednadzbe jest:

$$k_1 = \frac{4 - 12}{32} = \frac{{}^{-1}\cancel{-8}}{\cancel{32}_4} = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$$

Dok je drugo rijesenje dane kvadratne jednadzbe:

$$k_2 = \frac{4 + 12}{32} = \frac{{}^{1}\cancel{16}}{\cancel{32}_2} = \frac{1}{2}$$

I time smo rijesili nasu jednadzbu s time da smo dobili dva rjesenja i to:

$$k_1 = -\frac{1}{4}$$

$$k_2 = \frac{1}{2}$$

No da bih dobio konacno rjesenje pocetne jednadzbe moram jos vratiti supstituciju. Vrijedi:

$$k = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

Na taj nacin dobijem dvije osnovne trigonometrijske jednadzbe:

$$-\frac{1}{4} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

Usredotocimo se za pocetak na prvu od dvije trigonometrijske jednadzbe:

$$-\frac{1}{4} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

Zamijenim lijevu i desnu stranu jednadzbe da poprimi standardni oblik:

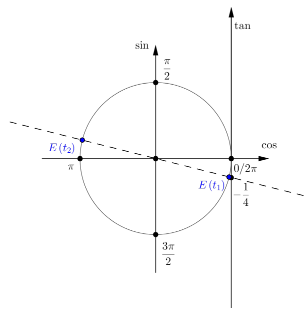
$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -\frac{1}{4}$$

Uvodim supstituciju $t = \dfrac{x}{2}$:

$$\operatorname{tg}\underbrace{\frac{x}{2}}_{t} = -\frac{1}{4}$$

$$\operatorname{tg} t = -\frac{1}{4}$$

Nas glavni zadatak postaje odrediti za koje je kuteve t vrijednost funkcije tg jednaka $-\dfrac{1}{4}$. U tu svrhu pogledajmo sljedecu sliku:

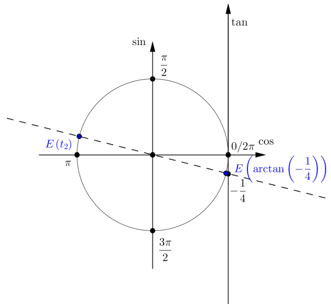


Dakle tangense citamo na pravcu okomitom na os x kroz tocku $(0, 1)$ na osi x. Ucrtamo tocku $-\dfrac{1}{4}$ na tom pravcu tako da se pomaknemo za $\dfrac{1}{4}$ prema dolje od osi x na tom pravcu. Povucemo prvac kroz ucrtanu tocku na tom pravcu te kroz ishodiste. Zatim pogledamo sjeciste tog pravca i brojevne kruznice, to su tocke $E(t_1)$ i $E(t_2)$.
Kako po definciiji tangensa znamo da je to upravo y koordinata tocke na pravcu okomitom na os x kroz tocku $(0, 1)$ na osi x dobivene kao sjeciste pravca koji prolazi ishodistem i tockom pridruzenom broju t_1, odnosno t_2, vidimo da ce tocke dobivene kao sjeciste pravca kroz ishodiste i tocke pridruzene brojevima t_1 i t_2 i pravca okomitog na os x kroz tocku $(0, 1)$ na osi x imati y koordinate jednake $-\dfrac{1}{4}$, odnosno tangensi brojeva t_1 i t_2 bit ce jednaki upravo $-\dfrac{1}{4}$.
Dakle zadatak nam je otkiriti koji su to brojevi. Promotrimo li tablicu na dnu prve stranice dokumenta, mozemo uociti da se u njoj ne nalazi $-\dfrac{1}{4}$ u retku u kojem su ispisane vrijednosti tangensa, niti bilo kakav slican broj. U takvim slucajevima kada je vrijednost funkcije tangens razlicita od bilo koje vrijednosti u tablici te vrijednosti suprotne onoj u tablici (broj iz tablice s negativnim predznakom) kazemo da je rjesenje jednadzbe na intervalu $[0, 2\pi]$ jednako:

$$t_1 = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{4}\right)$$

<u>Napomena</u>: Napominjem da je dovoljno odrediti samo t_1 zbog prirode trigonometrijske funkcije tangens!

To je ilustrirano na sljedecoj slici:



No kako znamo da je tangens trigonometrijska funkcija cije se vrijednosti ponavljaju nakon svakih π, sva rjesenja dobivene jednadzbe su zapravo:

$$t_1 = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Vratimo supstituciju $t = \dfrac{x}{2}$:

$$\frac{x_1}{2} = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi$$

Pomnozim izraz s 2:

$$\frac{x_1}{2} = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi \ / \cdot 2$$

$$\frac{x_1}{{}_1\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}^1}{1} = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 2 + k\pi \cdot 2$$

$$x_1 = 2\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{4}\right) + 2k\pi$$

Dakle rjesenje prve jednadzbe jest $x_1 = 2\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{4}\right) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
Nadalje promotrimo drugu trigonometrijsku jednadzbu:

$$\frac{1}{2} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

Zamijenim lijevu i desnu stranu jednadzbe da poprimi standardni oblik:

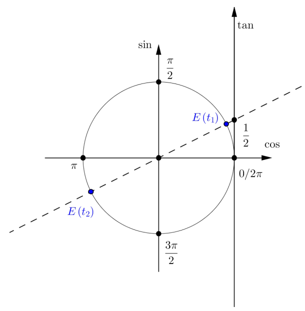
$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

Uvodim supstituciju $t = \frac{x}{2}$:

$$\operatorname{tg} \underbrace{\frac{x}{2}}_{t} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} t = \frac{1}{2}$$

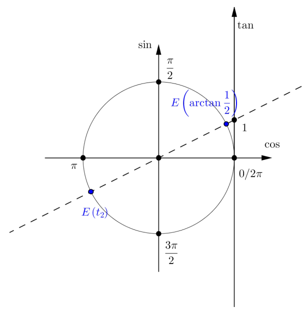
Nas glavni zadatak postaje odrediti za koje je kuteve t vrijednost funkcije tg jednaka $\frac{1}{2}$. U tu svrhu pogledajmo sljedecu sliku:



Dakle tangense citamo na pravcu okomitom na os x kroz tocku $(0, 1)$ na osi x. Ucrtamo tocku $\frac{1}{2}$ na tom pravcu tako da se pomaknemo za $\frac{1}{2}$ prema gore od osi x na tom pravcu. Povucemo prvac kroz ucrtanu tocku na tom pravcu te kroz ishodiste. Zatim pogledamo sjeciste tog pravca i brojevne kruznice, to su tocke $E(t_1)$ i $E(t_2)$.
Kako po defínciiji tangensa znamo da je to upravo y koordinata tocke na pravcu okomitom na os x kroz tocku $(0, 1)$ na osi x dobivene kao sjeciste pravca koji prolazi ishodistem i tockom pridruzenom broju t_1, odnosno t_2, vidimo da ce tocke dobivene kao sjeciste pravca kroz ishodiste i tocke pridruzene brojevima t_1 i t_2 i pravca okomitog na os x kroz tocku $(0, 1)$ na osi x imati y koordinate jednake $\frac{1}{2}$, odnosno tangensi brojeva t_1 i t_2 bit ce jednaki upravo $\frac{1}{2}$.
Dakle zadatak nam je otkiriti koji su to brojevi. Promotrimo li tablicu na dnu prve stranice dokumenta, mozemo uociti da se u njoj ne nalazi $\frac{1}{2}$ u retku u kojem su ispisane vrijednosti tangensa, niti bilo kakav slican broj. U takvim slucajevima kada je vrijednost funkcije tangens razlicita od bilo koje vrijednosti u tablici te vrijednosti suprotne onoj u tablici (broj iz tablice s negativnim predznakom) kazemo da je rjesenje jednadzbe na intervalu $[0, 2\pi]$ jednako:

$$t_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$$

To je ilustrirano na sljedecoj slici:



Napomena: Napominjem da je dovoljno odrediti samo t_1 zbog prirode trigonometrijske funkcije tangens!

No kako znamo da je tangens trigonometrijska funkcija cije se vrijednosti ponavljaju nakon svakih π, sva rjesenja dobivene jednadzbe su zapravo:

$$t_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Vratimo supstituciju $t = \dfrac{x}{2}$:

$$\frac{x_2}{2} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + k\pi$$

Pomnozim izraz s 2:

$$\frac{x_2}{2} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + k\pi \ / \cdot 2$$

$$\frac{x_2}{{}_1\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}^1}{1} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} \cdot 2 + k\pi \cdot 2$$

$$x_2 = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 2k\pi$$

Dakle rjesenje druge jednadzbe jest $x_2 = 2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
Pocetna trigonometrijska jednadzba ima ukupno dva rjesenja i to
$x_1 = 2\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{4}\right) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ i $x_2 = 2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Zadatak 18: (str. 119) 3) Rijesi sljedecu jednadzbu:

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 - \cos 2x$$

Rjesenje: Za pocetak raspisemo lijevu stranu po identitetu za kvadrat binoma $\overline{(a+b)^2} = a^2 + 2ab + b^2$. Slijedi:

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 1 - \cos 2x$$

Prisjetimo se da vrijedi osnovni trigonometrijski identitet $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Imajuci to na umu jednadzba poprima sljedeci oblik:

$$\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} + 2\sin x\cos x = 1 - \cos 2x$$

$$1 + 2\sin x\cos x = 1 - \cos 2x$$

Pokratimo sto se pokratiti dade:

$$\cancel{1} + 2\sin x\cos x = \cancel{1} - \cos 2x$$

Prisjetimo se da vrijedi identitet za kosinus dvostrukog kuta, odnosno $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$. Primjenim li to na jednadzbu ona poprima sljedeci oblik:

$$2\sin x\cos x = -\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)$$

"Prebacim" $-\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)$ na lijevu stranu, slijedi:

$$2\sin x\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = 0$$

Sredim malo poredak sumanada u dobivenoj trigonometrijskoj jednadzbi:

$$-\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$$

Promotrim li sto sam dobio mogu zakljuciti da je zapravo dobivena homogena trigonometrijska jednadzba koju cemo rijesiti tako da za pocetak cijelu jednadzbu podijelimo s $\cos^2 x$, slijedi:

$$-\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 0 \;/ : \cos^2 x$$

$$\frac{-\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$\frac{-\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{2\sin x\cancel{\cos x}^{1}}{{}_{\cos x}\cancel{\cos^2 x}} + \frac{\cancel{\cos^2 x}^{1}}{{}_{1}\cancel{\cos^2 x}} = 0$$

$$-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 2\frac{\sin x}{\cos x} + 1 = 0$$

Prema identitetu $\frac{a^b}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ sredim prvi clan sume, pri tome imam na umu da za trigonometrijsku funkciju tangensa vrijedi identitet $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Racunam:

$$-\underbrace{\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2}_{\operatorname{tg}^2 x} + 2\underbrace{\frac{\sin x}{\cos x}}_{\operatorname{tg} x} + 1 = 0$$

$$-\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x + 1 = 0$$

Uvedemo li supstituciju $k = \operatorname{tg} x$ jednadzba prelazi u algebarsku, tocnije kvadratnu jednadzbu:

$$-k^2 + 2k + 1 = 0$$

Izraz po kojem izracunavam rjesenja kvadratnih jednadzbi jest:

$$k_1, k_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nadalje ispisem koeficijente dane kvadratne jednadbe:

$$a = -1$$

$$b = 2$$

$$c = 1$$

Uvrstim ispisane koeficijente u gornji izraz te racunam:

$$k_1, k_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1}}{2 \cdot (-1)}$$

$$k_1, k_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{-2}$$

$$k_1, k_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{-2}$$

$$k_1, k_2 = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{-2}$$

$$k_1, k_2 = \frac{2\left(-1 \pm \sqrt{2}\right)}{-2}$$

Dakle jedno rijesenje dane kvadratne jednadzbe jest:

$$k_1 = \frac{2\left(-1 - \sqrt{2}\right)}{-2}$$

$$k_1 = \frac{{}^{1}\cancel{2}\left(-1 - \sqrt{2}\right)}{\cancel{-2}_{-1}}$$

$$k_1 = \frac{-1 - \sqrt{2}}{-1}$$

$$k_1 = 1 + \sqrt{2}$$

Dok je drugo rijesenje dane kvadratne jednadzbe:

$$k_2 = \frac{2\left(-1 + \sqrt{2}\right)}{-2}$$

$$k_2 = \frac{{}^1\cancel{2}\left(-1+\sqrt{2}\right)}{\cancel{-2}_{-1}}$$

$$k_2 = \frac{-1+\sqrt{2}}{-1}$$

$$k_2 = 1-\sqrt{2}$$

I time smo rijesili nasu jednadzbu s time da smo dobili dva rjesenja i to:

$$k_1 = 1+\sqrt{2}$$

$$k_2 = 1-\sqrt{2}$$

No da bih dobio konacno rjesenje pocetne jednadzbe moram jos vratiti supstituciju. Vrijedi:

$$k = \operatorname{tg} x$$

Na taj nacin dobijem dvije osnovne trigonometrijske jednadzbe:

$$1+\sqrt{2} = \operatorname{tg} x$$

$$1-\sqrt{2} = \operatorname{tg} x$$

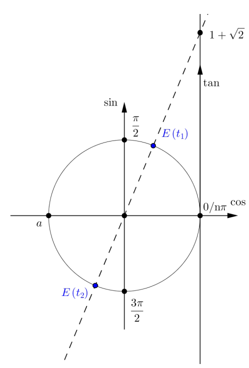
Usredotocimo se za pocetak na prvu od dvije trigonometrijske jednadzbe:

$$1+\sqrt{2} = \operatorname{tg} x$$

Zamijenim lijevu i desnu stranu jednadzbe da poprimi standardni oblik:

$$\operatorname{tg} x = 1+\sqrt{2}$$

Nas glavni zadatak postaje odrediti za koje je kuteve t vrijednost funkcije tg jednaka $1+\sqrt{2}$. U tu svrhu pogledajmo sljedecu sliku:

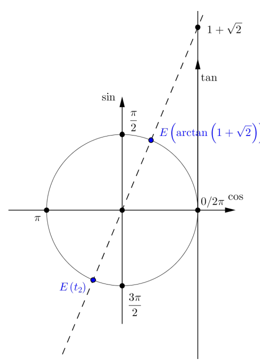


Dakle tangense citamo na pravcu okomitom na os x kroz tocku $(0,1)$ na osi x. Ucrtamo tocku $1+\sqrt{2}$ na tom pravcu tako da se pomaknemo za $1+\sqrt{2}$ prema gore od osi x na tom pravcu. Povucemo prvac kroz ucrtanu tocku na tom pravcu te kroz ishodiste. Zatim pogledamo sjeciste tog pravca i brojevne kruznice, to

su tocke $E(t_1)$ i $E(t_2)$.
Kako po definciiji tangensa znamo da je to upravo y koordinata tocke na pravcu okomitom na os x kroz tocku $(0,1)$ na osi x dobivene kao sjeciste pravca koji prolazi ishodistem i tockom pridruzenom broju t_1, odnosno t_2, vidimo da ce tocke dobivene kao sjeciste pravca kroz ishodiste i tocke pridruzene brojevima t_1 i t_2 i pravca okomitog na os x kroz tocku $(0,1)$ na osi x imati y koordinate jednake $1+\sqrt{2}$, odnosno tangensi brojeva t_1 i t_2 bit ce jednaki upravo $1+\sqrt{2}$. Dakle zadatak nam je otkiriti koji su to brojevi. Promotrimo li tablicu na dnu prve stranice dokumenta, mozemo uociti da se u njoj ne nalazi $1+\sqrt{2}$ u retku u kojem su ispisane vrijednosti tangensa, niti bilo kakav slican broj. U takvim slucajevima kada je vrjednost funkcije tangens razlicita od bilo koje vrijednosti u tablici te vrijednosti suprotne onoj u tablici (broj iz tablice s negativnim predznakom) kazemo da je rjesenje jednadzbe na intervalu $[0,2\pi]$ jednako:

$$t_1 = \operatorname{arctg}\left(1+\sqrt{2}\right)$$

To je ilustrirano na sljedecoj slici:



Napomena: Napominjem da je dovoljno odrediti samo t_1 zbog prirode trigonometrijske funkcije tangens!

No kako znamo da je tangens trigonometrijska funkcija cije se vrijednosti ponavljaju nakon svakih π, sva rjesenja dobivene jednadzbe su zapravo:

$$x_1 = \operatorname{arctg}\left(1+\sqrt{2}\right) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

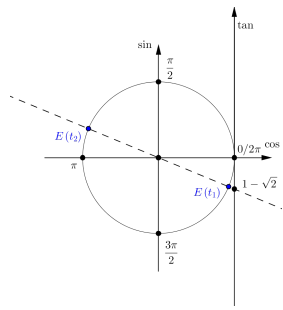
Nadalje rijesimo drugu trigonometrijsku jednadzbu:

$$1-\sqrt{2} = \operatorname{tg} x$$

Zamijenim lijevu i desnu stranu jednadzbe da poprimi standardni oblik:

$$\operatorname{tg} x = 1-\sqrt{2}$$

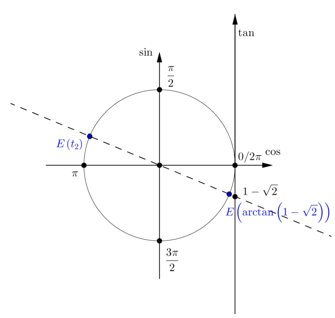
Nas glavni zadatak postaje odrediti za koje je kuteve t vrijednost funkcije tg jednaka $1-\sqrt{2}$. U tu svrhu pogledajmo sljedecu sliku:



Dakle tangense citamo na pravcu okomitom na os x kroz tocku $(0,1)$ na osi x. Ucrtamo tocku $1-\sqrt{2}$ na tom pravcu tako da se pomaknemo za $|1-\sqrt{2}|$ prema dolje od osi x na tom pravcu. Povucemo prvac kroz ucrtanu tocku na tom pravcu te kroz ishodiste. Zatim pogledamo sjeciste tog pravca i brojevne kruznice, to su tocke $E(t_1)$ i $E(t_2)$.
Kako po defínciiji tangensa znamo da je to upravo y koordinata tocke na pravcu okomitom na os x kroz tocku $(0,1)$ na osi x dobivene kao sjeciste pravca koji prolazi ishodistem i tockom pridruzenom broju t_1, odnosno t_2, vidimo da ce tocke dobivene kao sjeciste pravca kroz ishodiste i tocke pridruzene brojevima t_1 i t_2 i pravca okomitog na os x kroz tocku $(0,1)$ na osi x imati y koordinate jednake $1-\sqrt{2}$, odnosno tangensi brojeva t_1 i t_2 bit ce jednaki upravo $1-\sqrt{2}$.
Dakle zadatak nam je otkiriti koji su to brojevi. Promotrimo li tablicu na dnu prve stranice dokumenta, mozemo uociti da se u njoj ne nalazi $1-\sqrt{2}$ u retku u kojem su ispisane vrijednosti tangensa, niti bilo kakav slican broj. U takvim slucajevima kada je vrijednost funkcije tangens razlicita od bilo koje vrijednosti u tablici te vrijednosti suprotne onoj u tablici (broj iz tablice s negativnim predznakom) kazemo da je rjesenje jednadzbe na intervalu $[0,2\pi]$ jednako:

$$t_1 = \text{arctg}\left(1-\sqrt{2}\right)$$

To je ilustrirano na sljedecoj slici:



Napomena: Napominjem da je dovoljno odrediti samo t_1 zbog prirode trigonometrijske funkcije tangens!

No kako znamo da je tangens trigonometrijska funkcija cije se vrijednosti ponavljaju nakon svakih π, sva rjesenja dobivene jednadzbe su zapravo:

$$x_2 = \operatorname{arctg}\left(1-\sqrt{2}\right) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Pocetna trigonometrijska jednadzba ima ukupno dva rjesenja i to
$x_1 = \operatorname{arctg}\left(1+\sqrt{2}\right) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ i $x_2 = \operatorname{arctg}\left(1-\sqrt{2}\right) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

◈

Zadatak 19: (str. 119) 4) Rijesi sljedecu jednadzbu:

$$\cos^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2} = \sin 2x$$

Rjesenje: Izraz na lijevoj strani rastavim po identitetu za razliku kvadrata
$a^3 - b^2 = (a-b)(a+b)$, slijedi:

$$\cos^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2} = \sin 2x$$

$$\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right)\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right) = \sin 2x$$

Prisjetimo se da vrijedi temeljni trigonometrijski identitet, tocnije
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. U nasem slucaju to znaci da vrijedi $\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} = 1$.
Primjenim li tu cinjenicu na jednadzbu ona poprima sljedeci oblik:

$$\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right)\underbrace{\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right)}_{1} = \sin 2x$$

$$\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \sin 2x$$

Nadalje prisjetimo se da vrijedi identitet za kosinus dvostrukog kuta, odnosno
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, u nasem slucaju to znaci da vrijedi
$\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = \cos x$. Slijedi:

$$\underbrace{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}_{\cos x} = \sin 2x$$

$$\cos x = \sin 2x$$

Umjesto da ovu jednadzbu rijesimo rastavljanjem na faktore pokusajmo je rijesiti na malo alternativniji i mozebitno brzi nacin. Ideja jest svesto ovu jednadzbu na oblik $\sin(ax+b) = \sin(cx+d) \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Postavlja se pitanje kako to postici, no odgovor je ociti. Svaki puta kada smo htjeli mijenjati vrstu trigonometrijske funkcije u trigonometrijskoj jednadzbi koristili smo formule redukcije, pa cemo to uciniti i ovaj put. Prisjetim se da vrijedi:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

Primjenim li to na dobivenu trigonometrijsku jednadzbu ona poprima sljedeci oblik:

$$\underbrace{\cos x}_{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \sin 2x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin 2x$$

Ovo je jednadzba koja spada pod one koje se svode na osnovne.

<u>Napomena</u>: Ova jednadzba je tipa:

$$\sin t_1 = \sin t_2, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

Njezina rjesenja dobe se na nacin da se rijese sljedece dvije linearne jednadzbe:

$$t_1 = t_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$t_1 = \pi - t_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Imajuci na umu gornju napomenu argument s lijeve strane $\frac{\pi}{2} - x$ oznacim s t_1, dok argument s desne strane $2x$ oznacim s t_2:

$$\sin\underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}_{t_1} = \sin\underbrace{(2x)}_{t_2}$$

$$\sin t_1 = \sin t_2$$

Prema napomeni tada su rjesenja dana s:

$$t_1 = t_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$t_1 = \pi - t_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Vratim natrag umjesto t_1 izraz $\frac{\pi}{2} - x$, te umjesto t_2 izraz $2x$. Usredotocim se za pocetak na prvu jednadzbu:

$$\underbrace{t_1}_{\frac{\pi}{2}-x} = \underbrace{t_2}_{2x} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{2} - x = 2x + 2k\pi$$

"Prebacim" $2x$ s desne na lijevu stranu kao i $\frac{\pi}{2}$ s lijeve na desnu stranu, slijedi:

$$-x - 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$-3x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Podijelim cijelu jednadzbu s -3:

$$-3x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \; / : (-3)$$

$$\frac{-3x}{-3} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{\frac{-3}{1}} + \frac{2k\pi}{-3}$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$\frac{{}^{1}\cancel{-3}x}{\cancel{-3}_{1}} = \frac{\cancel{-}\frac{\pi}{2}}{\frac{\cancel{-}3}{1}} - \frac{2k\pi}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{6} - \frac{2k\pi}{3}$$

Dakle rjesenje prve jednadzbe jest $x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Napomena: Promjena predznaka ispred $\frac{2k\pi}{3}$ nije greska, to se smije uciniti!

Rijesimo sada jos drugu jednadzbu:

$$\underbrace{t_1}_{\frac{\pi}{2}-x} = \pi - \underbrace{t_2}_{2x} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{2} - x = \pi - 2x + 2k\pi$$

$$5x = \pi + x + 2k\pi$$

"Prebacim" $2x$ s desne na lijevu stranu kao i $\frac{\pi}{2}$ s lijeve na desnu stranu, slijedi:

$$-x + 2x = \pi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Svedem sumu na desnoj strani na zajednicki nazivnik 2 kako bih je zbrojio:

$$x = \pi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{2\pi - \pi}{2} + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Dakle rjesenje druge jednadzbe jest $x_2 = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Pocetna trigonometrijska jednadzba ima ukupno dva rjesenja i to
$x_1 = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ i $x_2 = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Zadatak 20: (str. 119) 2) Rijesi sljedecu jednadzbu:

$$\cos 5x \cos x = \cos 6x \cos 2x$$

Rjesenje: Dakle da bih rijesio ovu jednadzbu prisjetim se da postoje formule pretvorbe umnoska u sumu, kao recimo:

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$$

Primjenim li tu formulu na lijevu i desnu stranu dane jednadzbe onda prelazi u sljedeci oblik:

$$\frac{1}{2}\left[\cos(5x+x) + \cos(5x-x)\right] = \frac{1}{2}\left[\cos(6x+2x) + \cos(6x-2x)\right]$$

$$\frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 4x) = \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 4x)$$

Pomnozim cijelu jednadzbu s 2:

$$\frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 4x) = \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 4x) \;\; / \cdot 2$$

$$\frac{1}{{}_1\cancel{2}}(\cos 6x + \cos 4x) \cdot \frac{\cancel{2}^1}{1} = \frac{1}{{}_1\cancel{2}}(\cos 8x + \cos 4x) \cdot \frac{\cancel{2}^1}{1}$$

$$\cos 6x + \cos 4x = \cos 8x + \cos 4x$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$\cos 6x + \cancel{\cos 4x} = \cos 8x + \cancel{\cos 4x}$$

$$\cos 6x = \cos 8x$$

Ovo je jednadzba koja spada pod one koje se svode na osnovne.

<u>Napomena</u>: Ova jednadzba je tipa:

$$\cos t_1 = \cos t_2, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

Njezina rjesenja dobe se na nacin da se rijese sljedece dvije linearne jednadzbe:

$$t_1 = t_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$t_1 = -t_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Imajuci na umu gornju napomenu argument s lijeve strane $6x$ oznacim s t_1, dok argument s desne strane $8x$ oznacim s t_2:

$$\cos \underbrace{6x}_{t_1} = \cos \underbrace{(8x)}_{t_2}$$

$$\sin t_1 = \sin t_2$$

Prema napomeni tada su rjesenja dana s:

$$t_1 = t_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$t_1 = -t_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Vratim natrag umjesto t_1 izraz $6x$, te umjesto t_2 izraz $2x$. Usredotocim se za pocetak na prvu jednadzbu:

$$\underbrace{t_1}_{6x} = \underbrace{t_2}_{8x} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$6x = 8x + 2k\pi$$

"Prebacim" $8x$ s desne na lijevu stranu, slijedi:

$$6x - 8x = 2k\pi$$

$$-2x = 2k\pi$$

Podijelim cijelu jednadzbu s -2:

$$-2x = 2k\pi \ / : (-2)$$

$$\frac{-2x}{-2} = \frac{2k\pi}{-2}$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$\frac{{}^{1}\cancel{-2}x}{\cancel{-2}_{1}} = \frac{{}^{1}\cancel{2}k\pi}{\cancel{-2}_{-1}}$$

$$x = \frac{k\pi}{-1}$$

$$x = -k\pi$$

Dakle rjesenje prve jednadzbe jest $x_1 = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Napomena: Promjena predznaka ispred $k\pi$ nije greska, to se smije uciniti!

Rijesimo sada jos drugu jednadzbu:

$$\underbrace{t_1}_{6x} = \pi - \underbrace{t_2}_{8x} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$6x = -(8x) + 2k\pi$$

$$6x = -8x + 2k\pi$$

"Prebacim" $-8x$ s desne na lijevu stranu, slijedi:

$$6x + 8x = 2k\pi$$

$$14x = 2k\pi$$

Podijelim cijelu jednadzbu s 14:

$$14x = 2k\pi \ / : 14$$

$$\frac{14x}{14} = \frac{2k\pi}{14}$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$\frac{{}^{1}\cancel{14}x}{\cancel{14}_{1}} = \frac{{}^{1}\cancel{2}k\pi}{\cancel{14}_{7}}$$

$$x = \frac{k\pi}{7}$$

Dakle rjesenje druge jednadzbe jest $x_2 = \dfrac{k\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}$.
Pocetna trigonometrijska jednadzba ima ukupno dva rjesenja i to
$x_1 = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ i $x_2 = \dfrac{k\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}$.

I za kraj jedan zadatak samo i iskljucivo u svrhu demonstracije!

[$\star\star$] Zadatak 22: (str. 119) 2) Rijesi sustav jednadzbi:

$$\begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = \dfrac{7}{4} \\ x - y = \dfrac{5\pi}{6} \end{cases}$$

Rjesenje: Dakle ovaj sustav pokusat cemo rijesiti na isti nacin kao i obican sustav dvije linearne jednadzbe s dvije nepoznanice. To znaci da prvo preko druge jednadzbe y prikazem pomocu x. Racunam:

$$\begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = \dfrac{7}{4} \\ x - y = \dfrac{5\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad y = x - \dfrac{5\pi}{6} \end{cases}$$

Uvrstim taj izraz u prvu jednadzbu:

$$\cos^2 x + \cos^2 \left(x - \frac{5\pi}{6} \right) = \frac{7}{4}$$

Prisjetim se adicijskog teorema za kosinus:

$$\cos (x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

Primjenim ga na drugi sumand u jedandzbi, slijedi:

$$\cos^2 x + \left[\cos \left(x - \frac{5\pi}{6} \right) \right]^2 = \frac{7}{4}$$

$$\cos^2 x + \left[\cos x \cdot \cos \frac{5\pi}{6} + \sin x \cdot \sin \frac{5\pi}{6} \right]^2 = \frac{7}{4}$$

Prisjetim se da vrijedi $\sin \dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$ te $\cos \dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Imajuci to na umu racunam dalje:

$$\cos^2 x + \left[\cos x \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \sin x \cdot \frac{1}{2} \right]^2 = \frac{7}{4}$$

Primjenim identite za racunanje kvadrata binoma $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, slijedi:

$$\cos^2 x + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right)^2 + 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right) \cdot \frac{1}{2} \sin x + \left(\frac{1}{2} \sin x \right)^2 = \frac{7}{4}$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$\cos^2 x + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \cos^2 x + \frac{{}^{1}\cancel{2}}{1} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{1}{\cancel{2}_1} \sin x \cos x + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 x = \frac{7}{4}$$

$$\cos^2 x + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \cos x + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 x = \frac{7}{4}$$

$$\cos^2 x + \frac{3}{4} \cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{4} \sin^2 x = \frac{7}{4}$$

Svedem prva dva clana sume na lijevoj strani na zajednicki nazivnik 4 kako bi ih zbrojio:

$$\frac{4}{4}\cos^2 x + \frac{3}{4}\cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{4}\sin^2 x = \frac{7}{4}$$

$$\frac{7}{4}\cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{4}\sin^2 x = \frac{7}{4}$$

Prisjetim se da $\frac{7}{4}$ mogu prikazati kao $\frac{7}{4} \cdot 1$, slijedi:

$$\frac{7}{4}\cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{4}\sin^2 x = \frac{7}{4} \cdot 1$$

Nadalje prisjetim se da vrijedi temeljni trigonometrijski identitet $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Broj 1 na desnoj strani jednadzbe sada zamijenim s $\sin^2 x + \cos^2 x$. Jedandzba prelazi u sljedeci oblik:

$$\frac{7}{4}\cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{4}\sin^2 x = \frac{7}{4} \cdot \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$$

$$\frac{7}{4}\cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{4}\sin^2 x = \frac{7}{4}\sin^2 x + \frac{7}{4}\cos^2 x$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$\cancel{\frac{7}{4}\cos^2} x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{4}\sin^2 x = \frac{7}{4}\sin^2 x + \cancel{\frac{7}{4}\cos^2} x$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{4}\sin^2 x = \frac{7}{4}\sin^2 x$$

"Prebacim" $\frac{7}{4}\sin^2 x$ s desne na lijevu stranu jednadzbe:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{4}\sin^2 x - \frac{7}{4}\sin^2 x = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x \cos x - \frac{6}{4}\sin^2 x = 0$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x \cos x - \frac{{}^{3}\cancel{6}}{\cancel{4}_{2}}\sin^2 x = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x \cos x - \frac{3}{2}\sin^2 x = 0$$

Cijelu jednadzbu pomknozim s 2:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x \cos x - \frac{3}{2}\sin^2 x = 0 \;/ \cdot 2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{_1\cancel{2}}\sin x\cos x\cdot\frac{\cancel{2}^1}{1}-\frac{3}{_1\cancel{2}}\sin^2 x\cdot\frac{\cancel{2}^1}{1}=0$$
$$\sqrt{3}\sin x\cos x-3\sin^2 x=0$$

Nadalje ovdje je kljucno primjetiti da 3 mogu prikazati kao $\left(\sqrt{3}\right)^2$. Imajuci to na umu racunam dalje:

$$\sqrt{3}\sin x\cos x-\left(\sqrt{3}\right)^2\sin^2 x=0$$

Sredim drugi izraz po sljedecem identitetu $a^n\cdot b^n=(ab)^n$. Dakel vrijedi:

$$\sqrt{3}\sin x\cos x-\left(\sqrt{3}\sin x\right)^2=0$$

Izlucim $\sqrt{3}\sin x$:

$$\sqrt{3}\sin x\left(\cos x-\sqrt{3}\sin x\right)=0$$

Sada znam da ako je umnozak neka dva broja jednak 0, tada je ili prvi od ta dva broja jednak 0 ili je onaj drugi jednak 0. Primjenim li tu cinjenicu u nasem slucaju mora vrijediti:

$$\sqrt{3}\sin x=0 \ \text{ ili } \ \cos x-\sqrt{3}\sin x=0$$

Dakle sredimo li te dvije trigonometrijske jednadzbe dobijemo:

$$\sqrt{3}\sin x=0\ /:\sqrt{3} \ \text{ ili } \ \cos x-\sqrt{3}\sin x=0$$
$$^1\cancel{\sqrt{3}}\sin x\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{3}}_1}=0 \ \text{ ili } \ \cos x-\sqrt{3}\sin x=0$$
$$\sin x=0 \ \text{ ili } \ \cos x-\sqrt{3}\sin x=0$$

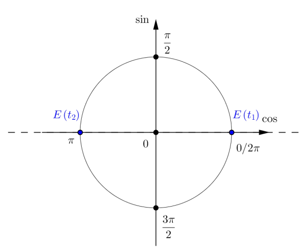
I time smo dobili dvije nove trigonometrijske jednadzbe koje lako rijesavamo:

$$\sin x=0$$
$$\cos x-\sqrt{3}\sin x=0$$

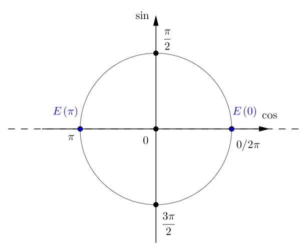
Za pocetak rijesavam prvu trigonometrijsku jednadzbu:

$$\sin t=0$$

Glavni zadatak postaje odrediti za koje je kuteve t vrijednost funkcije sin jednaka 0. U tu svrhu pogledajmo sljedecu sliku:



Dakle sinuse citamo na osi y, kako se 0 nalazi tocno u ishodistu ucrtamo tocku tocno u ishodistu koordinatnog sustava. Povucemo okomicu na os y kroz tu tocku. Zatim pogledamo sjeciste tog pravca i brojevne kruznice, to su tocke $E(t_1)$ i $E(t_2)$.
Kako po definciiji sinusa znamo da je to upravo y koordinata tocke na brojevnoj kruznici pridruzene nekom broju, vidimo da ce tocke pridruzene brojevima t_1 i t_2 imati y koordinate jednake 0, odnosno sinusi brojeva t_1 i t_2 bit ce jednaki upravo 0.
Dakle zadatak nam je otkiriti koji su to brojevi. Promotrimo li sliku danu malo prije mozemo lako zakljuciti da sinusi kuteva 0 i π moraju biti jednaki 0. To znaci da ocito t_1 mora biti jednak 0, odnosno t_2 mora biti jednak π. To je ilustrirano na sljedecoj slici:



Dakle mozemo zakljuciti da su rjesenja jednadzbe na intervalu $[0, 2\pi]$ jednaka:

$$t_1 = 0$$

$$t_2 = \pi$$

No kako znamo da je sinus trigonometrijska funkcija cije se vrijednosti ponavljaju nakon svakih 2π, sva rjesenja dobivene jednadzbe su zapravo:

$$x_1 = 0 + 2k\pi = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Rijesavajuci prvu trigonometrijsku jednadzbu dobili smo dva rjesenja i to $x_1 = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ i $x_2 = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. To rjesenje mozemo skraceno pisati kao $x_1 = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Nadalje preostaje mi jos rijesiti drugu trigonometrijsku jednadzbu:

$$\cos x - \sqrt{3} \sin x = 0$$

Ovu jednadzbu rijesit cemo tako da prvo $\cos x$ s lijeve strane "prebacimo" na desnu stranu:

$$-\sqrt{3} \sin x = -\cos x$$

Najprije podijelimo cijelu jednadzbu s $-\cos x$:

$$-\sqrt{3} \sin x = -\cos x \ / : (-\cos x)$$

$$\frac{\cancel{-}\sqrt{3}\sin x}{\cancel{-}\cos x} = \frac{{}^{1}\cancel{-\cos x}}{\cancel{-\cos x}_{1}}$$
$$\sqrt{3}\frac{\sin x}{\cos x} = 1$$

Napomena: Tu se postavlja pitanje zasto smo dijelili s $\cos x$ usprkos prijasnoj napomeni da se to ne smije opcenito ciniti. Ovdje se radilo zapravo o specijalnoj jednadzbi i to homogenoj linearnoj trigonometrijskoj jednadzbi koja je opcenito oblika:

$$a\sin x + b\cos x = 0 \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Kada se pojavi jednadzba ovakovog oblika pri cemu se pojavljuje i funkcija sinus i kosinus dopusteno je dijeljenje s *cos* ili sin funkcijom. Moja preporuka jest da se dijeli s funkcijom cos.

Nadalje cijelu jednadzbu podijelim s $\sqrt{3}$:

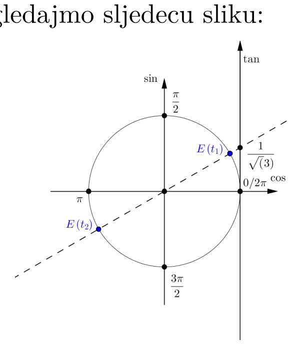
$$\sqrt{3}\frac{\sin x}{\cos x} = 1 \ / : \sqrt{3}$$
$$\frac{{}^{1}\cancel{\sqrt{3}}\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cancel{\sqrt{3}}_{1}}{1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Prisjetim se da za trigonometrijsku fukciju tangens vrijedi sljedeci identitet $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Imajuci to na umu jednadzba poprima sljedeci oblik:

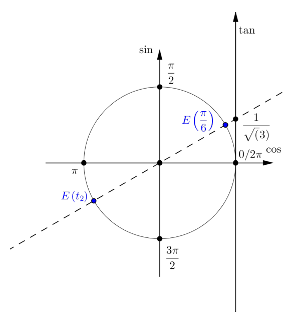
$$\underbrace{\frac{\sin x}{\cos x}}_{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Nas glavni zadatak postaje odrediti za koje je kuteve t vrijednost funkcije tg jednaka 1. U tu svrhu pogledajmo sljedecu sliku:



Dakle tangense citamo na pravcu okomitom na os x kroz tocku $(0,1)$ na osi x. Ucrtamo tocku $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ na tom pravcu tako da se pomaknemo za $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ prema gore od osi x na tom pravcu. Povucemo prvac kroz ucrtanu tocku na tom pravcu te kroz ishodiste. Zatim pogledamo sjeciste tog pravca i brojevne kruznice, to su tocke $E(t_1)$ i $E(t_2)$.
Kako po definciiji tangensa znamo da je to upravo y koordinata tocke na pravcu okomitom na os x kroz tocku $(0,1)$ na osi x dobivene kao sjeciste pravca koji prolazi ishodistem i tockom pridruzenom broju t_1, odnosno t_2, vidimo da ce tocke dobivene kao sjeciste pravca kroz ishodiste i tocke pridruzene brojevima t_1 i t_2 i pravca okomitog na os x kroz tocku $(0,1)$ na osi x imati y koordinate jednake 1, odnosno tangensi brojeva t_1 i t_2 bit ce jednaki upravo $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
Dakle zadatak nam je otkiriti koji su to brojevi. Posluzimo se tablicom na dnu prve stranice dokumenta, te iscitamo da je tangens kuta $\dfrac{\pi}{4}$ jednak $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
Dakle uocimo da tada t_1 mora biti jednak $\dfrac{\pi}{6}$. Podsjecam da zbog prirode trigonometrijske funkcije tangens ne trebamo odrediti t_2. To je ilustrirano na sljedecoj slici:



Dakle mozemo zakljuciti da je rjesenje jednadzbe na intervalu $[0, 2\pi]$ jednako:

$$t_1 = \frac{\pi}{6}$$

Napomena: Napominjem da je dovoljno odrediti samo t_1 zbog prirode trigonometrijske funkcije tangens!

No kako znamo da je tangens trigonometrijska funkcija cije se vrijednosti ponavljaju nakon svakih π, sva rjesenja prve jednadzbe su zapravo:

$$t_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Rijesavajuci drugu trigonometrijsku jednadzbu dobili smo jedno rjesenje i to $x_2 = \dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Dakle pocetna trigonometrijska jednadzba ima ukupno dva rjesenja i to $x_1 = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ i $x_2 = \dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Preostaje jos odrediti cemu su onda jednaki y. No kako znamo da smo iz druge jednadzbe y izrazili pomocu x sljedecim izrazom:

$$y = x - \frac{5\pi}{6}$$

Sada lako mozemo odrediti cemu y moraju biti jednaki. Racunam:

$$y_1 = x_1 - \frac{5\pi}{6} \ \text{ ili } \ y_2 = x_2 - \frac{5\pi}{6}$$

Uvrstim $k\pi$ umjesto x_1 i $\dfrac{\pi}{6} + k\pi$ umjesto x_2. Slijedi:

$$y_1 = k\pi - \frac{5\pi}{6} \ \text{ ili } \ y_2 = \frac{\pi}{6} + k\pi - \frac{5\pi}{6}$$

$$y_1 = -\frac{5\pi}{6} + k\pi \ \text{ ili } \ y_2 = \frac{^{-2}\cancel{-4}\pi}{\cancel{6}_3} + k\pi$$

$$y_1 = -\frac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \ \text{ ili } \ y_2 = \frac{-2\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Dakle sustav jednadzbi ima dva kao rijesenje sljedeca dva uredjena para:

$$(x_1, y_1) = \left(k\pi, -\frac{5\pi}{6} + k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

$$(x_2, y_2) = \left(\frac{\pi}{6} + k\pi, -\frac{2\pi}{3} + k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

Time je zadatak rijesen!