Rijeseni neki zadaci iz poglavlja 5.1 (Dio prvi)

Prije rijesavanja zadataka prisjetimo se bitnih stvari koje ce nas pratiti tijekom njihovog promatranja.

Tvrdnja: (Osnovni trigonometrijski identiteti)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Tvrdnja: (Adicijski teoremi)

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

$$\operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x}$$

Tvrdnja: Formule redukcije

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos t \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin t$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$$

$$\sin(\pi + t) = -\sin t \quad \cos(\pi + t) = -\cos t$$

$$\sin(\pi - t) = \sin t \quad \cos(\pi - t) = -\cos t$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = -\cos t \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = \sin t$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\cos t \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\sin t$$

Tvrdnja: (Trigonometrijske funkcije dvostrukog kuta)

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x}$$

Tvrdnja: Sinus i kosinus polovicnog kuta:

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

Tvrdnja: (Transformacija umnoska u zbroj)

$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}\left[\sin\left(x+y\right)+\sin\left(x-y\right)\right]$$

$$\cos x\sin y = \frac{1}{2}\left[\sin\left(x+y\right)-\sin\left(x-y\right)\right]$$

$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\left[\cos\left(x+y\right)+\cos\left(x-y\right)\right]$$

$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}\left[\cos\left(x-y\right)-\cos\left(x+y\right)\right]$$

Tvrdnja: (Transformacija zbroja u umnozak)

$$\sin x+\sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x-\sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x+\cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x-\cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

Prisjetim se jos vrijednosti trigonometrijskih funkcija za istaknute kuteve:

Kut	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nedef.	0	nedef.	0
$\mathrm{ctg}\, x$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	nedef.	0	nedef.

✎ Zadatak 1: (str. 118) 2) Rijesi sljedecu jednadzbu:

$$\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)-1=0$$

Rjesenje: Nas zadatak jest prvo probati dovesti danu trigonometrijsku jednadzbu u oblik u kojem se na lijevoj strani nalazi samo trigonometrisjka funkcija, a na desnoj neki broj. U tu svrhu "prebacimo" jedinicu na desnu stranu jednakosti:

$$\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)-1=0$$

$$\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=1$$

Nadalje podijelim jednadzbu s $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=1\ /:\sqrt{2}$$

$$\frac{{}^{1}\cancel{\sqrt{2}}\cos\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)}{\cancel{\sqrt{2}}_{1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Zatim racionaliziram desnu stranu jednadzbe mnozeci brojnik i nazivnik s $\sqrt{2}$:

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}$$

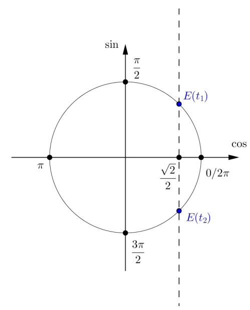
$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Uvedem supstituciju $t=2x-\frac{\pi}{5}$. Tada jednadzba prelazi u sljedeci obliik:

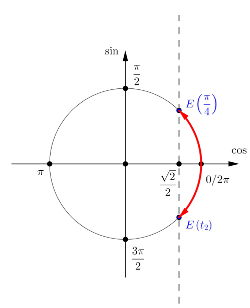
$$\cos\underbrace{\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)}_{t}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos t=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

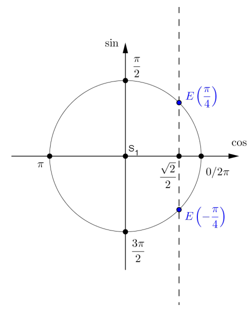
Na ovaj nacin pocetnu jednadzbu sveli smo na osnovnu, te nas glavni zadatak postaje odrediti za koje je kuteve t vrijednost funkcije cos jednak $\frac{\sqrt{2}}{2}$. U tu svrhu pogledajmo sljedecu sliku:



Dakle kosinuse citamo na osi x, kako je $\frac{\sqrt{2}}{2}$ priblizno jednako 0.71 ucrtamo tocku na osi x desno od ishodista, jer je pozitvna, na udaljenosti od priblizno 0.71. Te povucemo okomicu na os x kroz tu tocku. Zatim pogledamo sjeciste tog pravca i brojevne kruznice, to su tocke $E(t_1)$ i $E(t_2)$.
Kako po definciiji kosinusa znamo da je to upravo x koordinata tocke na brojevnoj kruznici pridruzene nekom broju, vidimo da ce tocke pridruzene brojevima t_1 i t_2 imati x koordinate jednake $\frac{\sqrt{2}}{2}$, odnosno kosinusi brojeva t_1 i t_2 bit ce jednaki upravo $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Dakle zadatak nam je otkiriti koji su to brojevi. Posluzimo se tablicom na dnu prve stranice dokumenta, te iscitamo da je kosinus kuta $\frac{\pi}{4}$ jednak $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Dakle uocimo da tada t_1 mora biti jednak $\frac{\pi}{4}$. Pitanje je cemu je onda jednak t_2? U tu svrhu promotrimo sljedecu sliku:



Promatrajuci sliku mogu uociti da sam se do tocke $E(t_2)$ pokruznici od osi x pomaknuo za istu udaljenost kao i do tocke $E(t_1)$ samo u suprotnom smjeru. Posto smo zakljucili da t_1 mora biti jednako $\frac{\pi}{4}$, tada t_2 treba biti jednako $-\frac{\pi}{4}$, jer se prema njoj pomicem u negativnom smjeru od osi x po brojevnoj kruznici. To je ilustrirano na sljedecoj slici:



Dakle mozemo zakljuciti da su rjesenja jednadzbe na intervalu $[0, 2\pi]$ jednaka:

$$t_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$t_2 = -\frac{\pi}{4}$$

No kako znamo da je kosinus trigonometrijska funkcija cije se vrijednosti ponavljaju nakon svakih 2π, sva rjesenja dobivene jednadzbe su zapravo:

$$t_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$t_2 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

No da bih dobio konacno rjesenje pocetne jednadzbe moram jos vratiti supstituciju. Vrijedi:

$$2x - \frac{\pi}{5} = t$$

Racunam:

$$2x_1 - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

"Prebacim" $\frac{\pi}{5}$ na desnu stranu:

$$2x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{5} + 2k\pi$$

Svedem sumu na desnoj strani na zajednicki nazivnik jednak 20:

$$2x_1 = \frac{5\pi + 4\pi}{20} + 2k\pi = \frac{9\pi}{20} + 2k\pi$$

Sve podijelim s 2:

$$2x_1 = \frac{9\pi}{20} + 2k\pi\ /:2$$

$$\frac{{}^1\cancel{2}x_1}{\cancel{2}_1} = \frac{\frac{9\pi}{20}}{\frac{2}{1}} + \frac{{}^1\cancel{2}k\pi}{\cancel{2}_1}$$

$$x_1 = \frac{9\pi}{40} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Nadalje racunam:

$$2x_2 - \frac{\pi}{5} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

"Prebacim" $\frac{\pi}{5}$ na desnu stranu:

$$2x_2 = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{5} + 2k\pi$$

Svedem sumu na desnoj strani na zajednicki nazivnik jednak 20:

$$2x_2 = \frac{-5\pi + 4\pi}{20} + 2k\pi = -\frac{\pi}{20} + 2k\pi$$

Sve podijelim s 2:

$$2x_2 = -\frac{\pi}{20} + 2k\pi \ / : 2$$

$$\frac{{}^{1}\cancel{2}x_2}{\cancel{2}_1} = \frac{-\frac{\pi}{20}}{\frac{2}{1}} + \frac{{}^{1}\cancel{2}k\pi}{\cancel{2}_1}$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{40} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Napomena: U knjizi su rjesenja zapisana na malo drugaciji nacin, no u sustini su ista ako probate izracunati sumu odnosno razliku danu u knjizi!

Dakle rjesenja pocetne jednadzbe su:

$$x_1 = \frac{9\pi}{40} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{40} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Zadatak 2: (str. 118) 5) Rijesi sljedecu jednadzbu:

$$\frac{1}{\sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right)} = 2$$

Rjesenje: Nas zadatak jest prvo probati dovesti danu trigonometrijsku jednadzbu u oblik u kojem se na lijevoj strani nalazi samo trigonometrisjka funkcija, a na desnoj neki broj. U tu svrhu pomnozimo cijelu jednakost s nazivnikom lijeve strane:

$$\frac{1}{\sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right)} = 2 \ / \cdot \sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\frac{{}^{1}\cancel{\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)}}{\cancel{\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)}_{1}} = 2\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$1 = 2\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)$$

Nadalje jednakost podijelimo s 2 kako bi na desnoj strani dobili samo trigonometrijsku funkciju, a na lijevoj broj:

$$1 = 2\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right) \ / : 2$$

$$\frac{1}{2} = \frac{{}^{1}\cancel{2}\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)}{\cancel{2}_{1}}$$

$$\frac{1}{2} = \sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)$$

Uvedem supstituciju $t = 4x + \frac{\pi}{6}$. Tada jednadzba prelazi u sljedeci obliik:

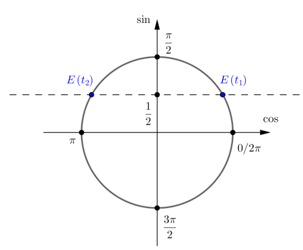
$$\frac{1}{2} = \sin\underbrace{\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)}_{t}$$

$$\frac{1}{2} = \sin t$$

Zamijenim lijevu i desnu stranu jednadzbe da poprimi standardni oblik:

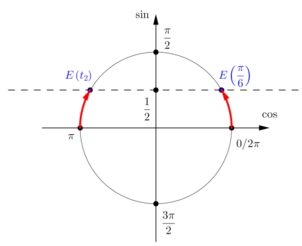
$$\sin t = \frac{1}{2}$$

Na ovaj nacin pocetnu jednadzbu sveli smo na osnovnu, te nas glavni zadatak postaje odrediti za koje je kuteve t vrijednost funkcije $\sin$ jednak $\frac{1}{2}$. U tu svrhu pogledajmo sljedecu sliku:

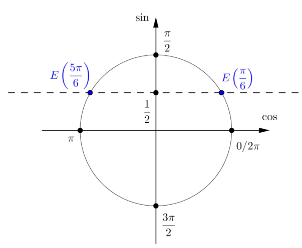


Dakle sinuse citamo na osi y, kako se $\frac{1}{2}$ nalazi na sredini izmedu ishodista i tocke $\frac{\pi}{2}$ ucrtamo tocku na osi y iznad ishodista, jer je pozitvna, na udaljenosti

od 0.5. Te povucemo okomicu na os y kroz tu tocku. Zatim pogledamo sjeciste tog pravca i brojevne kruznice, to su tocke $E(t_1)$ i $E(t_2)$.
Kako po definciiji sinusa znamo da je to upravo y koordinata tocke na brojevnoj kruznici pridruzene nekom broju, vidimo da ce tocke pridruzene brojevima t_1 i t_2 imati y koordinate jednake $\frac{1}{2}$, odnosno sinusi brojeva t_1 i t_2 bit ce jednaki upravo $\frac{1}{2}$.
Dakle zadatak nam je otkiriti koji su to brojevi. Posluzimo se tablicom na dnu prve stranice dokumenta, te iscitamo da je sinus kuta $\frac{\pi}{6}$ jednak $\frac{1}{2}$. Dakle uocimo da tada t_1 mora biti jednak $\frac{\pi}{6}$. Pitanje je cemu je onda jednak t_2? U tu svrhu promotrimo sljedecu sliku:



Promatrajuci sliku mogu uociti da sam se do tocke $E(t_2)$ po pokruznici od tocke pridruzene kutu π pomaknuo za istu udaljenost kao i do tocke $E(t_1)$ samo u suprotnom smjeru. Posto smo zakljucili da t_1 mora biti jednako $\frac{\pi}{6}$, tada t_2 treba biti jednako $\pi - \frac{\pi}{6}$, jer se prema njoj pomicem u negativnom smjeru od tocke pridruzene kutu π po brojevnoj kruznici, dakle t_2 mora biti $\frac{5\pi}{6}$. To je ilustrirano na sljedecoj slici:



Dakle mozemo zakljuciti da su rjesenja jednadzbe na intervalu $[0, 2\pi]$ jednaka:

$$t_1 = \frac{\pi}{6}$$

$$t_2 = \frac{5\pi}{6}$$

No kako znamo da je sinus trigonometrijska funkcija cije se vrijednosti ponavljaju nakon svakih 2π, sva rjesenja dobivene jednadzbe su zapravo:

$$t_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$t_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

No da bih dobio konacno rjesenje pocetne jednadzbe moram jos vratiti supstituciju. Vrijedi:

$$4x + \frac{\pi}{6} = t$$

Racunam:

$$4x_1 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$4x_1 + \cancel{\frac{\pi}{6}} = \cancel{\frac{\pi}{6}} + 2k\pi$$

$$4x_1 = 2k\pi$$

Sve podijelim s 4:

$$4x_1 = 2k\pi\ /:4$$

$$\frac{{}^1\cancel{4}x_1}{\cancel{4}_1} = \frac{{}^1\cancel{2}k\pi}{\cancel{4}_2}$$

$$x_1 = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

Nadalje racunam:

$$4x_2 + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

"Prebacim" $\frac{\pi}{6}$ na desnu stranu:

$$4x_2 = -\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

Zbrojim sumu na desnoj strani, nema potrebe svoditi na zajednicki nazivnik jer je on vec jednak:

$$4x_2 = \frac{4\pi}{6} + 2k\pi$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$4x_2 = \frac{{}^2\cancel{4}\pi}{\cancel{6}_3} + 2k\pi$$

$$4x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

Sve podijelim s 4:

$$4x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ / : 4$$

$$\frac{{}^1\cancel{4}x_2}{\cancel{4}_1} = \frac{\frac{{}^1\cancel{2}\pi}{3}}{\frac{\cancel{4}_2}{1}} + \frac{{}^1\cancel{2}k\pi}{\cancel{4}_2}$$

$$x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

Dakle rjesenja pocetne jednadzbe su:

$$x_1 = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

<u>Zadatak 5</u>: (str. 118) 5) Rijesi sljedecu jednadzbu:

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 0$$

<u>Rjesenje</u>: Promotrimo li jednadzbu mozemo uociti da ona sadrzi vise razlicitih trigonometrijskih funkcija kao i razlicite argumente unutar tih trigonometrijskih funckija, $\frac{\pi}{4} - x$ odnosno $\frac{\pi}{4} - x$. I to u nacelu stvara problem kojeg bi se trebali nekako rijesiti zelimo li rijesiti ovu trigonometrijsku jednadzbu. U ovakvim slucajevima potrebno je zapravo mudrim koristenjem formula redukcije svesti funkcije unutar jendazbe na jednake, kao i isti argument.
Pogledajmo cemu je jednak slijedeci izraz (pokusavamo dobiti nesto pogodno za formulu redukcije):

$$\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + x$$

Svedem razlomke na desnoj strani jednakosti na zajednicki nazivnik 4 kako bi ih oduzeo:

$$\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + x = \frac{2\pi - \pi}{4} + x$$

$$\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\pi}{4} + x$$

Na ovaj nacin sam zapravo povezao argumente $\frac{\pi}{4} - x$ i $\frac{\pi}{4} + x$ pogodan za koristenje kod formula redukcija, naime znam da vrijedi:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$$

Sto znaci da u nasem slucaju mora vrijediti:

$$\cos\underbrace{\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}_{\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

Na ovaj nacin pocetnu trigonometrijsku jednadzbu mozemo svesti na onu koja se sadrzavati samo izraz $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$. Sredimo dakle pocetnu trigonometrijsku: jednadzbu imajuci to na umu

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}_{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=0$$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0$$

Uvedemo supstituciju $t=\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$, pa trigonometrijska jednadzba prelazi u algebarsku:

$$t^2-t=0$$

Ovu jednadzbu rijesimo standardno rastavljanjem na faktore:

$$t\,(t-1)=0$$

Sada znam da ako je umnozak neka dva broja jednak 0, tada je ili prvi od ta dva broja jednak 0 ili je onaj drugi jednak 0. Primjenim li tu cinjenicu u nasem slucaju mora vrijediti:

$$t=0 \;\text{ ili }\; t-1=0$$

Dakle rijesimo li te dvije jednostavne linearne jednadzbe dobijemo:

$$t_1=0 \;\text{ ili }\; t_2=1$$

I time smo rijesili nasu jednadzbu s time da smo dobili dva rjesenja i to:

$$t_1=0$$

$$t_2=1$$

No da bih dobio konacno rjesenje pocetne jednadzbe moram jos vratiti supstituciju. Vrijedi:

$$t=\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

Na taj nacin dobijem dvije trigonometrijske jednadzbe:

$$0=\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

$$1 = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

Usredotocimo se za pocetak na prvu od dvije trigonometrijske jednadzbe:

$$0 = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

Uvedem supstituciju $t = \dfrac{\pi}{4} - x$. Tada jednadzba prelazi u sljedeci obliik:

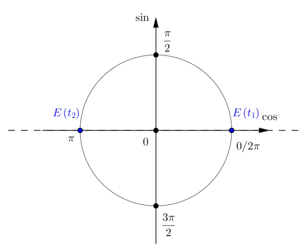
$$0 = \sin\underbrace{\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}_{t}$$

$$0 = \sin t$$

Zamijenim lijevu i desnu stranu jednadzbe da poprimi standardni oblik:

$$\sin t = 0$$

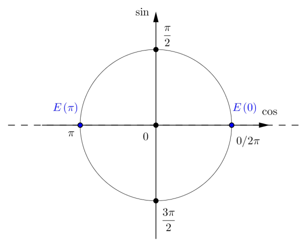
Na ovaj nacin pocetnu jednadzbu sveli smo na osnovnu, te nas glavni zadatak postaje odrediti za koje je kuteve t vrijednost funkcije $\sin$ jednaka 0. U tu svrhu pogledajmo sljedecu sliku:



Dakle sinuse citamo na osi y, kako se 0 nalazi tocno u ishodistu ucrtamo tocku tocno u ishodistu koordinatnog sustava. Povucemo okomicu na os y kroz tu tocku. Zatim pogledamo sjeciste tog pravca i brojevne kruznice, to su tocke $E(t_1)$ i $E(t_2)$.

Kako po definciiji sinusa znamo da je to upravo y koordinata tocke na brojevnoj kruznici pridruzene nekom broju, vidimo da ce tocke pridruzene brojevima t_1 i t_2 imati y koordinate jednake 0, odnosno sinusi brojeva t_1 i t_2 bit ce jednaki upravo 0.

Dakle zadatak nam je otkiriti koji su to brojevi. Promotrimo li sliku danu malo prije mozemo lako zakljuciti da sinusi kuteva 0 i π moraju biti jednaki 0. To znaci da ocito t_1 mora biti jednak 0, odnosno t_2 mora biti jednak π. To je ilustrirano na sljedecoj slici:



Dakle mozemo zakljuciti da su rjesenja jednadzbe na intervalu $[0, 2\pi]$ jednaka:

$$t_1 = 0$$

$$t_2 = \pi$$

No kako znamo da je sinus trigonometrijska funkcija cije se vrijednosti ponavljaju nakon svakih 2π, sva rjesenja dobivene jednadzbe su zapravo:

$$t_1 = 0 + 2k\pi = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$t_2 = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

No da bih dobio konacno rjesenje pocetne jednadzbe moram jos vratiti supstituciju. Vrijedi:

$$\frac{\pi}{4} - x = t$$

Za pocetak rijesavam prvu jednadzbu:

$$\underbrace{t_1}_{\frac{\pi}{4} - x_1} = 2k\pi$$

$$\frac{\pi}{4} - x_1 = 2k\pi$$

"Prebacim" $\frac{\pi}{4}$ s lijeve na desnu stranu:

$$-x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

Pomnozim cijelu jednadzbu s -1:

$$-x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \ / \cdot (-1)$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4} - 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Napomena: Dakle ovdje moram napomenuti da predznak ispred $2k\pi$ je potpuno nebitan jer broj k prolazi cijelim skupom cijelih brojeva $\mathbb{Z}$. Jedinu stvar koju predznak odredjuje jest kojim smjerom ce se ta setnja odvijati. Imajuci to na umu ja cu umjesto predznaka $-$ pisati predznak $+$. Jos jednom napominjem da se na taj nacin skup brojeva definiran danim izrazom nece promijeniti!

Prvo rjesenje cu pisati u obliku:

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Nadalje rijesavam drugu jednadzbu:

$$\underbrace{t_2}_{\frac{\pi}{4}-x_2} = \pi + 2k\pi$$

$$\frac{\pi}{4} - x_2 = \pi + 2k\pi$$

"Prebacim" $\frac{\pi}{4}$ s lijeve na desnu stranu:

$$-x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi + 2k\pi$$

Svedem sumu na desnoj strani na zajednicki nazivnik jednak 4:

$$-x_2 = \frac{-\pi + 4\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

Pomnozim cijelu jednadzbu s -1:

$$-x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \ / \cdot (-1)$$

$$x_2 = -\frac{3\pi}{4} - 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Imajuci na umu malo prije izrecenu napomenu drugo rjesenje pisati cu u obliku:

$$x_2 = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Rijesavajuci prvu trigonometrijsku jednadzbu dobili smo dva rjesenja i to $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ i $x_2 = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Nadalje preostaje mi jos rijesiti drugu trigonometrijsku jednadzbu:

$$1 = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

Uvedem supstituciju $t = \frac{\pi}{4} - x$. Tada jednadzba prelazi u sljedeci obliik:

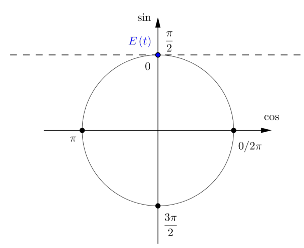
$$1 = \sin \underbrace{\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}_{t}$$

$$1 = \sin t$$

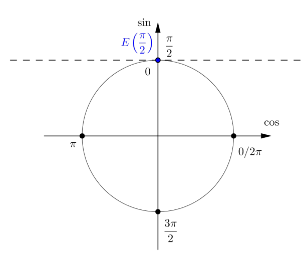
Zamijenim lijevu i desnu stranu jednadzbe da poprimi standardni oblik:

$$\sin t = 1$$

Na ovaj nacin pocetnu jednadzbu sveli smo na osnovnu, te nas glavni zadatak postaje odrediti za koje je kuteve t vrijednost funkcije $\sin$ jednaka 1. U tu svrhu pogledajmo sljedecu sliku:



Dakle sinuse citamo na osi y, kako se 1 nalazi u "najvisoj" tocki kruznice, ucrtamo tocku tocno u sjecistu pozitivnog dijela osi y i kruznice. Povucemo okomicu na os y kroz tu tocku. Zatim pogledamo sjeciste tog pravca i brojevne kruznice, to je samo jedna tocka $E(t)$.
Kako po definciiji sinusa znamo da je to upravo y koordinata tocke na brojevnoj kruznici pridruzene nekom broju, vidimo da ce tocka pridruzena broju t imati y koordinatu jednaku 1, odnosno sinus broja t bit ce jednak upravo 1.
Dakle zadatak nam je otkiriti koji je to broj. Promotrimo li sliku danu malo prije mozemo lako zakljuciti da sinus kuta $\frac{\pi}{2}$ mora biti jednak 1. To znaci da ocito t mora biti jednak $\frac{\pi}{2}$. To je ilustrirano na sljedecoj slici:



Dakle mozemo zakljuciti da je rjesenje jednadzbe na intervalu $[0, 2\pi]$ jednako:

$$t = \frac{\pi}{2}$$

No kako znamo da je sinus trigonometrijska funkcija cije se vrijednosti ponavljaju nakon svakih 2π, sva rjesenja dobivene jednadzbe su zapravo:

$$t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

No da bih dobio konacno rjesenje pocetne jednadzbe moram jos vratiti supstituciju. Vrijedi:

$$\frac{\pi}{4} - x = t$$

Racunam:

$$\underbrace{t}_{\frac{\pi}{4} - x_3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\frac{\pi}{4} - x_3 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

"Prebacim" $\frac{\pi}{4}$ s lijeve na desnu stranu:

$$-x_3 = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Svedem sumu na desnoj strani na zajednicki nazivnik jednak 4:

$$-x_3 = \frac{-\pi + 2\pi}{4} + 2k\pi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

Pomnozim cijelu jednadzbu s -1:

$$-x_3 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ / \cdot (-1)$$

$$x_3 = -\frac{\pi}{4} - 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Imajuci na umu malo prije izrecenu napomenu trece rjesenje pisati cu u obliku:

$$x_3 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Rijesavajuci drugu trigonometrijsku jednadzbu dobili smo jedno rjesenje i to $x_3 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Dakle pocetna trigonometrijska jednadzba ima ukupno tri rjesenja i to $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, $x_2 = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ i $x_3 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Zadatak 6: (str. 118) 5) Rijesi sljedecu jednadzbu:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$$

Rjesenje: Dakle ovdje cemo opet iskoristiti formule redukcije, no prije toga prisjetimo se da za trigonometrijsku funkciju kotangensa vrijedi $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, imajuci to na umu trigonometrijska jednadzba prelazi u sljedeci oblik:

$$\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)}=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$$

Prijetimo se nadalje da vrijede sljdece formule transformacije:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+t\right)=-\cos t$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+t\right)=\sin t$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)=-\sin t$$

Primjenimo to na danu trigonometrijsku jednadzbu. Slijedi:

$$\frac{\overbrace{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)}^{\sin x}}{\underbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)}_{-\cos x}}=\underbrace{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}_{-\sin x}$$

$$\frac{\sin x}{-\cos x}=-\sin x$$

Pomnozit cemo cijelu jednadzbu s $-\cos t$:

> Napomena: Ovdje se cini izrazito primamljivo podijeliti cijelu jednadzbu s $\sin x$ i rijesiti se gomile problema, no to nazalost nije dopusteno jer postoji opasnost od gubljenja rjesenja!

$$\frac{\sin x}{-\cos x}=-\sin x \;/\cdot(-\cos x)$$

$$\frac{\sin x}{{}_1\cancel{-\cos x}}\cdot\frac{\cancel{(-\cos x)}^1}{1}=-\sin x\cdot(-\cos x)$$

$$\sin x = \sin x \cos x$$

Napomena oko dijeljenja jos uvijek vrijedi, umjesto da podijelimo cijelu jednadzbu s $\sin x$, izraz na desnoj strani "prebacit" cemo na lijevu:

$$\sin x - \sin x \cos x = 0$$

Nadalje izlucimo $\sin x$ pa trigonometrijska jednadzba prelazi u sljedeci oblik:

$$\sin x\,(1 - \cos x) = 0$$

Sada znam da ako je umnozak neka dva broja jednak 0, tada je ili prvi od ta dva broja jednak 0 ili je onaj drugi jednak 0. Primjenim li tu cinjenicu u nasem slucaju mora vrijediti:

$$\sin x = 0 \;\text{ ili }\; 1 - \cos x = 0$$

Dakle sredimo li te dvije trigonometrijske jednadzbe dobijemo:

$$\sin x = 0 \;\text{ ili }\; -\cos x = -1 \;/\cdot(-1)$$

$$\sin x = 0 \;\text{ ili }\; \cos x = 1$$

I time smo dobili dvije nove osnovne trigonometrijske jednadzbe koje lako rijesavamo:

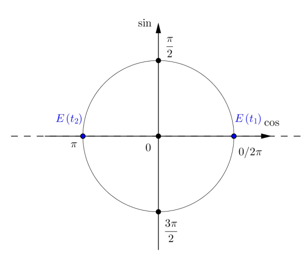
$$\sin x = 0$$

$$\cos x = 1$$

Za pocetak rijesavam prvu trigonometrijsku jednadzbu:

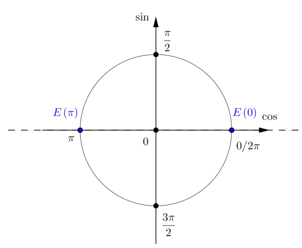
$$\sin t = 0$$

Glavni zadatak postaje odrediti za koje je kuteve t vrijednost funkcije sin jednaka 0. U tu svrhu pogledajmo sljedecu sliku:



Dakle sinuse citamo na osi y, kako se 0 nalazi tocno u ishodistu ucrtamo tocku tocno u ishodistu koordinatnog sustava. Povucemo okomicu na os y kroz tu tocku. Zatim pogledamo sjeciste tog pravca i brojevne kruznice, to su tocke $E(t_1)$ i $E(t_2)$.

Kako po definciiji sinusa znamo da je to upravo y koordinata tocke na brojevnoj kruznici pridruzene nekom broju, vidimo da ce tocke pridruzene brojevima t_1 i t_2 imati y koordinate jednake 0, odnosno sinusi brojeva t_1 i t_2 bit ce jednaki upravo 0.
Dakle zadatak nam je otkiriti koji su to brojevi. Promotrimo li sliku danu malo prije mozemo lako zakljuciti da sinusi kuteva 0 i π moraju biti jednaki 0. To znaci da ocito t_1 mora biti jednak 0, odnosno t_2 mora biti jednak π. To je ilustrirano na sljedecoj slici:



Dakle mozemo zakljuciti da su rjesenja jednadzbe na intervalu $[0, 2\pi]$ jednaka:

$$t_1 = 0$$

$$t_2 = \pi$$

No kako znamo da je sinus trigonometrijska funkcija cije se vrijednosti ponavljaju nakon svakih 2π, sva rjesenja dobivene jednadzbe su zapravo:

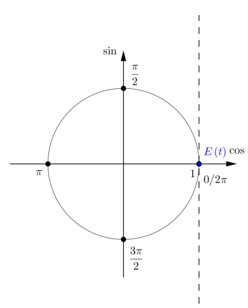
$$x_1 = 0 + 2k\pi = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

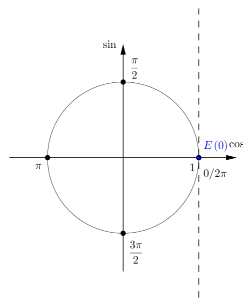
Rijesavajuci prvu trigonometrijsku jednadzbu dobili smo dva rjesenja i to $x_1 = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ i $x_2 = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Nadalje preostaje mi jos rijesiti drugu trigonometrijsku jednadzbu:

$$\cos x = 1$$

Glavni zadatak postaje odrediti za koje je kuteve t vrijednost funkcije cos jednaka 1. U tu svrhu pogledajmo sljedecu sliku:



Dakle kosinuse citamo na osi x, kako se 1 nalazi u "najdesnijoj" tocki kruznice, ucrtamo tocku tocno u sjecistu pozitivnog dijela osi x i kruznice. Povucemo okomicu na os x kroz tu tocku. Zatim pogledamo sjeciste tog pravca i brojevne kruznice, to je samo jedna tocka $E(t)$.
Kako po definciiji kosinusa znamo da je to upravo x koordinata tocke na brojevnoj kruznici pridruzene nekom broju, vidimo da ce tocka pridruzena broju t imati x koordinatu jednaku 1, odnosno kosinus broja t bit ce jednak upravo 1. Dakle zadatak nam je otkiriti koji je to broj. Promotrimo li sliku danu malo prije mozemo lako zakljuciti da sinus kuta 0 mora biti jednak 1. To znaci da ocito t mora biti jednak 0. To je ilustrirano na sljedecoj slici:



Dakle mozemo zakljuciti da je rjesenje jednadzbe na intervalu $[0, 2\pi]$ jednako:

$$t = 0$$

No kako znamo da je sinus trigonometrijska funkcija cije se vrijednosti ponavljaju nakon svakih 2π, sva rjesenja dobivene jednadzbe su zapravo:

$$x_3 = 0 + 2k\pi = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Rijesavajuci drugu trigonometrijsku jednadzbu dobili smo jedno rjesenje i to $x_3 = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Uocimo da se dva rjesenja poklapaju, dakle pocetna trigonometrijska jednadzba ima ukupno dva rjesenja i to $x_1 = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ i $x_2 = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

◈

Zadatak 8: (str. 118) 6) Rijesi sljedecu jednadzbu:

$$\operatorname{tg} x - 4 \operatorname{ctg} x = 3$$

Rjesenje: Naj prije se prisjetimo da za trigonometrijsku funkciju kotangensa vrijedi $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$, imajuci to na umu trigonometrijska jednadzba prelazi u sljedeci oblik:

$$\operatorname{tg} x - 4\frac{1}{\operatorname{tg} x} = 3$$

Cijelu jednadzbu pomnozimo s tgx. Slijedi:

$$\operatorname{tg} x - 4\frac{1}{\operatorname{tg} x} = 3 \ / \cdot \operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} x - 4\frac{1}{{}_1\cancel{\operatorname{tg} x}} \cdot \frac{\cancel{\operatorname{tg} x}^1}{1} = 3 \cdot \operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{tg}^2 x - 4 = 3 \operatorname{tg} x$$

"Prebacimo" $3 \operatorname{tg} x$ s desne na lijevu stranu:

$$\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 4 = 0$$

Uvedemo li supstituciju $k = \operatorname{tg} x$ jednadzba prelazi u algebarsku, tocnije kvadratnu jednadzbu:

$$k^2 - 3kt - 4 = 0$$

Izraz po kojem izracunavam rjesenja kvadratnih jednadzbi jest:

$$k_1, k_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nadalje ispisem koeficijente dane kvadratne jednadbe:

$$a = 1$$

$$b = -3$$

$$c = -4$$

Uvrstim ispisane koeficijente u gornji izraz te racunam:

$$k_1, k_2 = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1}$$

$$k_1, k_2 = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2}$$

$$k_1, k_2 = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$k_1, k_2 = \frac{3 \pm 5}{2}$$

Dakle jedno rijesenje dane kvadratne jednadzbe jest:

$$k_1 = \frac{3 - 5}{2} = \frac{{}^{-1}\cancel{-2}}{\cancel{2}_1} = -1$$

Dok je drugo rijesenje dane kvadratne jednadzbe:

$$k_2 = \frac{3 + 5}{2} = \frac{{}^{4}\cancel{8}}{\cancel{2}_1} = 4$$

I time smo rijesili nasu jednadzbu s time da smo dobili dva rjesenja i to:

$$k_1 = -1$$

$$k_2 = 4$$

No da bih dobio konacno rjesenje pocetne jednadzbe moram jos vratiti supstituciju. Vrijedi:

$$k = \operatorname{tg} x$$

Na taj nacin dobijem dvije osnovne trigonometrijske jednadzbe:

$$-1 = \operatorname{tg} x$$

$$4 = \operatorname{tg} x$$

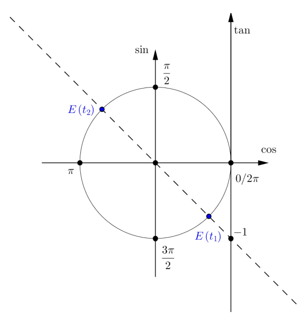
Usredotocimo se za pocetak na prvu od dvije trigonometrijske jednadzbe:

$$-1 = \operatorname{tg} x$$

Zamijenim lijevu i desnu stranu jednadzbe da poprimi standardni oblik:

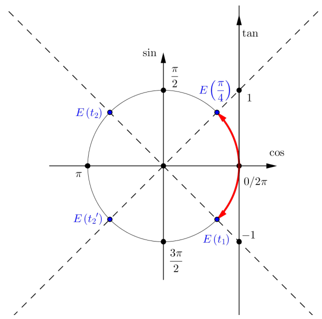
$$\operatorname{tg} x = -1$$

Nas glavni zadatak postaje odrediti za koje je kuteve t vrijednost funkcije tg jednaka -1. U tu svrhu pogledajmo sljedecu sliku:

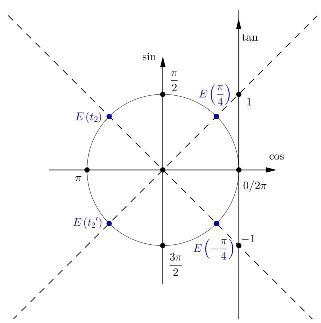


Dakle tangense citamo na pravcu okomitom na os x kroz tocku $(0, 1)$ na osi x. Ucrtamo tocku -1 na tom pravcu tako da se pomaknemo za 1 prema dole od osi x na tom pravcu. Povucemo prvac kroz ucrtanu tocku na tom pravcu te kroz ishodiste. Zatim pogledamo sjeciste tog pravca i brojevne kruznice, to su tocke $E(t_1)$ i $E(t_2)$.
Kako po definciiji tangensa znamo da je to upravo y koordinata tocke na pravcu okomitom na os x kroz tocku $(0, 1)$ na osi x dobivene kao sjeciste pravca koji prolazi ishodistem i tockom pridruzenom broju t_1, odnosno t_2, vidimo da ce tocke dobivene kao sjeciste pravca kroz ishodiste i tocke pridruzene brojevima t_1 i t_2 i pravca okomitog na os x kroz tocku $(0, 1)$ na osi x imati y koordinate jednake -1, odnosno tangensi brojeva t_1 i t_2 bit ce jednaki upravo -1.
Dakle zadatak nam je otkiriti koji su to brojevi. Promotrimo li tablicu na dnu

prve stranice dokumenta, mozemo uociti da se u njoj ne nalazi -1 u retku u kojem su ispisane vrijednosti tangensa, no postoji broj 1. Pitanje je moze li nam ta cinjenica pomoci oko odredjivanja brojeva t_1 i t_2? U tu svrhu promotrimo sljedecu sliku:



Promatrajuci sliku mogu uociti da sam se do tocke $E(t_1)$ pokruznici od osi x pomaknuo za istu udaljenost kao i do tocke $E(t_1)$ samo u suprotnom smjeru. Posto smo zakljucili da t_1 mora biti jednako $\frac{\pi}{4}$, tada t_2 treba biti jednako $-\frac{\pi}{4}$, jer se prema njoj pomicem u negativnom smjeru od osi x po brojevnoj kruznici. To je ilustrirano na sljedecoj slici:



Postavlja se jos pitanje koliko iznosi t_2. Kako se tocka $E\left(t_2\right)$ gledajuci kruznicu nalazi na dijametralno suprotnoj strani od tocke (t_1), a polukrug nase kruznice ima opseg π, broj t_2 trebao bi biti za π manji od broja t_1 ako se po kruznici krecemo suprotno od smjera kazaljke na satu, drugim rijecima vrijedi:

$$t_2 = t_1 - \pi = -\frac{\pi}{4} - \pi$$

Svedem sumu na desnoj strani na zajednicki nazivnik 4:

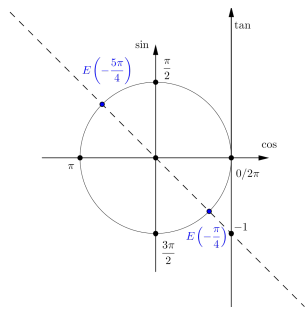
$$t_2 = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4}$$

Dakle mozemo zakljuciti da su rjesenja jednadzbe na intervalu $[0, 2\pi]$ jednaka:

$$t_1 = -\frac{\pi}{4}$$

$$t_2 = -\frac{5\pi}{4}$$

To je islustrirano na sljedecoj slici:



No kako znamo da je tangens trigonometrijska funkcija cije se vrijednosti ponavljaju nakon svakih π, sva rjesenja dobivene jednadzbe su zapravo:

$$t_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$t_2 = -\frac{5\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

No to se krace moze zapisati kao:

$$t = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

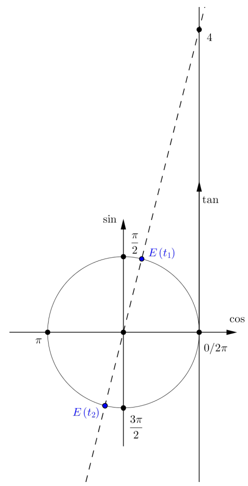
Razlog tome jest sto su te dvije tocke udaljene upravo za π jedna od druge.

> Napomena: Kod tangensa je dovoljno odrediti samo jedno temeljno rjesenje t jer tada znamo da su sva ostala rjesenja dana kao $t_{sva} = t + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Dakle u nasem slucaju nije bilo potrebno racunati t_2, pa to ubuduce ni necemo ciniti!

Dakle rjesenje prve jednadzbe jest $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Nadalje trebamo jos rijesiti drugu jednadzbu:

$$\operatorname{tg} x = 4$$

Nas glavni zadatak postaje odrediti za koje je kuteve t vrijednost funkcije tg jednaka 4. U tu svrhu pogledajmo sljedecu sliku:

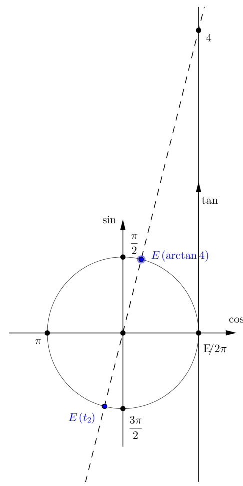


Dakle tangense citamo na pravcu okomitom na os x kroz tocku $(0,1)$ na osi x. Ucrtamo tocku 4 na tom pravcu tako da se pomaknemo za 4 prema gore od osi x na tom pravcu. Povucemo prvac kroz ucrtanu tocku na tom pravcu te kroz ishodiste. Zatim pogledamo sjeciste tog pravca i brojevne kruznice, to su tocke $E(t_1)$ i $E(t_2)$.
Kako po definciiji tangensa znamo da je to upravo y koordinata tocke na pravcu okomitom na os x kroz tocku $(0,1)$ na osi x dobivene kao sjeciste pravca koji prolazi ishodistem i tockom pridruzenom broju t_1, odnosno t_2, vidimo da ce tocke dobivene kao sjeciste pravca kroz ishodiste i tocke pridruzene brojevima t_1 i t_2 i pravca okomitog na os x kroz tocku $(0,1)$ na osi x imati y koordinate jednake 4, odnosno tangensi brojeva t_1 i t_2 bit ce jednaki upravo 4.
Dakle zadatak nam je otkiriti koji su to brojevi. Promotrimo li tablicu na dnu prve stranice dokumenta, mozemo uociti da se u njoj ne nalazi 4 u retku u kojem su ispisane vrijednosti tangensa, niti bilo kakav slican broj. U takvim slucajevima kada je vrijednost funkcije tangens razlicita od bilo koje vrijednosti u tablici te vrijednosti suprotne onoj u tablici (broj iz tablice s negativnim predznakom) kazemo da je rjesenje jednadzbe na intervalu $[0, 2\pi]$ jednako:

$$t_1 = \operatorname{arctg} 4$$

Napomena: Napominjem da je dovoljno odrediti samo t_1 zbog prirode trigonometrijske funkcije tangens!

To je ilustrirano na sljedecoj slici:



No kako znamo da je tangens trigonometrijska funkcija cije se vrijednosti ponavljaju nakon svakih π, sva rjesenja dobivene jednadzbe su zapravo:

$$t = \operatorname{arctg} 4 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Dakle rjesenje druge jednadzbe jest $x_2 = \operatorname{arctg} 4 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
Time je zadatak rijesen, dobivena su dva rjesenja i to $x_1 = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ i $x_2 = \operatorname{arctg} 4 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.