Rijeseni neki zadaci iz poglavlja 5.1 (Dio drugi)

Prije rijesavanja zadataka prisjetimo se bitnih stvari koje ce nas pratiti tijekom njihovog promatranja.

Tvrdnja: (Osnovni trigonometrijski identiteti)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Tvrdnja: (Adicijski teoremi)

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

$$\operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x}$$

Tvrdnja: Formule redukcije

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos t \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin t$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$$

$$\sin(\pi + t) = -\sin t \qquad \cos(\pi + t) = -\cos t$$

$$\sin(\pi - t) = \sin t \qquad \cos(\pi - t) = -\cos t$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = -\cos t \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = \sin t$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\cos t \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\sin t$$

Tvrdnja: (Trigonometrijske funkcije dvostrukog kuta)

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x}$$

Tvrdnja: Sinus i kosinus polovicnog kuta:

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

Tvrdnja: (Transformacija umnoska u zbroj)

$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right]$$

$$\cos x\sin y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y)-\sin(x-y)\right]$$

$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$$

$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right]$$

Tvrdnja: (Transformacija zbroja u umnozak)

$$\sin x+\sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x-\sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x+\cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x-\cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

Prisjetim se jos vrijednosti trigonometrijskih funkcija za istaknute kuteve:

Kut	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} x$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nedef.	0	nedef.	0
$\operatorname{ctg} x$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	nedef.	0	nedef.

✎ Zadatak 10: (str. 118) 4) Rijesi sljedecu jednadzbu:

$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-3\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+1=0$$

Rjesenje: Promotrimo li jednadzbu mozemo uociti da ona sadrzi vise razlicitih trigonometrijskih funkcija kao i razlicite argumente unutar tih trigonometrijskih funckija, $\frac{\pi}{3}+x$ odnosno $\frac{\pi}{6}-x$. I to u nacelu stvara problem kojeg bi se trebali nekako rijesiti zelimo li rijesiti ovu trigonometrijsku jednadzbu. U ovakvim slucajevima potrebno je zapravo mudrim koristenjem formula redukcije svesti funkcije unutar jenddazbe na jednake, kao i isti argument.
Pogledajmo cemu je jednak slijedeci izraz (pokusavamo dobiti nesto pogodno za formulu redukcije):

$$\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}-x$$

Svedem razlomke na desnoj strani jednakosti na zajednicki nazivnik 6 kako bi ih oduzeo:

$$\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+x=\frac{3\pi-2\pi}{6}-x$$

$$\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\frac{\pi}{6}-x$$

Na ovaj nacin sam zapravo povezao argumente $\frac{\pi}{3}+x$ i $\frac{\pi}{6}-x$ na nacin pogodan za koristenje kod formula redukcija, naime znam da vrijedi:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin t$$

Sto znaci da u nasem slucaju mora vrijediti:

$$\cos\underbrace{\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}_{\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}+x\right)}=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$$

Na ovaj nacin pocetnu trigonometrijsku jednadzbu mozemo svesti na onu koja se sadrzavati samo izraz $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$. Sredimo dakle pocetnu trigonometrijsku: jednadzbu imajuci to na umu

$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-3\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}_{\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)}+1=0$$

$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-3\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+1=0$$

Uvedemo li supstituciju $k=\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$ jednadzba prelazi u algebarsku, tocnije kvadratnu jednadzbu:

$$2k^2-3k+1=0$$

Izraz po kojem izracunavam rjesenja kvadratnih jednadzbi jest:

$$k_1, k_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nadalje ispisem koeficijente dane kvadratne jednadbe:

$$a = 2$$

$$b = -3$$

$$c = 1$$

Uvrstim ispisane koeficijente u gornji izraz te racunam:

$$k_1, k_2 = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2}$$

$$k_1, k_2 = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4}$$

$$k_1, k_2 = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{4}$$

$$k_1, k_2 = \frac{3 \pm 1}{4}$$

Dakle jedno rijesenje dane kvadratne jednadzbe jest:

$$k_1 = \frac{3-1}{4} = \frac{{}^{1}\cancel{2}}{\cancel{4}_{2}} = \frac{1}{2}$$

Dok je drugo rijesenje dane kvadratne jednadzbe:

$$k_2 = \frac{3+1}{3} = \frac{{}^{1}\cancel{4}}{\cancel{4}_{1}} = 1$$

I time smo rijesili nasu jednadzbu s time da smo dobili dva rjesenja i to:

$$k_1 = \frac{1}{2}$$

$$k_2 = 1$$

No da bih dobio konacno rjesenje pocetne jednadzbe moram jos vratiti supstituciju. Vrijedi:

$$k = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

Na taj nacin dobijem dvije osnovne trigonometrijske jednadzbe:

$$\frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

$$1 = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

Usredotocimo se za pocetak na prvu od dvije trigonometrijske jednadzbe:

$$\frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

Uvedem supstituciju $t = \frac{\pi}{3} + x$. Tada jednadzba prelazi u sljedeci obliik:

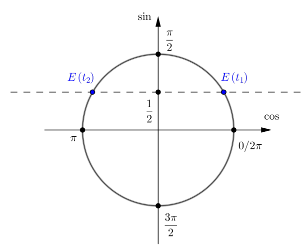
$$\frac{1}{2} = \sin\underbrace{\left(\frac{\pi}{3} + x\right)}_{t}$$

$$\frac{1}{2} = \sin t$$

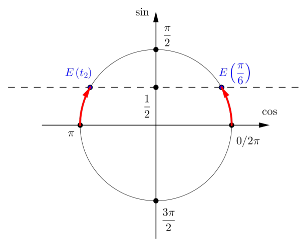
Zamijenim lijevu i desnu stranu jednadzbe da poprimi standardni oblik:

$$\sin t = \frac{1}{2}$$

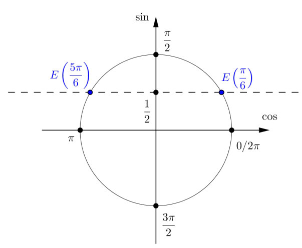
Na ovaj nacin pocetnu jednadzbu sveli smo na osnovnu, te nas glavni zadatak postaje odrediti za koje je kuteve t vrijednost funkcije sin jednak $\frac{1}{2}$. U tu svrhu pogledajmo sljedecu sliku:



Dakle sinuse citamo na osi y, kako se $\frac{1}{2}$ nalazi na sredini izmedu ishodista i tocke $\frac{\pi}{2}$ ucrtamo tocku na osi y iznad ishodista, jer je pozitvna, na udaljenosti od 0.5. Te povucemo okomicu na os y kroz tu tocku. Zatim pogledamo sjeciste tog pravca i brojevne kruznice, to su tocke $E(t_1)$ i $E(t_2)$.
Kako po defninciji sinusa znamo da je to upravo y koordinata tocke na brojevnoj kruznici pridruzene nekom broju, vidimo da ce tocke pridruzene brojevima t_1 i t_2 imati y koordinate jednake $\frac{1}{2}$, odnosno sinusi brojeva t_1 i t_2 bit ce jednaki upravo $\frac{1}{2}$.
Dakle zadatak nam je otkiriti koji su to brojevi. Posluzimo se tablicom na dnu prve stranice dokumenta, te iscitamo da je sinus kuta $\frac{\pi}{6}$ jednak $\frac{1}{2}$. Dakle uocimo da tada t_1 mora biti jednak $\frac{\pi}{6}$. Pitanje je cemu je onda jednak t_2? U tu svrhu promotrimo sljedecu sliku:



Promatrajuci sliku mogu uociti da sam se do tocke $E(t_2)$ po pokruznici od tocke pridruzene kutu π pomaknuo za istu udaljenost kao i do tocke $E(t_1)$ samo u suprotnom smjeru. Posto smo zakljucili da t_1 mora biti jednako $\frac{\pi}{6}$, tada t_2 treba biti jednako $\pi - \frac{\pi}{6}$, jer se prema njoj pomicem u negativnom smjeru od tocke pridruzene kutu π po brojevnoj kruznici, dakle t_2 mora biti $\frac{5\pi}{6}$. To je ilustrirano na sljedecoj slici:



Dakle mozemo zakljuciti da su rjesenja jednadzbe na intervalu $[0, 2\pi]$ jednaka:

$$t_1 = \frac{\pi}{6}$$

$$t_2 = \frac{5\pi}{6}$$

No kako znamo da je sinus trigonometrijska funkcija cije se vrijednosti ponavljaju nakon svakih 2π, sva rjesenja dobivene jednadzbe su zapravo:

$$t_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$t_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

No da bih dobio konacno rjesenje pocetne jednadzbe moram jos vratiti supstituciju. Vrijedi:

$$\frac{\pi}{3} + x = t$$

Racunam:

$$\frac{\pi}{3} + x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

"Prebacim" $\frac{\pi}{3}$ na desnu stranu:

$$x_1 = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

Razlomke na desnoj strani svedem na zajednicki nazivnik 6 kako bi hi zbrojio:

$$x_1 = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{-2\pi + \pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Nadalje racunam:

$$\frac{\pi}{3} + x_1 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

"Prebacim" $\frac{\pi}{3}$ na desnu stranu:

$$x_2 = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

Razlomke na desnoj strani svedem na zajednicki nazivnik 6 kako bi hi zbrojio:

$$x_2 = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} + 2k\pi = \frac{-2\pi + 5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{3\pi}{6} + 2k\pi$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$x_2 = \frac{{}^{1}\cancel{3}\pi}{\cancel{6}_{2}} + 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Dakle rjesenja prve jednadzbe su:

$$x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Nadalje preostaje mi jos rijesiti drugu trigonometrijsku jednadzbu:

$$1 = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

Uvedem supstituciju $t = \frac{\pi}{3} + x$. Tada jednadzba prelazi u sljedeci obliik:

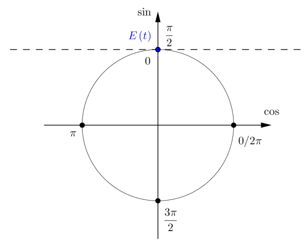
$$1 = \sin \underbrace{\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}_{t}$$

$$1 = \sin t$$

Zamijenim lijevu i desnu stranu jednadzbe da poprimi standardni oblik:

$$\sin t = 1$$

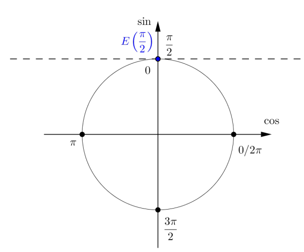
Nas glavni zadatak postaje odrediti za koje je kuteve t vrijednost funkcije sin jednaka 1. U tu svrhu pogledajmo sljedecu sliku:



Dakle sinuse citamo na osi y, kako se 1 nalazi u "najvisoj" tocki kruznice, ucrtamo tocku tocno u sjecistu pozitivnog dijela osi y i kruznice. Povucemo okomicu na os y kroz tu tocku. Zatim pogledamo sjeciste tog pravca i brojevne kruznice, to je samo jedna tocka $E(t)$.

Kako po definciiji sinusa znamo da je to upravo y koordinata tocke na brojevnoj kruznici pridruzene nekom broju, vidimo da ce tocka pridruzena broju t imati y koordinatu jednaku 1, odnosno sinus broja t bit ce jednak upravo 1.

Dakle zadatak nam je otkiriti koji je to broj. Promotrimo li sliku danu malo prije mozemo lako zakljuciti da sinus kuta $\frac{\pi}{2}$ mora biti jednak 1. To znaci da ocito t mora biti jednak $\frac{\pi}{2}$. To je ilustrirano na sljedecoj slici:



Dakle mozemo zakljuciti da je rjesenje jednadzbe na intervalu $[0, 2\pi]$ jednako:

$$t = \frac{\pi}{2}$$

No kako znamo da je sinus trigonometrijska funkcija cije se vrijednosti ponavljaju nakon svakih 2π, sva rjesenja dobivene jednadzbe su zapravo:

$$t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

No da bih dobio konacno rjesenje pocetne jednadzbe moram jos vratiti supstituciju. Vrijedi:

$$\frac{\pi}{3} + x = t$$

Racunam:

$$\underbrace{t}_{\frac{\pi}{3}+x_3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\frac{\pi}{3} + x_3 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

"Prebacim" $\frac{\pi}{3}$ s lijeve na desnu stranu:

$$x_3 = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Svedem sumu na desnoj strani na zajednicki nazivnik jednak 6:

$$x_3 = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{-2\pi + 3\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_3 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Rijesavajuci drugu trigonometrijsku jednadzbu dobili smo jedno rjesenje i to $x_3 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Dakle pocetna trigonometrijska jednadzba ima ukupno tri rjesenja i to $x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ i $x_3 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Zadatak 12: (str. 119) 2) Rijesi sljedecu jednadzbu:

$$2\sin x \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 3\sin(\pi - x)\cos x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\cos x = 0$$

Napomena: Ovo je zapravo primjer homogene jednadzbe jer nakon sto se dana jednadzba sredi preko formula redukcije dobit cemo jednadzbu oblika $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$ za neke $a, b, c \in \mathbb{R}$ sto je u sustini homogena trigonometrijska jednadzba.

Rjesenje: Dakle prvo na danu jednadzbu primjenimo formule redukcije:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos t$$

$$\sin(\pi - t) = \sin t$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = \sin t$$

$$2\sin x \underbrace{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}_{sinx} - 3\underbrace{\sin(\pi - x)}_{\sin x}\cos x + \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}_{\cos t}\cos x = 0$$

$$2\sin x\sin x - 3\sin x\cos x + \cos x\cos x = 0$$

$$2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$$

Na ovaj nacin jednadzbu smo sveli na homogenu, koja se rijesava na nacin da se podijeli ili s $\sin^2 x$ ili $\cos^2 x$. Moja preporuka je da dijelite s $\cos^2 x$ jer cemo na taj nacin dobiti trigonometrijsku fukciju tangens.

Napomena: Prije u dokumentu pod jednom od napomena je naglaseno da se u pravilu ne smije dijeliti s $\sin x$, $\cos x$ ili nekom drugom trigonometrijskom funkcijom zbog mogucnosti gubljenja rjesenja. No u slucaju kada se radi o homogenoj trigonometrijskoj funkciji koja sadrzi sva tri clana, dakle i $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ i $\sin x\cos x$ to se nece dogoditi i slobodno se moze podijeliti s $\sin^2 x$ ili $\cos^2 x$. Razlog tome jest sto jednadzbe $sinx = 0$ i $\cos x = 0$ nemaju zajednicka rjesenja.

Podijelimo cijelu jednadzbu s $\cos^2 x$, dakle slijedi:

$$2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + \cos^2 x = 0 \;/ : \cos^2 x$$

$$\frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{3\sin x\cos x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$\frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{3\sin x\cancel{\cos x}^1}{{}_{\cos x}\cancel{\cos^2 x}} + \frac{{}^1\cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos^2 x}_1} = 0$$

$$\frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{3\sin x}{\cos x} + 1 = 0$$

Prema identitetu $\frac{a^b}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ sredim prvi clan sume, pri tome imam na umu da za trigonometrijsku funkciju tangensa vrijedi identitet $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Racunam:

$$\underbrace{2\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2}_{\operatorname{tg}^2 x} -3\underbrace{\frac{\sin x}{\cos x}}_{\operatorname{tg} x} +1 = 0$$

$$2\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 1 = 0$$

Uvedemo li supstituciju $k = \operatorname{tg} x$ jednadzba prelazi u algebarsku, tocnije kvadratnu jednadzbu:

$$2k^2 - 3k + 1 = 0$$

Izraz po kojem izracunavam rjesenja kvadratnih jednadzbi jest:

$$k_1, k_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nadalje ispisem koeficijente dane kvadratne jednadbe:

$$a = 2$$

$$b = -3$$

$$c = 1$$

Uvrstim ispisane koeficijente u gornji izraz te racunam:

$$k_1, k_2 = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2}$$

$$k_1, k_2 = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4}$$

$$k_1, k_2 = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{4}$$

$$k_1, k_2 = \frac{3 \pm 1}{4}$$

Dakle jedno rijesenje dane kvadratne jednadzbe jest:

$$k_1 = \frac{3 - 1}{4} = \frac{{}^1\cancel{2}}{\cancel{4}_2} = \frac{1}{2}$$

Dok je drugo rijesenje dane kvadratne jednadzbe:

$$k_2 = \frac{3 + 1}{3} = \frac{{}^1\cancel{4}}{\cancel{4}_1} = 1$$

I time smo rijesili nasu jednadzbu s time da smo dobili dva rjesenja i to:

$$k_1 = \frac{1}{2}$$

$$k_2 = 1$$

No da bih dobio konacno rjesenje pocetne jednadzbe moram jos vratiti supstituciju. Vrijedi:

$$k = \operatorname{tg} x$$

Na taj nacin dobijem dvije osnovne trigonometrijske jednadzbe:

$$\frac{1}{2} = \operatorname{tg} x$$

$$1 = \operatorname{tg} x$$

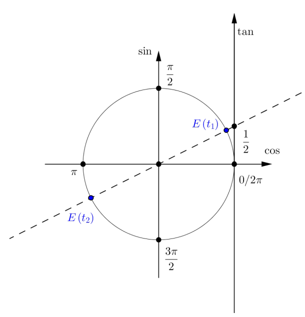
Usredotocimo se za pocetak na prvu od dvije trigonometrijske jednadzbe:

$$\frac{1}{2} = \operatorname{tg} x$$

Zamijenim lijevu i desnu stranu jednadzbe da poprimi standardni oblik:

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$$

Nas glavni zadatak postaje odrediti za koje je kuteve t vrijednost funkcije tg jednaka $\frac{1}{2}$. U tu svrhu pogledajmo sljedecu sliku:



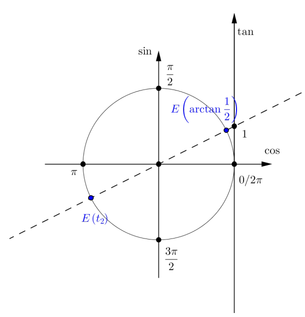
Dakle tangense citamo na pravcu okomitom na os x kroz tocku $(0, 1)$ na osi x. Ucrtamo tocku $\frac{1}{2}$ na tom pravcu tako da se pomaknemo za $\frac{1}{2}$ prema gore od osi x na tom pravcu. Povucemo prvac kroz ucrtanu tocku na tom pravcu te kroz ishodiste. Zatim pogledamo sjeciste tog pravca i brojevne kruznice, to su tocke $E(t_1)$ i $E(t_2)$.

Kako po definciiji tangensa znamo da je to upravo y koordinata tocke na pravcu okomitom na os x kroz tocku $(0, 1)$ na osi x dobivene kao sjeciste pravca koji prolazi ishodistem i tockom pridruzenom broju t_1, odnosno t_2, vidimo da ce tocke dobivene kao sjeciste pravca kroz ishodiste i tocke pridruzene brojevima

t_1 i t_2 i pravca okomitog na os x kroz tocku $(0,1)$ na osi x imati y koordinate jednake $\frac{1}{2}$, odnosno tangensi brojeva t_1 i t_2 bit ce jednaki upravo $\frac{1}{2}$.
Dakle zadatak nam je otkiriti koji su to brojevi. Promotrimo li tablicu na dnu prve stranice dokumenta, mozemo uociti da se u njoj ne nalazi $\frac{1}{2}$ u retku u kojem su ispisane vrijednosti tangensa, niti bilo kakav slican broj. U takvim slucajevima kada je vrjednost funkcije tangens razlicita od bilo koje vrijednosti u tablici te vrijednosti suprotne onoj u tablici (broj iz tablice s negativnim predznakom) kazemo da je rjesenje jednadzbe na intervalu $[0, 2\pi]$ jednako:

$$t_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$$

To je ilustrirano na sljedecoj slici:



Napomena: Napominjem da je dovoljno odrediti samo t_1 zbog prirode trigonometrijske funkcije tangens!

No kako znamo da je tangens trigonometrijska funkcija cije se vrijednosti ponavljaju nakon svakih π, sva rjesenja dobivene jednadzbe su zapravo:

$$t_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

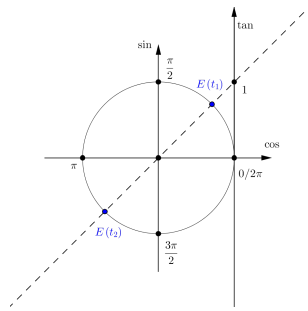
Dakle rjesenje prve jednadzbe jest $x_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
Nadalje trebamo jos rijesiti drugu jednadzbu:

$$1 = \operatorname{tg} x$$

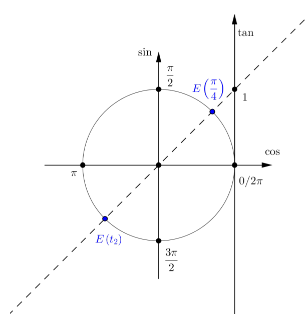
Zamijenim lijevu i desnu stranu jednadzbe da poprimi standardni oblik:

$$\operatorname{tg} x = 1$$

Nas glavni zadatak postaje odrediti za koje je kuteve t vrijednost funkcije tg jednaka 1. U tu svrhu pogledajmo sljedecu sliku:



Dakle tangense citamo na pravcu okomitom na os x kroz tocku $(0,1)$ na osi x. Ucrtamo tocku 1 na tom pravcu tako da se pomaknemo za 1 prema gore od osi x na tom pravcu. Povucemo prvac kroz ucrtanu tocku na tom pravcu te kroz ishodiste. Zatim pogledamo sjeciste tog pravca i brojevne kruznice, to su tocke $E(t_1)$ i $E(t_2)$.
Kako po definciiji tangensa znamo da je to upravo y koordinata tocke na pravcu okomitom na os x kroz tocku $(0,1)$ na osi x dobivene kao sjeciste pravca koji prolazi ishodistem i tockom pridruzenom broju t_1, odnosno t_2, vidimo da ce tocke dobivene kao sjeciste pravca kroz ishodiste i tocke pridruzene brojevima t_1 i t_2 i pravca okomitog na os x kroz tocku $(0,1)$ na osi x imati y koordinate jednake 1, odnosno tangensi brojeva t_1 i t_2 bit ce jednaki upravo 1.
Dakle zadatak nam je otkiriti koji su to brojevi. Posluzimo se tablicom na dnu prve stranice dokumenta, te iscitamo da je tangens kuta $\frac{\pi}{4}$ jednak 1. Dakle uocimo da tada t_1 mora biti jednak $\frac{\pi}{4}$. Podsjecam da zbog prirode trigonometrijske funkcije tangens ne trebamo odrediti t_2. To je ilustrirano na sljedecoj slici:



Dakle mozemo zakljuciti da je rjesenje jednadzbe na intervalu $[0, 2\pi]$ jednako:

$$t_1 = \frac{\pi}{4}$$

Napomena: Napominjem da je dovoljno odrediti samo t_1 zbog prirode trigonometrijske funkcije tangens!

No kako znamo da je tangens trigonometrijska funkcija cije se vrijednosti ponavljaju nakon svakih π, sva rjesenja prve jednadzbe su zapravo:

$$t_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Rijesavajuci drugu trigonometrijsku jednadzbu dobili smo jedno rjesenje i to $x_2 = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Dakle pocetna trigonometrijska jednadzba ima ukupno dva rjesenja i to $x_1 = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ i $x_2 = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Zadatak 13: (str. 119) 4) Rijesi sljedecu jednadzbu:

$$4\sin x\cos x - 1 = 2\left(\sin x - \cos x\right)$$

Rjesenje: Jednadzbu cemo rijesiti rastavljanjem na faktore. Najprije se rijesim zagrade na desnoj strani jednadzbe:

$$4\sin x\cos x - 1 = 2\left(\sin x - \cos x\right)$$

$$4\sin x\cos x - 1 = 2\sin x - 2\cos x$$

"Prebacim" sve sto je na desnoj strani na lijevu:

$$4\sin x\cos x - 1 - 2\sin x + 2\cos x = 0$$

Zapisem sumande u malo drugacijem poretku:

$$4\sin x\cos x + 2\cos x - 2\sin x - 1 = 0$$

Izlucim $2\cos x$ iz prva dva sumanda te -1 iz druga dva, slijedi:

$$2\cos x\left(2\sin x + 1\right) - 1\left(2\sin x + 1\right) = 0$$

Nadalje vidim da oba sumanda sadrze izraz $2\sin x + 1$ pa ga izlucim. Jednadzba prelazi u sljedeci oblik:

$$\left(2\sin x + 1\right)\left(2\cos x - 1\right) = 0$$

Sada znam da ako je umnozak neka dva broja jednak 0, tada je ili prvi od ta dva broja jednak 0 ili je onaj drugi jednak 0. Primjenim li tu cinjenicu u nasem slucaju mora vrijediti:

$$2\sin x + 1 = 0 \ \text{ ili } \ 2\cos x - 1 = 0$$

Separiramo nepoznanice na lijevu poznanice na desnu stranu:

$$2\sin x = -1 \ \text{ ili } \ 2\cos x = 1$$

Obadvije jednadzbe podijelim s 2:

$$2\sin x = -1 \; / : 2 \;\; \text{ili} \;\; 2\cos x = 1 \; / : 2$$

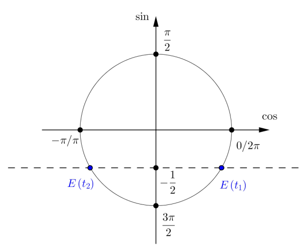
$$\sin x = -\frac{1}{2} \;\; \text{ili} \;\; \cos x = \frac{1}{2}$$

Dakle dobili smo dvije osnovne trigonometrijske jednadzbe:

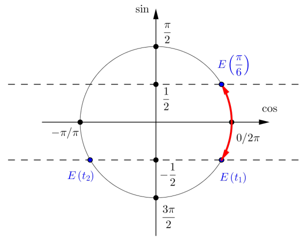
$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

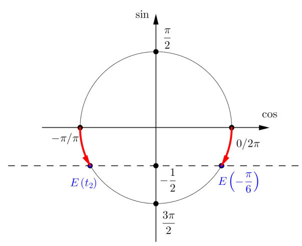
Usredotocim se na pocetku na prvu trigonometrijsku jednadzbu. Nas zadatak postaje odrediti za koje je kuteve t vrijednost funkcije sin jednak $-\frac{1}{2}$. U tu svrhu pogledajmo sljedecu sliku:



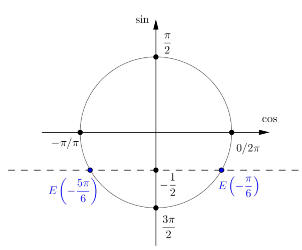
Dakle sinuse citamo na osi y, kako se $-\frac{1}{2}$ nalazi na sredini izmedu ishodista i tocke $-\frac{\pi}{2}$ ucrtamo tocku na osi y ispod ishodista, jer je negativna, na udaljenosti od -0.5. Te povucemo okomicu na os y kroz tu tocku. Zatim pogledamo sjeciste tog pravca i brojevne kruznice, to su tocke $E(t_1)$ i $E(t_2)$.
Kako po definciiji sinusa znamo da je to upravo y koordinata tocke na brojevnoj kruznici pridruzene nekom broju, vidimo da ce tocke pridruzene brojevima t_1 i t_2 imati y koordinate jednake $-\frac{1}{2}$, odnosno sinusi brojeva t_1 i t_2 bit ce jednaki upravo $-\frac{1}{2}$.
Dakle zadatak nam je otkiriti koji su to brojevi. Posluzimo se tablicom na dnu prve stranice dokumenta. Uocavamo da u njoj nema broja $-\frac{1}{2}$ u retku u kojem se nalaze vrijednosti funkcije sinus, no mozemo iscitati da je sinus kuta $\frac{\pi}{6}$ jednak $\frac{1}{2}$. Promotrimo sljedecu sliku:



Promatrajuci sliku mogu uociti da sam se do tocke $E(t_1)$ po pokruznici od tocke pridruzene kutu 0 pomaknuo za istu udaljenost kao i do tocke $E(\left(\frac{\pi}{6}\right)$ samo u suprotnom smjeru. Iz toga mozemo zakljuciti da t_2 mora biti jednako $-\frac{\pi}{6}$. Nadalje promotrimo sljedecu sliku:



Promatrajuci sliku mogu uociti da sam se do tocke $E(t_2)$ po pokruznici od tocke pridruzene kutu $-\pi$ pomaknuo za istu udaljenost kao i do tocke $E(t_1)$ samo u suprotnom smjeru. Posto smo zakljucili da t_1 mora biti jednako $-\frac{\pi}{6}$, tada t_2 treba biti jednako $-\pi + \frac{\pi}{6}$, jer se prema njoj pomicem u pozitivnom smjeru od tocke pridruzene kutu $-\pi$ po brojevnoj kruznici, dakle t_2 mora biti $-\frac{5\pi}{6}$. To je ilustrirano na sljedecoj slici:



Dakle mozemo zakljuciti da su rjesenja prve jednadzbe na intervalu $[0, 2\pi]$ jednaka:

$$t_1 = -\frac{\pi}{6}$$

$$t_2 = -\frac{5\pi}{6}$$

No kako znamo da je sinus trigonometrijska funkcija cije se vrijednosti ponavljaju nakon svakih 2π, sva rjesenja prve jednadzbe su zapravo:

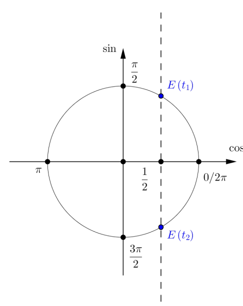
$$x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Nadalje trebamo jos rijesiti drugu trigonometrijsku jednadzbu:

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

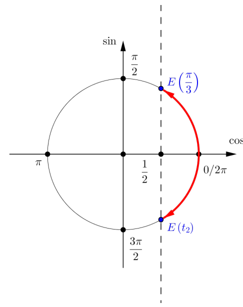
Nas zadatak postaje odrediti za koje je kuteve t vrijednost funkcije $\cos$ jednak $\frac{1}{2}$. U tu svrhu pogledajmo sljedecu sliku:



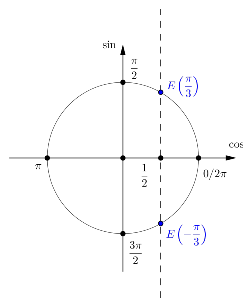
Dakle kosinuse citamo na osi x, kako je $\frac{1}{2}$ priblizno jednako 0.71 ucrtamo tocku na osi x desno od ishodista, jer je pozitvna, na udaljenosti od tocno 0.5. Te povucemo okomicu na os x kroz tu tocku. Zatim pogledamo sjeciste tog pravca i brojevne kruznice, to su tocke $E(t_1)$ i $E(t_2)$.

Kako po definciiji kosinusa znamo da je to upravo x koordinata tocke na brojevnoj kruznici pridruzene nekom broju, vidimo da ce tocke pridruzene brojevima t_1 i t_2 imati x koordinate jednake $\frac{1}{2}$, odnosno kosinusi brojeva t_1 i t_2 bit ce jednaki upravo $\frac{1}{2}$.

Dakle zadatak nam je otkiriti koji su to brojevi. Posluzimo se tablicom na dnu prve stranice dokumenta, te iscitamo da je kosinus kuta $\frac{\pi}{3}$ jednak $\frac{1}{2}$. Dakle uocimo da tada t_1 mora biti jednak $\frac{\pi}{3}$. Pitanje je cemu je onda jednak t_2? U tu svrhu promotrimo sljedecu sliku:



Promatrajuci sliku mogu uociti da sam se do tocke $E(t_2)$ pokruznici od osi x pomaknuo za istu udaljenost kao i do tocke $E(t_1)$ samo u suprotnom smjeru. Posto smo zakljucili da t_1 mora biti jednako $\dfrac{\pi}{3}$, tada t_2 treba biti jednako $-\dfrac{\pi}{3}$, jer se prema njoj pomicem u negativnom smjeru od osi x po brojevnoj kruznici. To je ilustrirano na sljedecoj slici:



Dakle mozemo zakljuciti da su rjesenja druge jednadzbe na intervalu $[0, 2\pi]$ jednaka:

$$t_1 = \frac{\pi}{3}$$

$$t_2 = -\frac{\pi}{3}$$

No kako znamo da je kosinus trigonometrijska funkcija cije se vrijednosti ponavljaju nakon svakih 2π, sva rjesenja druge jednadzbe su zapravo:

$$x_3 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$x_4 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Dakle pocetna trigonometrijska jednadzba ima ukupno cetiri rjesenja i to $x_1 = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, $x_2 = -\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, $x_3 = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ i $x_4 = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Zadatak 14: (str. 119) 4) Rijesi sljedecu jednadzbu:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{1}{2}$$

Rjesenje: Dakle na prvi pogled ova jednadzba izgleda izuzetno slozena, no promotrimo sljdeci adicijski teorem sa svrhom da pronadjemo neke slicnosti:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

Pokusajmo u jednadzbi $\frac{\pi}{6}+x$ oznaciti s α, a $\frac{\pi}{3}-x$ s β. Racunam:

$$\sin\underbrace{\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}_{\alpha}\cos\underbrace{\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}_{\beta}-\cos\underbrace{\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}_{\alpha}\sin\underbrace{\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}_{\beta}=\frac{1}{2}$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}$$

Izraz na lijevoj strani prepoznajem kao adicijski teorem za sinus:

$$\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$$

Zamijenim natrag α s $\frac{\pi}{6}+x$, te β s $\frac{\pi}{3}-x$. Slijedi:

$$\sin\left[\frac{\pi}{6}+x-\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right]=\frac{1}{2}$$

$$\sin\left[\frac{\pi}{6}+x-\frac{\pi}{3}-(-x)\right]=\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+x+x\right)=\frac{1}{2}$$

Svedem razlomke na zajednicki nazivnik 6 kako bi ih zbrojio:

$$\sin\left(\frac{\pi-2\pi}{6}+2x\right)=\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}+2x\right)=\frac{1}{2}$$

Dakle ovim sredjivanjem dobili smo trigonometrijsku jednadzbu koja se svodi na osnovnu:

$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

Uvedem supstituciju $t=2x-\frac{\pi}{6}$. Tada jednadzba prelazi u sljedeci obliik:

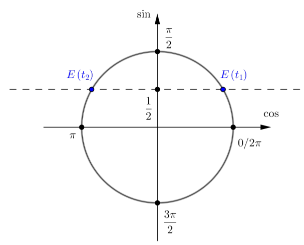
$$\frac{1}{2}=\sin\underbrace{\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)}_{t}$$

$$\frac{1}{2} = \sin t$$

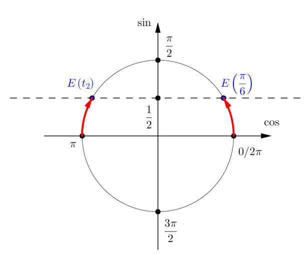
Zamijenim lijevu i desnu stranu jednadzbe da poprimi standardni oblik:

$$\sin t = \frac{1}{2}$$

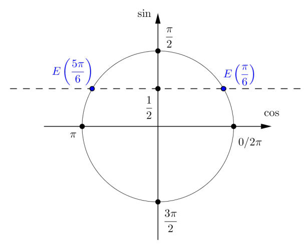
Na ovaj nacin pocetnu jednadzbu sveli smo na osnovnu, te nas glavni zadatak postaje odrediti za koje je kuteve t vrijednost funkcije sin jednak $\frac{1}{2}$. U tu svrhu pogledajmo sljedecu sliku:



Dakle sinuse citamo na osi y, kako se $\frac{1}{2}$ nalazi na sredini izmedu ishodista i tocke $\frac{\pi}{2}$ ucrtamo tocku na osi y iznad ishodista, jer je pozitvna, na udaljenosti od 0.5. Te povucemo okomicu na os y kroz tu tocku. Zatim pogledamo sjeciste tog pravca i brojevne kruznice, to su tocke $E(t_1)$ i $E(t_2)$.
Kako po definciiji sinusa znamo da je to upravo y koordinata tocke na brojevnoj kruznici pridruzene nekom broju, vidimo da ce tocke pridruzene brojevima t_1 i t_2 imati y koordinate jednake $\frac{1}{2}$, odnosno sinusi brojeva t_1 i t_2 bit ce jednaki upravo $\frac{1}{2}$.
Dakle zadatak nam je otkiriti koji su to brojevi. Posluzimo se tablicom na dnu prve stranice dokumenta, te iscitamo da je sinus kuta $\frac{\pi}{6}$ jednak $\frac{1}{2}$. Dakle uocimo da tada t_1 mora biti jednak $\frac{\pi}{6}$. Pitanje je cemu je onda jednak t_2? U tu svrhu promotrimo sljedecu sliku:



Promatrajuci sliku mogu uociti da sam se do tocke $E(t_2)$ po pokruznici od tocke pridruzene kutu π pomaknuo za istu udaljenost kao i do tocke $E(t_1)$ samo u suprotnom smjeru. Posto smo zakljucili da t_1 mora biti jednako $\frac{\pi}{6}$, tada t_2 treba biti jednako $\pi - \frac{\pi}{6}$, jer se prema njoj pomicem u negativnom smjeru od tocke pridruzene kutu π po brojevnoj kruznici, dakle t_2 mora biti $\frac{5\pi}{6}$. To je ilustrirano na sljedecoj slici:



Dakle mozemo zakljuciti da su rjesenja jednadzbe na intervalu $[0, 2\pi]$ jednaka:

$$t_1 = \frac{\pi}{6}$$

$$t_2 = \frac{5\pi}{6}$$

No kako znamo da je sinus trigonometrijska funkcija cije se vrijednosti ponavljaju nakon svakih 2π, sva rjesenja dobivene jednadzbe su zapravo:

$$t_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$t_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

No da bih dobio konacno rjesenje pocetne jednadzbe moram jos vratiti supstituciju. Vrijedi:

$$2x - \frac{\pi}{6} = t$$

Racunam:

$$2x_1 - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

"Prebacim" $\frac{\pi}{6}$ na desnu stranu:

$$2x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

Zbrojim sumu na desnoj strani, nema potrebe svoditi na zajednicki nazivnik jer je on vec jednak:

$$2x_1 = \frac{2\pi}{6} + 2k\pi$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$2x_1 = \frac{{}^{1}\cancel{2}\pi}{\cancel{6}_3} + 2k\pi$$

$$2x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

Sve podijelim s 2:

$$2x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ / : 2$$

$$\frac{{}^{1}\cancel{2}x_2}{\cancel{2}_1} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{2}{1}} + \frac{{}^{1}\cancel{2}k\pi}{\cancel{2}_1}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Nadalje racunam:

$$2x_2 - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

"Prebacim" $\frac{\pi}{6}$ na desnu stranu:

$$2x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

Zbrojim sumu na desnoj strani, nema potrebe svoditi na zajednicki nazivnik jer je on vec jednak:

$$2x_2 = \frac{6\pi}{6} + 2k\pi$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$2x_2 = \frac{{}^{1}\cancel{6}\pi}{\cancel{6}_1} + 2k\pi$$

$$2x_2 = \pi + 2k\pi$$

Sve podijelim s 2:

$$2x_2 = \pi + 2k\pi \ / : 2$$

$$\frac{{}^{1}\cancel{2}x_2}{\cancel{2}_1} = \frac{\pi}{2} + \frac{{}^{1}\cancel{2}k\pi}{\cancel{2}_1}$$

$$x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Dakle pocetna trigonometrijska jednadzba ima ukupno dva rjesenja i to $x_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ i $x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.