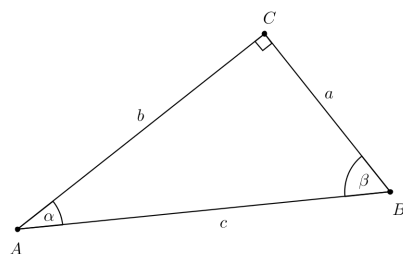


Rijeseni neki zadaci iz poglavlja 4.5

Prije rješavanja zadataka prisjetimo se bitnih stvari koje će nas pratiti tijekom njihovog promatranja.

Definicija: (Trigonometrija pravokutnog trokuta)



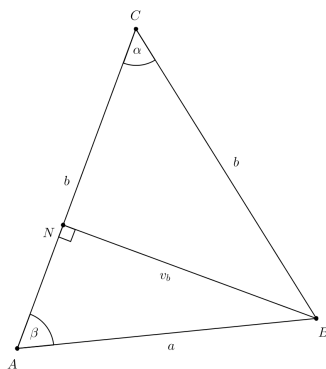
$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{\text{kateta nasuprot kuta } \varphi}{\text{hipotenuza}} \\ \cos \varphi &= \frac{\text{kateta prilezeca kuta } \varphi}{\text{hipotenuza}} \\ \text{tg } \varphi &= \frac{\text{kateta nasuprot kuta } \varphi}{\text{kateta prilezeca kuta } \varphi} \\ \text{ctg } \varphi &= \frac{\text{kateta prilezeca kuta } \varphi}{\text{kateta nasuprot kuta } \varphi} \end{aligned}$$

Gledajući skicu vrijedi:

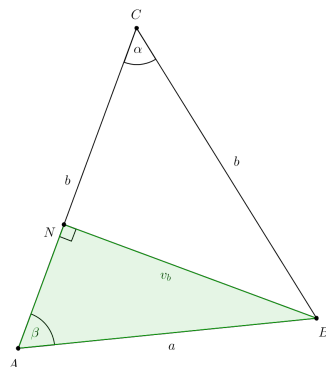
$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{a}{c}, & \cos \alpha &= \frac{b}{c}, & \text{tg } \alpha &= \frac{a}{b}, & \text{ctg } \alpha &= \frac{b}{a} \\ \sin \beta &= \frac{b}{c}, & \cos \beta &= \frac{a}{c}, & \text{tg } \beta &= \frac{b}{a}, & \text{ctg } \beta &= \frac{a}{b} \end{aligned}$$

🍃 **Zadatak 13:** (str. 141) Osnovica jednakokravnog trokuta dugacka je 33 cm, duljina visine na krak iznosi 15 cm. Koliki su kutovi tog trokuta?

Rjesenje: Visinom na krak dani jednakokrani trokut dijeli se na dva manja pravokutna trokuta:



Usredotocimo se na trokut $\triangle ABN$ (osjencan zelenom bojom):



Uocimo da je visina na krak jednakokravnog trokuta v_b kateta nasuprotna kutu β u trokutu $\triangle ABN$ dok je osnovica jednakokravnog trokuta a zapravo hipotenuza u trokutu $\triangle ABN$. Te tri velicine mozemo povezati preko trigonometrijske funkcije \sin na sljedeci nacin:

$$\sin \beta = \frac{v_b}{a}$$

Uvrstimo poznate vrijednosti, slijedi:

$$\sin \beta = \frac{\overbrace{v_b}^{15}}{\underbrace{a}_{33}}$$

$$\sin \beta = \frac{15}{33}$$

$$\beta = \sin^{-1} \left(\frac{15}{33} \right)$$

$$\beta = 27^\circ 2' 8''$$

Dakle velicina kuta β jednaka je $27^\circ 2' 8''$. Nadalje kako je trokut $\triangle ABC$ jednakokravan za njegove kutove vrijedi $\alpha + 2 \cdot \beta = 180^\circ$, racunam:

$$\alpha + 2 \cdot \beta = 180^\circ$$

Uvrstim poznate vrijednosti, slijedi:

$$\alpha + 2 \cdot \overbrace{\beta}^{27^\circ 2' 8''} = 180^\circ$$

$$\alpha + 2 \cdot 27^\circ 2' 8'' = 180^\circ$$


$$\alpha + 54^{\circ}4'17'' = 180^{\circ}$$

$$\alpha = 180^{\circ} - 54^{\circ}4'17''$$

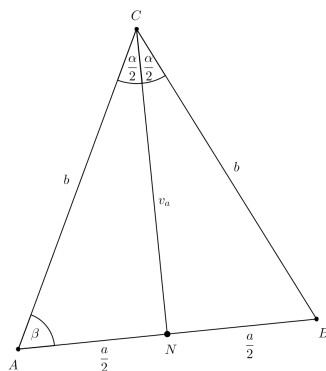
$$\alpha = 125^{\circ}55'44''$$

Dakle velicine kutova su $\alpha = 125^{\circ}55'44''$ i $\beta = 27^{\circ}2'8''$. Time je zadatak riješen.

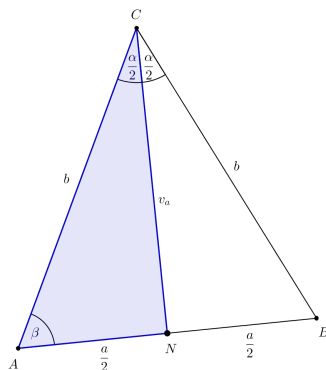


 Zadatak 18: (str. 141) Duljine osnovice i kraka jednakokravnog trokuta u omjeru su 6 : 5, a visina na osnovicu dugačka je 8 cm. Odredi polumjer upisane i opisane kruznice ovom trokutu.

Rjesenje: Prvo ćemo odrediti velicine kutova ovog trokuta. Promotrimo skicu:



Usredotocimo se za pocetak na lijevi pravokutni trokut $\triangle ANC$ na koje visina v_a dijeli trokut $\triangle ABC$ (osjencan plavom bojom):



Dakle kako je u zadatku zadan omjer izmedju osnovice i kraka jednakokravnog trokuta, te velicine promatrat cemo i u trokutu $\triangle ACN$. Uocimo da je polovica osnovice jednakokravnog trokuta $\frac{a}{2}$ prilezeca kateta kutu β u trokutu $\triangle ACN$ dok je krak jednakokravnog trokuta b zapravo hipotenuza u trokutu $\triangle ACN$. Te tri velicine mozemo povezati preko trigonometrijske funkcije \cos na sljedeci nacin:

$$\cos \beta = \frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{1}}$$

$$\cos \beta = \frac{a}{2b}$$

Kako znamo da izraz $a : b = 6 : 5$ mozemo drugacije zapisati kao $\frac{a}{b} = \frac{6}{5}$, dalje racunam:

$$\cos \beta = \frac{a}{2b} = \frac{1}{2} \cdot \overbrace{\frac{a}{b}}^{\frac{6}{5}}$$

$$\cos \beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5}$$

$$\cos \beta = \frac{3}{5}$$

$$\beta = \cos^{-1} \left(\frac{3}{5} \right)$$

$$\beta = 53^{\circ}7'48''$$

Dakle velicina kuta β jednaka je $53^{\circ}7'48''$. Nadalje kako je trokut $\triangle ABC$ jednakokravan za njegove kutove vrijedi $\alpha + 2 \cdot \beta = 180^{\circ}$, racunam:

$$\alpha + 2 \cdot \beta = 180^{\circ}$$

Uvrstim poznate vrijednosti, slijedi:

$$\alpha + 2 \cdot \overbrace{\beta}^{53^{\circ}7'48''} = 180^{\circ}$$

$$\alpha + 2 \cdot 53^{\circ}7'48'' = 180^{\circ}$$

$$\alpha + 106^{\circ}15'38'' = 180^{\circ}$$

$$\alpha = 180^{\circ} - 106^{\circ}15'38''$$

$$\alpha = 73^{\circ}44'23''$$

Dakle velicine kutova su $\alpha = 73^{\circ}44'23''$ i $\beta = 53^{\circ}7'48''$. Sada mozemo odrediti velicinu osnovice a , te kraka b . Promatarmo li opet trokut $\triangle ANC$ (posljednja skica). Uocimo da je polovica osnovice jednakokravnog trokuta $\frac{a}{2}$ prilezeca

kateta kutu β u trokutu $\triangle ANC$ dok je visina na osnovicu jednakokravnog trokuta v_a zapravo nasuprotna kateta kutu β u trokutu $\triangle ACN$. Te tri velicine mozemo povezati preko trigonometrijske funkcije tg na sljedeci nacin:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_a}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{v_a}{1}}{\frac{1}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2v_a}{a}$$

Uvrstimo poznate vrijednosti, slijedi:

$$\operatorname{tg} \overbrace{\beta}^{53^\circ 7' 48''} = \frac{2 \cdot \overbrace{v_a}^8}{a}$$

$$\operatorname{tg} 53^\circ 7' 48'' = \frac{2 \cdot 8}{a} / \cdot a$$

$$1.333a = 16 / : 1.333$$

$$a = 12 \text{ cm}$$

Prisjetimo se da vrijedi $a : b = 6 : 5$, dakle vrijedi:

$$a : b = 6 : 5$$

$$\frac{a}{b} = \frac{6}{5}$$

Uvrstimo poznate vrijednosti, slijedi:

$$\frac{\overbrace{a}^{12}}{b} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{12}{b} = \frac{6}{5} / \cdot \frac{5 \cdot b}{6}$$

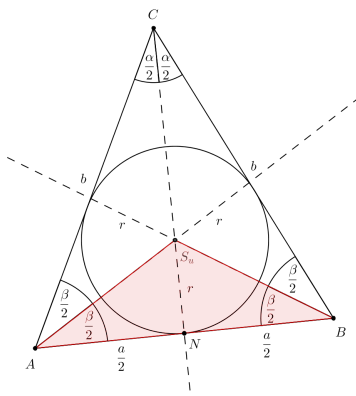
$$\frac{\cancel{12}^2}{\cancel{b}_1} \cdot \frac{5 \cdot \cancel{b}^1}{\cancel{6}_1} = \frac{\cancel{1}^1}{\cancel{1}_1} \cdot \frac{\cancel{b}^1 \cdot b}{\cancel{6}_1}$$

$$2 \cdot 5 = b$$

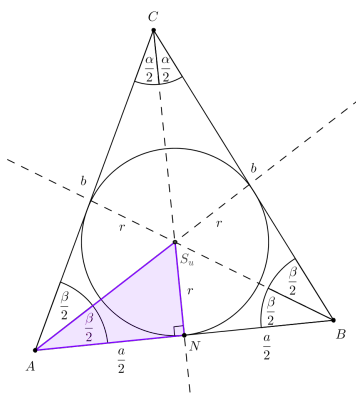
$$10 = b$$

$$b = 10 \text{ cm}$$

Sada kada smo odredili velicine osnovice i kraka mozemo se usredotociti na racunanje radijusa upisane i opisane kruznice. Odredimo prvo radijus trokutu upisane kruznice. Srediste trokutu upisane kruznice nalazi se na simetralama kutova. Pogledajmo sljedecu skicu:



Usredotocimo se na trokut $\triangle ABS_u$. Taj trokut je jednakokratan te ga radijus upisane kruznice dijeli na dva pravokutna trokuta (osnovica jednakokravnog trokuta je tangenta upisane kruznice pa njen radijus mora biti okomit na osnovicu sto znaci da je ujedno visina trokuta $\triangle ABS_u$). Promotrimo sada jedan od tih manjih pravokutnih trokuta, neka to bude trokut $\triangle ANS_u$, skica:



Uocimo da je polovica osnovice jednakokravnog trokuta $\frac{a}{2}$ prilezeca kateta kutu $\frac{\beta}{2}$ u trokutu $\triangle ANS_u$ dok je radijus upisane kruznice jednakokravnog trokuta r zapravo prilezeca kateta kutu $\frac{\beta}{2}$ u trokutu $\triangle ANS_u$. Te tri velicine mozemo povezati preko trigonometrijske funkcije tg na sljedeci nacin:

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{r}{\frac{a}{2}} = \frac{r}{\frac{a}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{2r}{a}$$

Uvrstimo poznate vrijednosti, slijedi:

$$\operatorname{tg} \frac{\overbrace{53^\circ 7' 48''}^{\beta}}{2} = \frac{2 \cdot r}{\underbrace{a}_{12}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{53^\circ 7' 48''}{2} = \frac{12 \cdot r}{126}$$

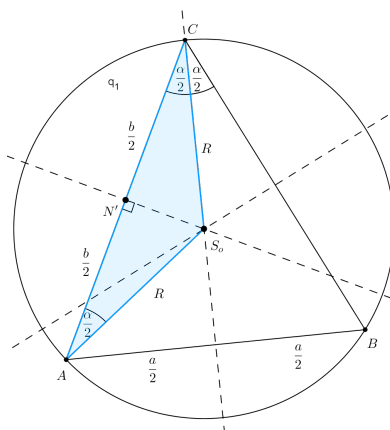
$$\operatorname{tg} 26^\circ 33' 54'' = \frac{r}{6} / \cdot 6$$

$$\frac{1}{12} \cdot 6^3 = \frac{r}{16} \cdot 6^1$$

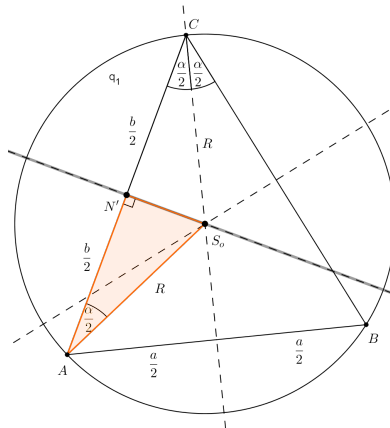
$$3 = r$$

$$r = 3 \text{ cm}$$

Preostaje još odrediti radijus opisane kruznice. Srediste trokutu opisane kruznice nalazi se na simetralama stranica. Pogledajmo sljedecu skicu:



Usredotocimo se na trokut ΔAS_oC (osjencan plavom bojom). Taj trokut je jednakokraca te ga simetrala kraka dijeli na dva pravokutna trokuta (simetrala stranice je okomita na samu stranicu). Promotrimo sada jedan od tih manjih pravokutnih trokuta, neka to bude trokut $\Delta AS_oN'$, skica:



Uocimo da je polovica kraka jednakokravnog trokuta $\frac{b}{2}$ prilezeca kateta kutu $\frac{\alpha}{2}$ u trokutu $\Delta AS_oN'$ dok je radijus opisane kruznice jednakokravnog trokuta R zapravo hipotenuza u trokutu $\Delta AS_oN'$. Te tri velicine mozemo povezati preko trigonometrijske funkcije \cos na sljedeci nacin:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{b}{2}}{R} = \frac{\frac{b}{2}}{1}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{b}{2R}$$

Uvrstimo poznate vrijednosti, slijedi:

$$\begin{aligned} \cos \frac{73^{\circ}44'23''}{2} &= \frac{\frac{10}{b}}{2 \cdot R} \\ \cos \frac{73^{\circ}44'23''}{2} &= \frac{5}{2 \cdot R} \\ \cos 36^{\circ}52'12'' &= \frac{5}{R} \\ \frac{4}{5} &= \frac{5}{R} \quad / \cdot \frac{R \cdot 5}{4} \\ \frac{1}{1} \cdot \frac{R \cdot 5}{4} &= \frac{5}{1} \cdot \frac{R \cdot 5}{4} \\ R &= \frac{25}{4} \\ R &= 6.25 \text{ cm} \end{aligned}$$

Dakle odredili smo da je radijus upisane kruznice r jednak 3 cm, dok je radijus opisane kruznice R jednak 6.25 cm. Time je zadatak rijesen.



 **Zadatak 21:** (str. 141) Povrsina pravokutnika iznosi 45 cm^2 , a kut izmedju dijagonala jednak je 42° . Kolike su duljine stranica pravokutnika?

Rjesenje: Dakle kako nam je zadana povrsina, a izraz za povrsinu pravokutnika jest $P = a \cdot b$ slijedi:

$$\left. \begin{array}{l} P = a \cdot b \\ P = 42 \text{ cm}^2 \end{array} \right\} \Rightarrow 42 = a \cdot b$$

Da bismo mogli odrediti velicine stranica pravokutnika treba nam jos jedna veza izmedju njegovih stranica. U tu svrhu pogledajmo sljedecu skicu:

