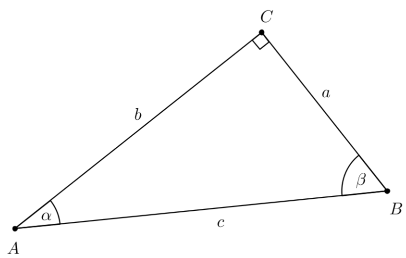
# Rijeseni neki zadaci iz poglavlja 4.4

Prije rijesavanja zadataka prisjetimo se bitnih stvari koje ce nas pratiti tijekom njihovog promatranja.

Definicija: (Trigonometrija pravokutnog trokuta)



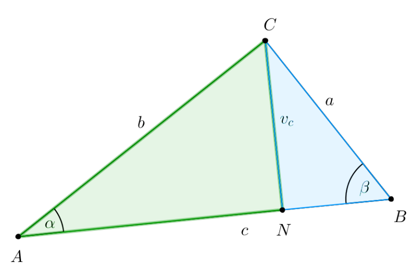

$$\sin\varphi = \frac{\text{kateta nasuprot kuta } \varphi}{\text{hipotenuza}}$$
$$\cos\varphi = \frac{\text{kateta prilezeca kutu } \varphi}{\text{hipotenuza}}$$
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\text{kateta nasuprot kuta } \varphi}{\text{kateta prilezeca kutu } \varphi}$$
$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{\text{kateta prilezeca kutu } \varphi}{\text{kateta nasuprot kuta } \varphi}$$

Gledajuci skicu vrijedi:

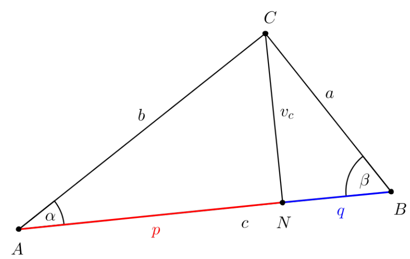
$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$
$$\sin\beta = \frac{b}{c}, \quad \cos\beta = \frac{a}{c}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b}$$

Zadatak 25: (str. 130) Odredi duljine kateta i kutove pravokutnog trokuta ako je $c = 44.5$ cm, $v_c = 21.2$ cm.

Rjesenje: Visinom na hipotenuzu dani pravokutni trokut dijeli se na dva manja pravokutna trokuta:



Da bismo uspjesno rjesili dani zadatak trebali bismo odrediti ili $a$ ili $b$ ili jedan od ovih dvaju dijelova na koje noziste visine na hipotenuzu dijeli samu hipotenuzu. No prisjetimo se Talesovog teorema, odnosno da u pravokutnom trokutu vrijedi $v_c^2 = p \cdot q$, pri cemu su $p$ i $q$ duljine duzina na koje noziste visine na hipotenuzu dijeli hipetenuzu. Za bolje razumijevanje pogledajmo sljedecu sliku:




Imajuci to na umu mozemo zapisati sljedeci sustav:

$$\begin{cases} p + q = c \\ p \cdot q = v_c^2 \end{cases}$$

Uvrstimo poznate velicine $c = 44.5$ cm i $v_c = 21.2$ cm u sustav jednadzbi. Slijedi:

$$\begin{cases} p + q = 44.5 \\ p \cdot q = (21.2)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p + q = 44.5 \\ p \cdot q = 449.44 \end{cases}$$

Iz prve jednadzbe recimo izrazimo recimo $p$, pomocu $q$. Racunam:

$$\begin{cases} p + q = 44.5 \quad \Rightarrow \quad p = 44.5 - q \\ p \cdot q = 449.44 \end{cases}$$

Cinjenicu da vrijedi $p = 44.5 - q$ uvrstimo u drugu jednadzbu, slijedi:

$$\underbrace{p}_{44.5-q} \cdot q = 449.44$$

$$(44.5 - q) \cdot q = 449.44$$

$$44.5q - q^2 = 449.44$$

"Prebacimo" sve na desnu stranu jednadzbe:

$$0 = q^2 - 44.5q + 449.44$$

Zapismo dobivenu kvadratnu jednadzbu u standardnom obliku:

$$q^2 - 44.5q + 449.44 = 0$$

Kvadratna jednadzba rijesava se po izrazu za rjesenja kvadratne jednadzbe:

$$q_1, q_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ispisemo koeficijente kvadratne jednadzbe:

$$a = 1$$

$$b = -44.5$$

$$c = 449.44$$

Racunam:

$$q_1, q_2 = \frac{-(-44.5) \pm \sqrt{(-44.5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 449.44}}{2 \cdot 1}$$
$$q_1, q_2 = \frac{44.5 \pm \sqrt{1980.25 - 1797.76}}{2}$$
$$q_1, q_2 = \frac{44.5 \pm \sqrt{182.49}}{2}$$
$$q_1, q_2 = \frac{44.5 \pm 13.509}{2}$$

Jedno rjesenje kvadratne jednadzbe jest:

$$q_1 = \frac{44.5 - 13.509}{2} = \frac{30.991}{2} = 15.496$$

Dok je drugo rjesenje jednadzbe:

$$q_2 = \frac{44.5 + 13.509}{2} = \frac{58.009}{2} = 29.004$$

Dakle rjesenja dobivene kvadratne jednadzbe su $q_1 = 15.496$ i $q_2 = 29.004$. Primjetimo da je zbroj rjesenja koje smo dobili jednak:

$$q_1 + q_2 = 15.496 + 29.004 = 44.5$$

Sto zapravo znaci da smo odredili i $p_1$ i $p_2$ jer vrijedi:

$$p_1 = 44.5 - q_1 = 44.5 - 13.496 = 29.004$$

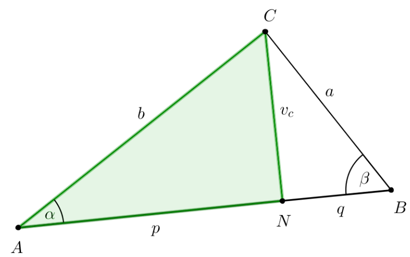
$$p_2 = 44.5 - q_2 = 44.5 - 29.004 = 13.496$$

Drugim rijecim vidimo da su rjesenja simetricna, sto je razmislimo li malo ocekivano, jer kad smo oznacivali $p$ i $q$ nismo naveli kojim redoslijedom smo to ucinili, pa nase rjesenje mora ukljucivati obje mogucnosti sto je i slucaj. Odaberemo jednu od mogucnosti odnosno neka vrijedi:

$$p = 29.004 \text{ cm}$$

$$q = 13.496 \text{ cm}$$

Sad kad smo to odredili usredotocimo se na lijevi manji trokut na sljedecoj slici (osjencan zelenom bojom):




Mozemo uociti da je u tom trokutu $v_c$ nasuprotna kateta kutu $\alpha$, a $p$ prilezeca kateta kutu $\alpha$ sto nas navodi na zakljucak da bi te velicine mogli povezati pomocu funkcije tg na sljedeci nacin:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_c}{p}$$

Obje velicine na desnoj strani su poznate, dakle dalje racunam:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overbrace{v_c}^{21.2}}{\underbrace{p}_{29.004}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{21.2}{29.004}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = 0.731$$

$$\alpha = \operatorname{tg}^{-1} 0.731$$

$$\alpha = 36°9'52''$$

Kako znamo da u pravokutnom trokutu zbroj lutova razlicitih od pravog mora biti $90°$ lako odredimo veliciju kuta $\beta$. Racunam:

$$\alpha + \beta = 90°$$

$$\beta = 90° - \alpha$$

$$\beta = 90° - 36°9'52'' = 53°50'8''$$

Velicine kutova u trokutu su $\alpha = 36°9'52''$ i $\beta 53°50'8''$. Preostaje jos odrediti velicne kateta. U zeleno osjencanom trokuta mozemo uociti da je $b$ hipotenuza tog trokuta, dok je $v_c$ nasuprotna kateta kutu $\alpha$ sto nas navodi na zakljucak da bi te velicine mogli povezati pomocu funkcije sin na sljedeci nacin:

$$\sin\alpha = \frac{v_c}{b}$$

Uvrstim poznate vrijednosti, slijedi:

$$\sin \overbrace{\alpha}^{36^\circ 9' 52''} = \frac{\overbrace{v_c}^{21.2}}{b}$$

$$\sin(36^\circ 9' 52'') = \frac{21.2}{b} \; / \cdot b$$

$$\sin(36^\circ 9' 52'') \cdot b = \frac{21.2}{{}_1\cancel{b}} \cdot \frac{\cancel{b}^1}{1}$$

$$0.59b = 21.2 \; / : 0.59$$

$$b = \frac{21.2}{0.59}$$

$$b = 35.926 \text{ cm}$$

Posto govoriom o pravokutnom trokutu znamo da vrijedi pitagorin poucak kojeg cemo iskoristiti da izracunamo velicinu stranice $a$. Racunam:

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$a^2 = (44.5)^2 - (35.926)^2$$

$$a^2 = 1980.25 - 1290.672$$

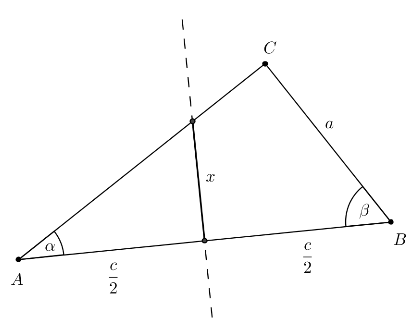
$$a^2 = 689.578 \; / \sqrt{\;}$$

$$a = 26.259 \text{ cm}$$

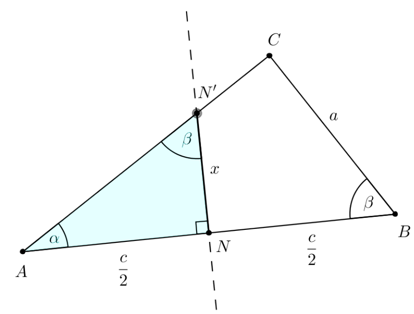
Katete pravokutnog trokuta imaju velicine $a = 26.259$ cm i $b = 35.926$ cm. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 30: (str. 130) U polovistu hipotenuze pravokutnog trokuta podignuta je okomica na hipotenuzu i njezin je odsjecak u trokutu dugacak 3 cm. Ako je $\beta = 57^\circ 30'$, kolike su duljine stranica trokuta?

Rjesenje: Nacrtajmo skicu prema podacima u zadatku:



Duljina dijela pravca unutar trokuta $\Delta ABC$ oznacena je sa $x$ i ima velicinu 3 cm. Mozemo uociti da smo konstruiravsi okomicu u polovistu hipotenuze dobili novi manji pravokutni trokut (osjencan plavom bojom):




Nadalje mozemo uociti jest da taj manji trokut, dakle trokut $\Delta ANN'$ ima jedan zajednicki kut s trokutom $\Delta ABC$ dakle kut kod vrha $A$ ima velicinu $\alpha$. No kako se radi o pravokutnom trokutu drugi kut mora imati istu velicnu kao i kut kod vrha $B$, jer je trokut $\Delta ABC$ pravokutan s kutovima velicine $\alpha$ i $\beta$ pa kako je trokut $\Delta ANN'$ pravokutan ciji je jedan kut velicine $\alpha$ tada drugi kut sigurno mora biti velicine $\beta$.

Ideja jest prvo odrediti velicinu stranice $c$ pa onda koristeci trigonometriju pavokutnog trokuta odrediti velicine preostalih dviju kateta.

Iz trokuta $\Delta ANN'$ mozemo uociti da je $\frac{c}{2}$ nasuprotna kateta kuta $\beta$ dok je $x$ prilezeca kateta kuta $\beta$ sto nas navodi na zakljucak da te tri velicine mozemo povezati preko trigonometrijske funkcije tg na sljedeci nacin:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\frac{c}{2}}{x}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{x}{1}}$$

Rijesimo se dvojnog razlomaka:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{c}{2x}$$

Uvrstim poznate vrijednosti, slijedi:

$$\operatorname{tg}\overbrace{\beta}^{57°30'} = \frac{c}{2\underbrace{x}_{3}}$$

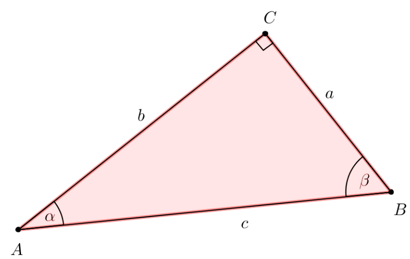
$$\operatorname{tg}57°30' = \frac{c}{2\cdot 3}$$

$$1.569 = \frac{c}{6}\ / \cdot 6$$

$$1.569 \cdot 6 = \frac{c}{{}_1\cancel{6}} \cdot \cancel{6}^1$$

$$9.418 = c$$

Dakle velicina hipotenuze trokuta $\Delta ABC$ jednaka je 9.418 cm. Nadalje trebamo odrediti velicine kateta $a$ i $b$, u tu svrhu promotrimo trokut $\Delta ABC$:




Mozemo uociti da je $b$ nasuprotna kateta kuta $\beta$ dok je $c$ hipotenuza sto nas navodi na zakljucak da te tri velicine mozemo povezati preko trigonometrijske funkcije $\sin$ na sljedeci nacin:

$$\sin\beta = \frac{b}{c}$$

Uvrstim poznate vrijednosti, slijedi:

$$\sin \overbrace{\beta}^{57^\circ 30'} = \frac{b}{\underbrace{c}_{9.418}}$$

$$\sin 57^\circ 30' = \frac{b}{9.418}$$

$$0.843 = \frac{b}{9.418} \ / \cdot 9.418$$

$$0.843 \cdot 9.418 = \frac{b}{{}_1\cancel{9.418}} \cdot \cancel{9.418}^1$$

$$7.943 = b$$

Velicina katete $b$ jednaka je 7.943 cm. Preostaje jos odrediti velicnu katete $a$ sto cemo odrediti preko Pitagorinog poucka. Racunam:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Uvrstim poznate vrijednosti, slijedi:

$$a^2 + \underbrace{b}_{7.943}{}^2 = \underbrace{c}_{9.418}{}^2$$

$$a^2 + (7.942)^2 = (9.418)^2$$

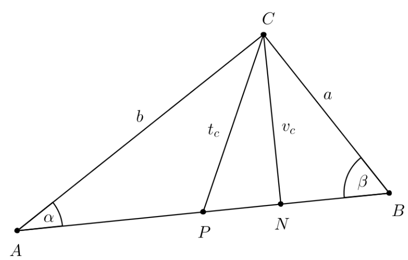
$$a^2 + 63.094 = 88.701$$
$$a^2 = 88.701 - 63.701$$
$$a^2 = 25.607 \ /\sqrt{\ }$$
$$a = 5.06 \text{ cm}$$

Dakle odredili smo i velicinu katete $a$ cime je zadatak rijesen, dakle velicine kateta su $a = 5.06$ cm i $b = 7.943$ cm.

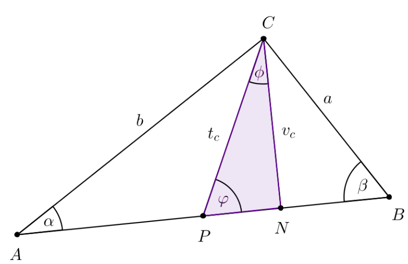
◈

✐ Zadatak 32: (str. 130) Duljine visine na hipotenuzu i tezisnice iz istog vrha pravokutnog trokuta jednake su 4 cm, odnosno 5 cm. Koliki su kutovi tog pravokutnog trokuta?

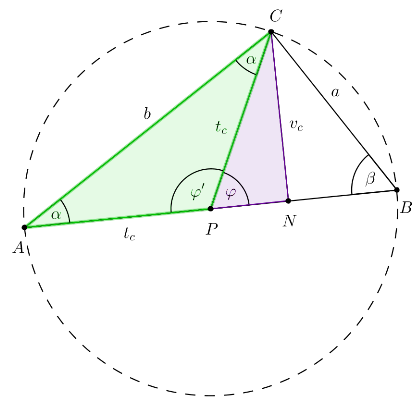
Rjesenje: Nacrtajmo skicu prema podacima u zadatku:




Dakle u zadatku je zadano $v_c = 4$ cm i $t_c = 5$ cm. Uocimo da samo crtajuci skicu dobili novi pravokutni trokut, trokut $\Delta PNC$ (osjencan tamno ljubicastom bojom):




Iz trokuta $\Delta PNC$ mozemo upoterbom trigonometrije odrediti velicine kutova $\varphi$ i $\phi$. Prije nego sto idemo bilo sto racunati prisjetimo se sto vrijedi za srediste pravokutnom trokutu opisane kruznice. Kako prema Talesovom poucku znam da svaki trokut konstruiran nad promjerom kruznice jest pravokutan vrijedi da srediste kruznice mora biti na hipotenuzi tog trokuta, tocnije u samom njezinom polovistu. To nas navodi na zakljucak da je trokut $\Delta APC$ zapravo jednakokracan (tocka $P$ je prema razmatranju zapravo srediste trokutu $\Delta ABC$ opisane kruznice dok su duzine $\overline{AP}$ i $\overline{PC}$ njezini radijusi) (zeleno osjencan trokut):




Dakle ideja jest odrediti velicnu kuta $\varphi$ u trokutu $\Delta PNC$ jer tada cemo moci odrediti i kut $\varphi'$ jer kutovi $\varphi$ i $\varphi'$ u zbroju daju 180°. Uocimo da je u trokutu $\Delta PNC$ $v_c$ kateta nasuprot kuta $\varphi$, dok je $t_c$ hipotenuza. Te velicine mozemo povezati pomocu trigonometrijske funkcije $\sin$ na sljedeci nacin:

$$\sin\varphi = \frac{v_c}{t_c}$$

Uvrstim poznate vrijednosti, slijedi:

$$\sin\varphi = \frac{\overbrace{v_c}^{4}}{\underbrace{t_c}_{5}}$$

$$\sin\varphi = \frac{4}{5}$$

$$\varphi = \sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$\varphi = 53°7'48''$$

Zakljucili smo da vrijedi $\varphi + \varphi' = 180°$, dakle racunam:

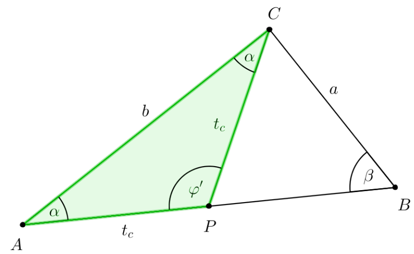
$$\varphi + \varphi' = 180°$$

Uvrstim poznate vrijednosti, slijedi:

$$\underbrace{\varphi}_{53°7'48''} + \varphi' = 180°$$

$$53^\circ 7' 48'' + \varphi' = 180^\circ$$
$$\varphi' = 180^\circ - 53^\circ 7' 48''$$
$$\varphi' = 126^\circ 12' 12''$$

Nadalje promotrimo trokut $\Delta APC$ (zeleno osjencan):



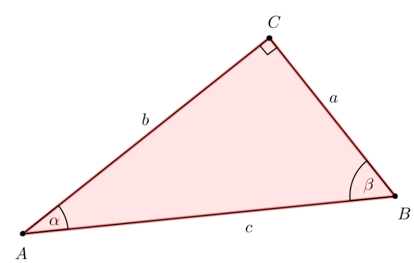

Zakljucili smo da je trokut $\Delta APC$ jednakokracan pa za njegove kutove mora vrijediti $\varphi' + 2\alpha = 180^\circ$. Dakle mozemo odrediti velicinu kuta $\alpha$, racunam:

$$\varphi' + 2\alpha = 180^\circ$$

Uvrstim poznate vrijednosti, slijedi:

$$\underbrace{\varphi'}_{126^\circ 12' 12''} + 2\alpha = 180^\circ$$
$$126^\circ 12' 12'' + 2\alpha = 180^\circ$$
$$2\alpha = 180^\circ - 126^\circ 12' 12''$$
$$2\alpha = 53^\circ 7' 48'' \ / : 2$$
$$\frac{{}^{1}\cancel{2}\alpha}{\cancel{2}_{1}} = \frac{53^\circ 7' 48''}{2}$$
$$\alpha = 26^\circ 33' 54''$$

Preostaje jos odrediti velicinu kuta $\beta$. No znamo da je trokut $\Delta ABC$ pravokutan pa za njegove kutove vrijedi $\alpha + \beta = 90^\circ$.



Racunam:

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

Uvrstim poznate vrijednosti, slijedi:

$$\underbrace{\alpha}_{26^\circ 33' 54''} + \beta = 90^\circ$$

$$26^\circ 33' 54'' + \beta = 90^\circ$$

$$\beta = 90^\circ - 26^\circ 33' 54''$$

$$\beta = 63^\circ 26' 6''$$

Odredili smo velicine kutova $\alpha = 26^\circ 33' 54''$ i $\beta = 63^\circ 26' 6''$ cime je zadatak rijesen.

◈