Rijeseni neki zadaci iz poglavlja 3.1

Prije rijesavanja zadataka prisjetimo se bitnih stvari koje ce nas pratiti tijekom njihovog promatranja.

Tvrdnja: Adicijski teoremi

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

$$\operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x}$$

Tvrdnja: Formule redukcije

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos t \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin t$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$$

$$\sin(\pi + t) = -\sin t \qquad \cos(\pi + t) = -\cos t$$

$$\sin(\pi - t) = \sin t \qquad \cos(\pi - t) = -\cos t$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = -\cos t \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = \sin t$$

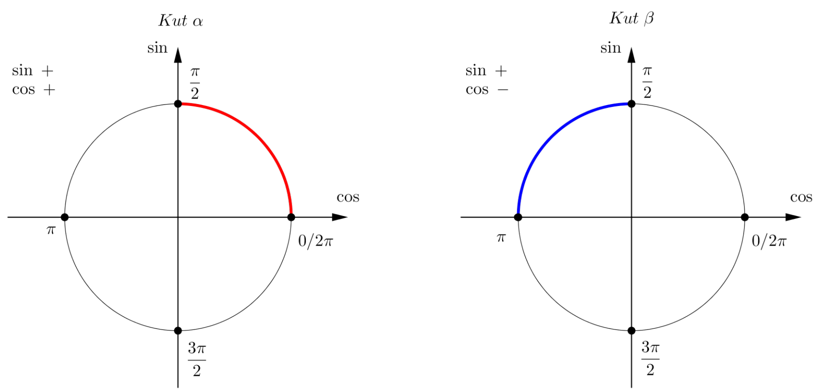
$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\cos t \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\sin t$$

Prisjetim se jos vrijednosti trigonometrijskih funkcicja za istaknute kuteve:

Kut	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} x$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nedef.	0	nedef.	0
$\operatorname{ctg} x$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	nedef.	0	nedef.

Zadatak 9: (str. 66) Koliko je $\sin(\alpha+\beta)$ i $\cos(\alpha+\beta)$ ako je $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{15}$, $\operatorname{ctg}\beta = -\frac{7}{24}$, te $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ i $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$?

Rjesenje: Uocimo prvo u kojim kvadrantima se nalaze dani kutevi na brojevnoj kruznici kako bi kasnije znali odrediti predznake vrijednosti trigonometrijskih funkcija:



Nadalje uocimo da je nas zadatak odrediti cemu je jednako $\sin(\alpha+\beta)$ i $\cos(\alpha+\beta)$. Raspisemo li te izraze po adicijskim teoremima:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

mogu uociti da je zadatak zapravo odrediti cemu su jednaki $\sin x$, $\cos x$, $\sin y$ i $\cos y$. Krenimo od onoga sto je zadano, a to za pocetak neka bude $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{15}$. Znamo da vrijedi $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= \frac{8}{15} \\ \operatorname{tg}\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{8}{15}$$

Pomnozim izraz na desnoj strani s $\cos\alpha$:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{8}{15} \;/\cdot\cos\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{8}{15}\cdot\cos\alpha$$

Prisjetimo se da vrijedi temeljni trigonometrijski identitet:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Primjenim cinjenicu da vrijedi $\sin\alpha = \dfrac{8}{15}\cdot\cos\alpha$ te dalje racunam:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\left(\frac{8}{15}\cdot\cos\alpha\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\frac{64}{225}\cdot\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\frac{64}{225}\cdot\cos^2\alpha + \frac{225}{225}\cdot\cos^2\alpha = 1$$

$$\frac{289}{225}\cdot\cos^2\alpha = 1 \ /\cdot\frac{225}{289}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{225}{289} \ /\sqrt{}$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{15}{17}$$

Posto se kut α nalazi u prvom kvadrantu, a tamo su vrijednosti kosinusa pozitivne, slijedi da je $\cos\alpha = \dfrac{15}{17}$. Sada se lako iz izraza $\sin\alpha = \dfrac{8}{15}\cdot\cos\alpha$ odredi vrijednost od $\sin\alpha$, dakle racunam:

$$\sin\alpha = \frac{8}{15}\cdot\cos\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{8}{{}_1\cancel{15}}\cdot\frac{\cancel{15}^1}{17}$$

$$\sin\alpha = \frac{8}{17}$$

Nadalje pogledajmo sto je jos zadano. To je $\operatorname{ctg}\beta = -\dfrac{7}{24}$. Znamo da vrijedi $\operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}$:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{ctg}\beta &= -\frac{7}{24}\\ \operatorname{ctg}\beta &= \frac{\cos\beta}{\sin\beta}\end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = -\frac{7}{24}$$

Pomnozim izraz na desnoj strani s $\sin\beta$:

$$\frac{\cos\beta}{\sin\beta} = -\frac{7}{24} \ / \cdot \sin\beta$$

$$\cos\beta = -\frac{7}{24} \cdot \sin\beta$$

Prisjetimo se da vrijedi temeljni trigonometrijski identitet:

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$$

Primjenim cinjenicu da vrijedi $\cos\beta = -\frac{7}{24} \cdot \sin\beta$ te dalje racunam:

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$$

$$\sin^2\beta + \left(-\frac{7}{24} \cdot \sin\beta\right)^2 = 1$$

$$\sin^2\beta + \frac{49}{576} \cdot \sin^2\beta = 1$$

$$\frac{576}{576} \cdot \sin^2\beta + \frac{49}{576} \cdot \sin^2\beta = 1$$

$$\frac{625}{576} \cdot \sin^2\beta = 1 \ / \cdot \frac{576}{625}$$

$$\sin^2\beta = \frac{576}{625} \ / \sqrt{\ }$$

$$\sin\beta = \pm\frac{24}{25}$$

Posto se kut β nalazi u drugom kvadrantu, a tamo su vrijednosti sinusa pozitivne, slijedi da je $\sin\beta = \frac{24}{25}$. Sada se lako iz izraza $\cos\beta = -\frac{7}{24} \cdot \sin\beta$ odredi vrijednost od $\cos\beta$, dakle racunam:

$$\cos\beta = -\frac{7}{24} \cdot \sin\beta$$

$$\cos\beta = -\frac{7}{{}_1\cancel{24}} \cdot \frac{\cancel{24}^1}{25}$$

$$\cos\beta = -\frac{7}{25}$$

Time smo odredili sve vrijedsnosti da bi mogli odrediti cemu je jednako $\sin(\alpha+\beta)$ i $\cos(\alpha+\beta)$, dakle prisjetim se da vrijedi:

$$\sin\alpha = \frac{8}{17}, \quad \cos\alpha = \frac{15}{17}, \quad \sin\beta = \frac{24}{25}, \quad \cos\beta = -\frac{7}{25}$$

Te vrijednosti uvrstim u na pocetku raspisane izraze za $\sin(\alpha+\beta)$ i $\cos(\alpha+\beta)$. Racunam:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{8}{17}\cdot\left(-\frac{7}{25}\right) + \frac{15}{17}\cdot\frac{24}{25}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = -\frac{56}{425} + \frac{360}{425}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{304}{425}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{15}{17}\cdot\left(-\frac{7}{25}\right) - \frac{8}{17}\cdot\frac{24}{25}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = -\frac{105}{425} - \frac{192}{425}$$

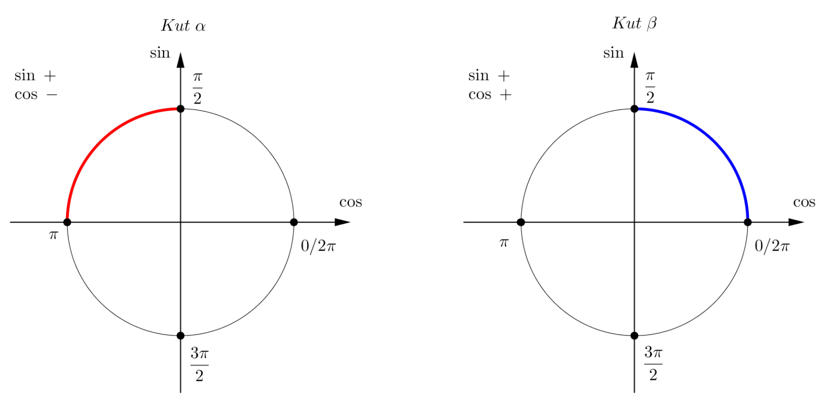
$$\cos(\alpha+\beta) = -\frac{297}{425}$$

Dakle odredili smo da vrijedi $\sin(\alpha+\beta) = \frac{304}{425}$ i $\cos(\alpha+\beta) = -\frac{297}{425}$ i time je zadatak rijesen.

$- \star -$

Zadatak 10: (str. 66) Ako je $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{5}{13}$ i $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \frac{3}{5}$, te $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ i $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, koliko je $\sin(\alpha+\beta)$ i $\sin(\alpha-\beta)$?

Rjesenje: Uocimo prvo u kojim kvadrantima se nalaze dani kutevi na brojevnoj kruznici kako bi kasnije znali odrediti predznake vrijednosti trigonometrijskih funkcija:



Nadalje uocimo da je nas zadatak odrediti cemu je jednako $\sin(\alpha+\beta)$ i $\sin(\alpha-\beta)$. Raspisemo li te izraze po adicijskim teoremima:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

mogu uociti da je zadatak zapravo odrediti cemu su jednaki $\sin x$, $\cos x$, $\sin y$ i $\cos y$.
Krenimo od onoga sto je zadano, a to za pocetak neka bude $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{5}{13}$. Iskoristimo li formulu redukcije $\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \sin t$ vidim da $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ prelazi u $\sin t$. Dakle u nasem slucaju mora vrijediti:

$$\sin\alpha = \frac{5}{13}$$

Prisjetimo se da vrijedi temeljni trigonometrijski identitet:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Primjenim cinjenicu da vrijedi $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ te dalje racunam:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\frac{25}{169} + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{25}{169}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{169}{169} - \frac{25}{169}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{144}{169} \ /\sqrt{\ }$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{12}{13}$$

Posto se kut α nalazi u drugom kvadrantu, a tamo su vrijednosti kosinusa negativne, slijedi da je $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$.
Nadalje pogledajmo sto je jos zadano. To je $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \frac{3}{5}$. Iskoristimo li formulu redukcije $\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \cos t$ vidim da $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$ prelazi u $\cos\beta$. Dakle u nasem slucaju mora vrijediti:

$$\cos\beta = \frac{3}{5}$$

Prisjetimo se da vrijedi temeljni trigonometrijski identitet:

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$$

Primjenim cinjenicu da vrijedi $\cos\beta = \frac{3}{5}$ te dalje racunam:

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$$

$$\sin^2\beta + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2\beta + \frac{9}{25} = 1$$

$$\sin^2\beta = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\sin^2\beta = \frac{25}{25} - \frac{9}{25}$$

$$\sin^2\beta = \frac{16}{25} \;/\sqrt{}$$

$$\sin\beta = \pm\frac{4}{5}$$

Posto se kut β nalazi u prvom kvadrantu, a tamo su vrijednosti sinusa pozitivne, slijedi da je $\sin\beta = \frac{4}{5}$.
Time smo odredili sve vrijednosti da bi mogli odrediti cemu je jednako $\sin(\alpha+\beta)$ i $\sin(\alpha-\beta)$, dakle prisjetim se da vrijedi:

$$\sin\alpha = \frac{5}{13}, \quad \cos\alpha = -\frac{12}{13}, \quad \sin\beta = \frac{4}{5}, \quad \cos\beta = \frac{3}{5}$$

Te vrijednosti uvrstim u na pocetku raspisane izraze za $\sin(\alpha+\beta)$ i $\sin(\alpha-\beta)$.
Racunam:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{5}{13}\cdot\frac{3}{5} + \left(-\frac{12}{13}\right)\cdot\frac{4}{5}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{15}{65} - \frac{48}{65}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = -\frac{33}{65}$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \frac{5}{13}\cdot\frac{3}{5} - \left(-\frac{12}{13}\right)\cdot\frac{4}{5}$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \frac{15}{65} + \frac{48}{65}$$

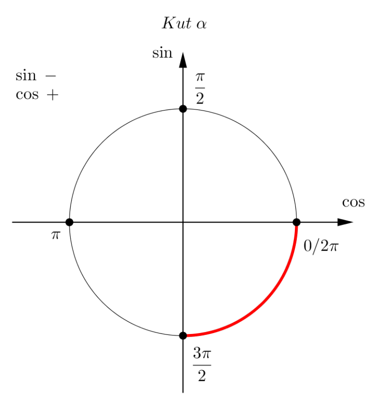
$$\sin(\alpha-\beta)=\frac{63}{65}$$

Dakle odredili smo da vrijedi $\sin(\alpha+\beta)=-\frac{33}{65}$ i $\sin(\alpha-\beta)=\frac{63}{65}$ i time je zadatak rijesen.

$- \star -$

Zadatak 12: (str. 66) Koliko je $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$ i $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$, ako je $\sin\alpha=-\frac{8}{17}$, te $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$?

Rjesenje: Uocimo prvo u kojem kvadrantu se nalazi dani kut na brojevnoj kruznici kako bi kasnije znali odrediti predznake vrijednosti trigonometrijskih funkcija:



Nadalje uocimo da je nas zadatak odrediti cemu je jednako $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$ i $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$. Raspisemo li te izraze po adicijskim teoremima:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

vrijedi:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\alpha$$

Prisjetim se da iz tablice na pocetku dokumenta mogu iscitati da vrijedi $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$. Uvrstim li to u gornje izraze zajedno sa cinjenicom da je u samom zadatku zadano $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ dobijem:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\alpha+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{8}{17}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{2}\cdot\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{8}{17}\right)$$

Uocavam da jedina nepoznata stvar u gornjim izrazima jest $\cos\alpha$. No prisjetimo se da vrijedi temeljni trigonometrijski identitet:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

Primjenim cinjenicu da vrijedi $\sin\alpha=-\frac{8}{17}$ te dalje racunam:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\left(-\frac{8}{17}\right)^2+\cos^2\alpha=1$$

$$\frac{64}{289}+\cos^2\alpha=1$$

$$\cos^2\alpha=1-\frac{64}{289}$$

$$\cos^2\alpha=\frac{289}{289}-\frac{64}{289}$$

$$\cos^2\alpha=\frac{225}{289}\ /\sqrt{}$$

$$\cos\alpha=\pm\frac{15}{17}$$

Posto se kut α nalazi u cetvrtom kvadrantu, a tamo su vrijednosti kosinusa pozitivne, slijedi da je $\cos\beta=\frac{15}{17}$.

Time smo odredili sve vrijednosti da bi mogli odrediti cemu je jednako $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$ i $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$, dakle racunam:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\alpha+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{8}{17}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{15}{17}+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{8}{17}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{15\sqrt{3}}{34}-\frac{8}{34}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{15\sqrt{3}-8}{34}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{2}\cdot\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{8}{17}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{17}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{8}{17}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{15}{34}-\frac{8\sqrt{3}}{34}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{15-8\sqrt{3}}{17}$$

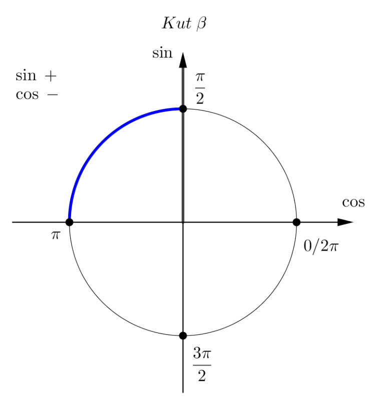
Dakle odredili smo da vrijedi $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{15\sqrt{3}-8}{34}$ i $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{15-8\sqrt{3}}{17}$ i time je zadatak rijesen.

$- \star -$

Zadatak 16: (str. 66) Ako je $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$, $\cos\beta=\frac{3\sqrt{7}}{8}$, te $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$, koliko je $\sin\alpha$?

Napomena: Dakle zadatak je malo krivo postavljen u knjizi, umjesto uvjet na α uvjet mora biti postavljen na β, no tada se to kosi s cinjenicom da mora vrijediti $\cos\beta=\frac{3\sqrt{7}}{8}$, jer za takav β vrijednost kosinusa bi trebala biti negativna, no to je zanemareno kod rijesavanja zadataka!

Rjesenje: Uocimo prvo u kojem kvadrantu se nalazi dani kut na brojevnoj kruznici kako bi kasnije znali odrediti predznake vrijednosti trigonometrijskih funkcija:



Dakle ideja vodilja, posto nam je zadano $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$, jest probati raspisati pomocu adicijskih teorema cemu je jednako $\sin(\alpha+\beta)$ i $\cos(\alpha+\beta)$. Dakle racunam:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

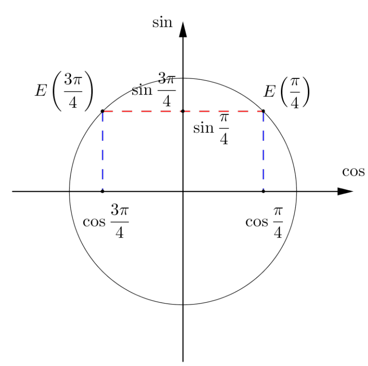
Pokusajmo uvrstiti podatke iz zadatka, $\alpha - \beta = \dfrac{2\pi}{3}$ i $\sin\alpha = -\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$ u gore raspisane izraze, slijedi:

$$\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\alpha \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\alpha \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Promotrim li dobivene izraze mogu uociti da lako odredim cemu je jednako $\sin\dfrac{3\pi}{4}$ i $\cos\dfrac{3\pi}{4}$, te takodjer mogu izracunati vrijednost kosinusa za kut α preko temeljnog tirgonometrijskog identiteta. Probajmo dakle prvo odrediti vrijednosti od $\sin\dfrac{3\pi}{4}$ i $\cos\dfrac{3\pi}{4}$.

Prvo nacrtajmo brojevnu kruznicu i ucrtajmo kuteve $\dfrac{\pi}{4}$ i $\dfrac{3\pi}{4}$, te oznacimo vrijednosti sinusa i kosinusa tih kuteva na koordinatnim osima:



Ono sto mozemo zakljuciti gledajuci sliku jest:

$$\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4}$$

No na prvoj stranici dokumenta iz tablice mogu iscitati da vrijedi $\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ i $\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Imajuci to na umu tada vrijedi:

$$\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Nadalje probajmo odrediti cemu je jednako $\sin\beta$. Da bih to napravio prisjetim se da vrijedi temeljni trigonometrijski identitet:

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$$

Primjenim cinjenicu da vrijedi $\cos\beta = \frac{3\sqrt{7}}{8}$ te dalje racunam:

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$$

$$\sin^2\beta + \left(\frac{3\sqrt{7}}{8}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2\beta + \frac{3^2\cdot\left(\sqrt{7}\right)^2}{8^2} = 1$$

$$\sin^2\beta + \frac{63}{64} = 1$$

$$\sin^2\beta = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\sin^2\beta = \frac{25}{25} - \frac{63}{64}$$

$$\sin^2\beta = \frac{1}{64}\ /\sqrt{\ }$$

$$\sin\beta = \pm\frac{1}{8}$$

Posto se kut β nalazi u drugom kvadrantu, a tamo su vrijednosti sinusa pozitivne, slijedi da je $\sin\beta = \frac{1}{8}$.
Sva ta saznanja sada uvrstim u raspisane izraze:

$$\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\alpha\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8} - \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\alpha\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8} + \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Dakle slijedi:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\alpha\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8} - \cos\alpha\cdot\frac{1}{8} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\alpha\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8} + \sin\alpha\cdot\frac{1}{8} \end{cases}$$

Promotrim li malo dobivene izraze mogu uociti da sam zaprao dobio sustav jednadzbi po nepoznanicama $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$. Posto trebam odrediti cemu je jednako $\sin\alpha$ probat cu se rijesiti nepoznanice $\cos\alpha$. Da bih to postogao pomnozimo prvu jednadzbu s $3\sqrt{7}$. Dakle racunam:

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\alpha \cdot \dfrac{3\sqrt{7}}{8} - \cos\alpha \cdot \dfrac{1}{8} \ / \cdot 3\sqrt{7} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\alpha \cdot \dfrac{3\sqrt{7}}{8} + \sin\alpha \cdot \dfrac{1}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3\sqrt{7} = \sin\alpha \cdot \dfrac{3\sqrt{7}}{8} \cdot 3\sqrt{7} - \cos\alpha \cdot \dfrac{1}{8} \cdot 3\sqrt{7} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\alpha \cdot \dfrac{3\sqrt{7}}{8} + \sin\alpha \cdot \dfrac{1}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{3\sqrt{2}\sqrt{7}}{2} = \sin\alpha \cdot \dfrac{\left(3\sqrt{7}\right)^2}{8} - \cos\alpha \cdot \dfrac{1 \cdot 3\sqrt{7}}{8} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\alpha \cdot \dfrac{3\sqrt{7}}{8} + \sin\alpha \cdot \dfrac{1}{8} \end{cases}$$

Lijevu stranu sredim imajuci na umu $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

$$\begin{cases} \dfrac{3\sqrt{14}}{2} = \sin\alpha \cdot \dfrac{63}{8} - \cos\alpha \cdot \dfrac{3\sqrt{7}}{8} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\alpha \cdot \dfrac{3\sqrt{7}}{8} + \sin\alpha \cdot \dfrac{1}{8} \end{cases}$$

Zbrojim jednadzbe te dobijem:

$$\frac{3\sqrt{14}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sin\alpha \cdot \frac{63}{8} + \left(\cancel{-\cos\alpha \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8}}\right) + \cancel{\cos\alpha \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8}} + \sin\alpha \cdot \frac{1}{8}$$

$$\frac{3\sqrt{14} - \sqrt{2}}{2} = \sin\alpha \cdot \frac{{}^{8}\cancel{64}}{\cancel{8}_1}$$

$$\frac{3\sqrt{14} - \sqrt{2}}{2} = 8 \cdot \sin\alpha \ / : 8$$

$$\frac{\frac{3\sqrt{14} - \sqrt{2}}{2}}{\frac{8}{1}} = \frac{{}^{1}\cancel{8} \cdot \sin\alpha}{\cancel{8}_1}$$

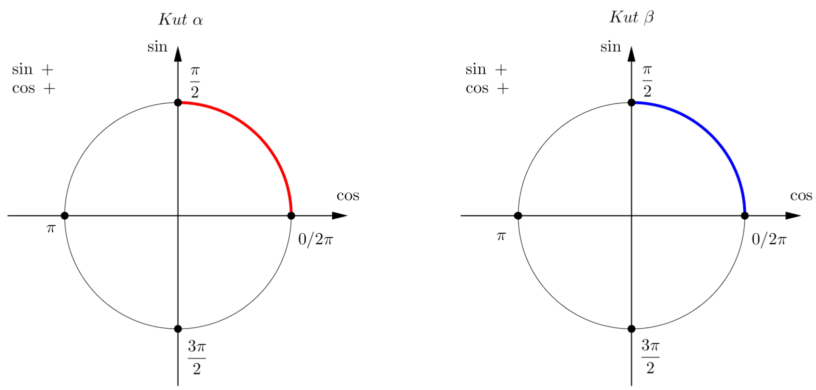
$$\frac{3\sqrt{14} - \sqrt{2}}{16} = \sin\alpha$$

Dakle odredili smo da vrijedi $\sin\alpha = \dfrac{3\sqrt{14} - \sqrt{2}}{16}$ i time je zadatak rijesen.

$- \star -$

Zadatak 19: (str. 67) Ako je $\sin x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin y = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$, te $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < y < \dfrac{\pi}{2}$, onda je $x + y = \dfrac{\pi}{4}$. Dokazi!

Rjesenje: Uocimo prvo u kojim kvadrantima se nalaze dani kutevi na brojevnoj kruznici kako bi kasnije znali odrediti predznake vrijednosti trigonometrijskih funkcija:



Ideja je sljedeca, probajmo raspisati $\sin(x + y)$ te uvrstiti stvari koje su zadane u zadatku. Ako dobijemo da je lijeva strana jednaka desnoj pokazali smo sto smo trebali. Racunam:

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

Uvrstim poznate stvari, dakle $x + y = \dfrac{\pi}{4}$, $\sin x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ i $\sin y = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ pa slijedi:

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \cos y + \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Prisjetim se da na prvoj stranici dokumenta postoji tablica iz koje iscitam cemu je jednako $\sin\dfrac{\pi}{4}$, vrijedi:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \cos y + \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Promotrim li dobiveni izraz mogu uociti da kako bih zavrsio zapoceti racun treban doredititi cemu je jednako $\cos x$ i $\cos y$. No to znam kako uciniti naime prisjetimo se da vrijedi temeljni trigonometrijski identitet:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Primjenim cinjenicu da vrijedi $\sin x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ te dalje racunam:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\frac{1}{5} + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - \frac{1}{5}$$

$$\cos^2 x = \frac{5}{5} - \frac{1}{5}$$

$$\cos^2 x = \frac{4}{5} \ /\sqrt{\ }$$

$$\cos x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Posto se kut x nalazi u prvom kvadrantu, a tamo su vrijednosti kosinusa pozitivne, slijedi da je $\cos x = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.
Isti postupak ponovim i kod odredjivanja $cosy$. Prisjetimo se da vrijedi temeljni trigonometrijski identitet:

$$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$$

Primjenim cinjenicu da vrijedi $\sin y = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ te dalje racunam:

$$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 + \cos^2 y = 1$$

$$\frac{1}{10} + \cos^2 y = 1$$

$$\cos^2 y = 1 - \frac{1}{10}$$

$$\cos^2 y = \frac{10}{10} - \frac{1}{10}$$

$$\cos^2 y = \frac{9}{10} \ /\sqrt{\ }$$

$$\cos x = \pm\frac{3}{\sqrt{10}}$$

Posto se kut y nalazi u prvom kvadrantu, a tamo su vrijednosti kosinusa pozitivne, slijedi da je $\cos x = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

Dakle sada kada sam odredio cemu je jednako $\cos x$ i $\cos y$ dovrsim zapoceti racun uvrstavajuci dobivene vrijesdnosti u izraz:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \cos y + \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Racunam:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1 \cdot 3}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} + \frac{2 \cdot 1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}}$$

Imajuci na umu da vrijedi $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ dalje slijedi:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{\sqrt{50}} + \frac{2}{\sqrt{50}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{\sqrt{2 \cdot 25}} = \frac{5}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{25}} = \frac{{}^{1}\cancel{5}}{\sqrt{2} \cdot \cancel{5}_{1}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Izmonozim unakrsno ove razlomke te dobijem:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 1$$

$$2 = 2$$

Kako je lijeva strana jednaka desnoj jednakost je dokazana, cime je zadatak rijesen.

$- \star -$

Zadatak 27: (str. 67) Ako je $x + y = \frac{\pi}{2}$, $x \neq 0$, koliko je $\frac{\operatorname{tg}(x-y)}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}$?

Rjesenje: Za pocetak probajmo srediti trazeni izraz $\frac{\operatorname{tg}(x-y)}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}$ kako bi znali sto zapravo trebamo odrediti kako bi izracunali cemu je on jednak. Pri tome koristim adicijski teorem za tangens:

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

Racunam:

$$\frac{\operatorname{tg}(x-y)}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y} = \frac{\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y} = \frac{\frac{{}^{1}\cancel{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}}{\frac{\cancel{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}_{1}}{1}} = \frac{\frac{1}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}}{\frac{1}{1}}$$

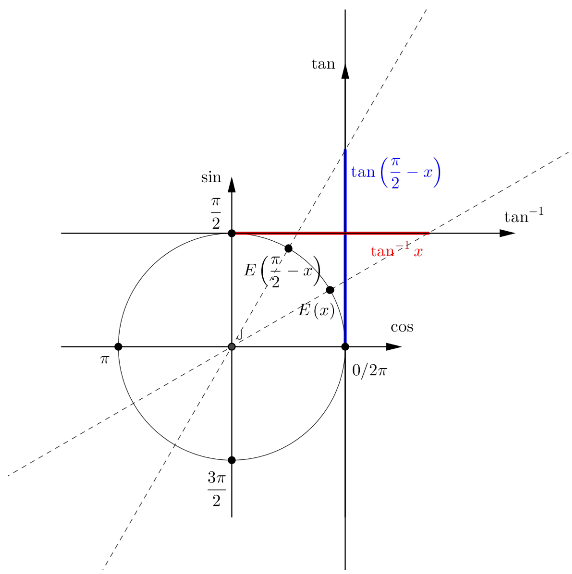
$$\frac{\operatorname{tg}(x-y)}{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y}$$

Dakle trebali bi odrediti cemu je jednako $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{tg} y$. Probajmo se sada malo pozbaviti s jednakoscu danoj u zadatku, $x+y=\frac{\pi}{2}$. Izrazimo y pomocu x iz te jednakosti:

$$x+y=\frac{\pi}{2}$$

$$y=\frac{\pi}{2}-x$$

Kako trebamo odrediti cemu je jednako $\operatorname{tg} y$ izmjedju ostaloga, imajuci na umu $y=\frac{\pi}{2}-x$ zapravo trebam odrediti cemu je jednako $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$. No to me podsjeca na formule redukcije. Promotrimo sljedecu sliku:



Napomena: Dakle posto su slike konstruirane pomocu Geogebre, a u njima ne mogu definirati fukcije tg i ctg koristim oznaku $\tan$ za tangens i oznaku $\tan^{-1}$ za kotangens!

Dakle iz slike mogu zakljuciti da mora vrijediti:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{ctg}x$$

Prisjetim se da vrijedi $\operatorname{ctg} x=\frac{1}{\operatorname{tg} x}$. Imajuci to na umu slijedi:

$$\operatorname{tg}y=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\operatorname{tg}x}$$

Dakle s tim se saznanjem vratim u izraz koji trebam odrediti, dakle slijedi:

$$\frac{\operatorname{tg}(x-y)}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

$$\frac{\operatorname{tg}(x-y)}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y} = \frac{1}{1 +^{1} \cancel{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cancel{\operatorname{tg} x}_{1}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1}} - \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Dakle dobili smo da vrijedi $\frac{\operatorname{tg}(x-y)}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y} = \frac{1}{2}$, cime je zadatak rijesen.

$- \star -$

<u>Zadatak 28</u>: (str. 67) Ako je $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, koliko je $(1 + \operatorname{tg}\alpha)(1 + \operatorname{tg}\beta)$?

<u>Rjesenje</u>: Dakle ideja je prvo raspisati izraz koji trebamo odredit. Racunam:

$$(1 + \operatorname{tg}\alpha)(1 + \operatorname{tg}\beta) = 1 + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$$

Ono sto mogu uociti ako promotrim dobiveni izraz te adicijski teorem za tangens, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$, vidim da se neki izrazi podudaraju. Pobajmo dakle odrediti cemu je jednako $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$. Racunam:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

Procitam vrijednost fukcije tangens za kut $\frac{\pi}{4}$ s prve stranice dokumenta, dakle vrijedi $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$. Imajuci to na umu racunam dalje:

$$1 = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} \; / \cdot 1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$$

$$1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$$

S tim saznanjem vratim se u izraz koji trebam izracunati:

$$(1 + \operatorname{tg}\alpha)(1 + \operatorname{tg}\beta) = 1 + \underbrace{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}_{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$$

$$(1 + \operatorname{tg}\alpha)(1 + \operatorname{tg}\beta) = 1 + 1 \cancel{- \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} + \cancel{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

$$(1 + \operatorname{tg}\alpha)(1 + \operatorname{tg}\beta) = 1 + 1 = 2$$

Dakle izracunali smo da vrijedi $(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta)=2$, cime je zadatak rijesen.

$- \star -$

<u>Zadatak 29</u>: (str. 67) Ako je $x+y=\dfrac{3\pi}{4}$, koliko je $(1+\operatorname{ctg}\alpha)(1+\operatorname{ctg}\beta)$?

<u>Rjesenje</u>: Dakle ideja je prvo raspisati izraz koji trebamo odredit. Racunam:

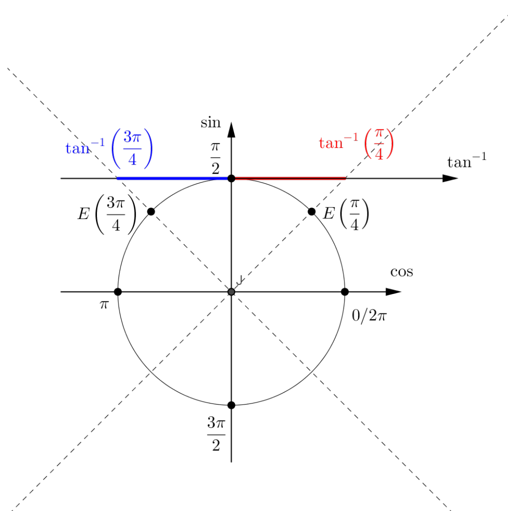
$$(1+\operatorname{ctg}\alpha)(1+\operatorname{ctg}\beta)=1+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta$$

Ono sto mogu uociti ako promotrim dobiveni izraz te adicijski teorem za tangens, $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$, vidim da se neki izrazi podudaraju. Pobajmo dakle odrediti cemu je jednako $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$. Racunam:

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$$

Probajmo dakle odrediti vrijednost od $\operatorname{ctg}\dfrac{3\pi}{4}$. Prvo nacrtajmo brojevnu kruznicu i ucrtajmo kuteve $\dfrac{\pi}{4}$ i $\dfrac{3\pi}{4}$, te oznacimo vrijednosti sinusa i kosinusa tih kuteva na koordinatnim osima:



<u>Napomena:</u> Dakle posto su slike konstruirane pomocu Geogebre, a u njima ne mogu definirati fukciju ctg koristim oznaku $\tan^{-1}$ za tangens.

Ono sto mozemo zakljuciti gledajuci sliku jest:

$$\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$$

No na prvoj stranici dokumenta iz tablice mogu iscitati da vrijedi $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1$. Imajuci to na umu tada vrijedi:

$$\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} = -1$$

Imajuci to na umu racunam dalje:

$$-1 = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta} \;/ \cdot \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta$$

$$-\left(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta\right) = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta - 1 \;/ \cdot (-1)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = -\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta + 1$$

S tim saznanjem vratim se u izraz koji trebam izracunati:

$$(1 + \operatorname{ctg}\alpha)(1 + \operatorname{ctg}\beta) = 1 + \underbrace{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}_{-\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta+1} + \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta$$

$$(1 + \operatorname{ctg}\alpha)(1 + \operatorname{ctg}\beta) = 1 + \cancel{-\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta} + 1 + \cancel{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta}$$

$$(1 + \operatorname{ctg}\alpha)(1 + \operatorname{ctg}\beta) = 1 + 1 = 2$$

Dakle izracunali smo da vrijedi $(1 + \operatorname{ctg}\alpha)(1 + \operatorname{ctg}\beta) = 2$, cime je zadatak rijesen.

$- \star -$

Zadatak 30: (str. 67) Ako je $\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y = 25$, $\operatorname{ctg}x + \operatorname{ctg}y = 30$ koliko je $\operatorname{tg}(x+y)$?

Rjesenje: Dakle ideja je prvo raspisati izraz koji trebamo odrediti. Racunam:

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{1 - \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}y}$$

Dakle odmah prepoznajem da je vrijednost izraza u brojniku vec dana u zadatku. Potrebno je samo odrediti cemu je jednako $\operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}y$. U tu svrhu probajmo raspisati drugi podatak dan u zadatku, a to je $\operatorname{ctg}x + \operatorname{ctg}y = 30$. Imajuci na umu da vrijedi $\operatorname{ctg}x = \frac{1}{\operatorname{tg}x}$ racunam:

$$\operatorname{ctg}x + \operatorname{ctg}y = 30$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg}x} + \frac{1}{\operatorname{tg}y} = 30$$

Svedemo na zajednicki nazivnik jednak $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$, dakle slijedi:

$$\frac{1 \cdot \operatorname{tg} y + 1 \cdot \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} = 30$$

$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} = 30$$

Prepoznajem da je vrijednost izraza u brojniku vec dana u zadataku, donosno da vrijedi $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 25$. Imajuci to na umu dalje racunam:

$$\frac{25}{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} = 30 \ / : 25$$

$$\frac{\frac{{}^{1}\cancel{25}}{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}}{\frac{\cancel{25}_{1}}{1}} = \frac{{}^{6}\cancel{30}}{\cancel{25}_{5}}$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} = \frac{6}{5} \ /^{-1}$$

$$\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}\right)^{-1} = \left(\frac{6}{5}\right)^{-1}$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = \frac{5}{6}$$

Sada kada sam to izracunao vratim se na izraz ciju vrijednost trebam odrediti:

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

Uvrstim stvari koje su zadane i koje sam odredio:

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} = \frac{25}{1 - \frac{5}{6}}$$

Svedem na zajdenicki nazivnik razlomke u nazivniku:

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{25}{\frac{6}{6} - \frac{5}{6}} = \frac{\frac{25}{1}}{\frac{1}{6}} = \frac{25 \cdot 6}{1} = \frac{150}{1} = 150$$

Dakle odredili smo da je $\operatorname{tg}(x+y) = 150$, cime smo rijesili zadatak.

$- \star -$

<u>Zadatak 32</u>: (str. 67) Ako je $\cos(x+y) = \frac{1}{3}$, $\cos(x-y) = \frac{1}{5}$, koliko je $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$?

Rjesenje: Dakle ideja je prvo raspisati izraz koji trebamo odrediti. Imajuci na umu da vrijedi $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ racunam:

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y}$$

Uocavam da nam je cilj odrediti cemu su jednaki izrazi $\sin x \cdot \sin y$ i $\cos x \cdot \cos y$. U tu svrhu raspisimo izraze dane u zadatku i to $\cos(x+y) = \frac{1}{3}$ i $\cos(x-y) = \frac{1}{5}$. Raspisujem prema adicijsom teoremu za kosinus:

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$

Dakle slijedi:

$$\cos(x+y) = \frac{1}{3}$$

$$\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{3}$$

$$\cos(x-y) = \frac{1}{5}$$

$$\cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{5}$$

Na taj nacin dobio sam sljedeci sustav jednadzbi:

$$\begin{cases} \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{3} \\ \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Pokusajmo prvo zbrojiti te dvije jednadzbe, racunam:

$$\cos x \cdot \cos y \cancel{- \sin x \cdot \sin y} + \cos x \cdot \cos y + \cancel{\sin x \cdot \sin y} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$$

Svedem razlomke na desnoj strani na zajednicki nazivnik:

$$\cos x \cdot \cos y + \cos x \cdot \cos y = \frac{1 \cdot 5 + 1 \cdot 3}{15}$$

$$2 \cdot \cos x \cdot \cos y = \frac{5+3}{15} = \frac{8}{15}$$

$$2 \cdot \cos x \cdot \cos y = \frac{8}{15} \; / : 2$$

$$\frac{{}^{1}\cancel{2} \cdot \cos x \cdot \cos y}{\cancel{2}_{1}} = \frac{\frac{{}^{4}\cancel{8}}{15}}{\frac{\cancel{2}_{1}}{1}} \; / : 2$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{4}{15}$$

Uocavam da smo odredili iznos jednog od izraza koji se pojavljuje u zadatku. Vratimo se natrag na sustav jednadzbi:

$$\begin{cases} \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{3} \\ \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Pokusajmo sada oduzeti te dvije jednadzbe, racunam:

$$\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y - (\cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y) = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$$

Svedem razlomke na desnoj strani na zajednicki nazivnik:

$$\cancel{\cos x \cdot \cos y} - \sin x \cdot \sin y \cancel{- \cos x \cdot \cos y} - \sin x \cdot \sin y = \frac{1 \cdot 5 - 1 \cdot 3}{15}$$

$$-2 \cdot \sin x \cdot \sin y = \frac{5-3}{15} = \frac{2}{15}$$

$$-2 \cdot \sin x \cdot \sin y = \frac{2}{15} \ / : (-2)$$

$$\frac{{}^{1}\cancel{-2} \cdot \sin x \cdot \sin y}{\cancel{-2}_{1}} = \frac{\frac{{}^{1}\cancel{2}}{15}}{\frac{\cancel{-2}_{1}}{1}} \ / : 2$$

$$\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{15}$$

Uocavam da smo time odredili i drugi iznos izraza koji se pojavljuje u zadatku. Vratimo se na pocetni izraz imajuci na umu dobivene vrijednosti:

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = \frac{\sin x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y} = \frac{\frac{4}{{}^{1}\cancel{15}}}{-\frac{1}{\cancel{15}_{1}}} = \frac{4}{-1} = -4$$

Dakle vidimo da vrijedi $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = -4$, cime smo rijesili zadatak.

$- \star -$

Zadatak 33: (str. 67) Koliko je $\cos(a-b)$ ako je $\sin a + \sin b = 1$ i $\cos a + \cos b = \sqrt{2}$?

Rjesenje: Ideja je prvo raspisati izraz koji trebamo odrediti, dakle $\cos(a-b)$. Imajuci na umu adicijski teorem za kosinus:

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$

Slijedi:

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

Uocavam da trebam odrediti cemu su jednaki izrazi $\cos a \cdot \cos b$ i $\sin a \cdot \sin b$. Da bih to ucinio prisjetim se identiteta $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. To mi daje ideju da pokusam kvadrirati izraze:

$$\sin a + \sin b = 1$$

$$\cos a + \cos b = \sqrt{2}$$

Racunam:

$$\sin a + \sin b = 1 \; /^2$$

$$(\sin a + \sin b)^2 = 1^2$$

$$\sin^2 a + 2 \cdot \sin a \cdot \sin b + \sin^2 b = 1$$

Nadalje kvadriram i drugi izraz:

$$\cos a + \cos b = \sqrt{2} \; /^2$$

$$(\cos a + \cos b)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$$

$$\cos^2 a + 2 \cdot \cos a \cdot \cos b + \cos^2 b = 2$$

Time sam dobio sljedeci sustav jednadzbi:

$$\begin{cases} \sin^2 a + 2 \cdot \sin a \cdot \sin b + \sin^2 b = 1 \\ \cos^2 a + 2 \cdot \cos a \cdot \cos b + \cos^2 b = 2 \end{cases}$$

Pokusajmo zbrojiti te dvije jednadzbe:

$$\sin^2 a + 2 \cdot \sin a \cdot \sin b + \sin^2 b + \cos^2 a + 2 \cdot \cos a \cdot \cos b + \cos^2 b = 1 + 2$$

Sredim malo dobiveni izraz imajuci na umu temeljni trigonometrijski identitet $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\underbrace{\sin^2 a + \cos^2 a}_{1} + 2 \cdot \sin a \cdot \sin b + \underbrace{\sin^2 b + \cos^2 b}_{1} + 2 \cdot \cos a \cdot \cos b = 3$$

$$1 + 2 \cdot \sin a \cdot \sin b + 1 + 2 \cdot \cos a \cdot \cos b = 3$$

$$2 \cdot \sin a \cdot \sin b + 2 \cdot \cos a \cdot \cos b = 3 - 1 - 1$$

$$2 \cdot \sin a \cdot \sin b + 2 \cdot \cos a \cdot \cos b = 1$$

Izlucim 2 na lijevoj strani:

$$2(\sin a \cdot \sin b + \cdot \cos a \cdot \cos b) = 1 \; / : 2$$

$$\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2}$$

No ako malo promotrim lijevu stranu izraza mogu uociti da se radi i adicijskom teoremu za kosinus:

$$\cos{(x \pm y)} = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$

Drugim rijecima vrijedi:

$$\cos{(a-b)} = \frac{1}{2}$$

Dakle izracunali smo da mora vrijediti $\cos{(a-b)} = \dfrac{1}{2}$, cime je zadatak rijesen.

$- \star -$

Zadatak 35: 5) (str. 67) Dokazi sljedeci identitet:

$$\frac{\sin{(x-y)}}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y} = \cos x \cdot \cos y$$

Rjesenje: Raspisat cemo lijevu stranu imajuci na umu identitet $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ i adicijski teorem za sinus:

$$\sin{(x \pm y)} = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$$

Dakle racunam:

$$\frac{\sin{(x-y)}}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y} = \frac{\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y}{\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\sin y}{\cos y}}$$

Svedem razlomke u nazivniku na yajednicki nazivnik i to $\cos x \cdot \cos y$. Slijedi:

$$\frac{\sin{(x-y)}}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y} = \frac{\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y}{\dfrac{\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y}} = \frac{\dfrac{\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y}{1}}{\dfrac{\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y}}$$

Uocavam da se brojnici dobivenog dvojnog razlomka mogu pokratiti pa ucinim to:

$$\frac{\sin{(x-y)}}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y} = \frac{\dfrac{{}^1\cancel{\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y}}{1}}{\dfrac{\cancel{\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y}_1}{\cos x \cdot \cos y}} = \frac{\dfrac{1}{1}}{\dfrac{1}{\cos x \cdot \cos y}}$$

$$\frac{\sin{(x-y)}}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y} = \cos x \cdot \cos y$$

Usporedim li dobiveno s desnom stranom pocetnog izraza vidim da se one podudaraju pa je time zadatak rijesen.

$- \star -$