Rijeseni neki zadaci iz poglavlja 2.4

Prije rijesavanja zadataka prisjetimo se bitnih stvari koje ce nas pratiti tijekom njihovog promatranja.

Definicija Neka je dana kvadratna jednadzba $ax^2 + bx + c = 0$. Tada izraz oblika:

$$D = b^2 - 4ac$$

nazivamo diskriminantom te kvadratne jednadzbe. Nadalje vrijedi:
Ako je $D > 0$ tada kvadratna jednadzba ima 2 razlicita realna rjesenja.
Ako je $D = 0$ tada kvadratna jednadzba ima 1 dvostruko realno rjesenje.
Ako je $D < 0$ tada kvadratna jednadzba ima 2 razlicita kompleksno konjugirana kompleksna rjesenja.

Definicija Neka je dana kvadratna jednadzba $ax^2 + bx + c = 0$. Tada izraze oblika:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

pri cemu su x_1 i x_2 rjesenja dane kvadratne jednadzbe, zovemo Viete-ove formule.

Zadatak 4: 4) (str. 55) Ne rjesavajuci kvadratnu jednadzbu $5x^2 - x + 2 = 0$ izracunaj:

$$x_1^{-4} + x_2^{-4}$$

pri cemu su x_1 i x_2 rjesenja dane kvadratne jednadzbe.

Rjesenje: Pocnimo tako da ispisemo koeficijente kvadratne jednadzbe
$5x^2 - x + 2 = 0$ zadane u zadatku:

$$a = 5$$

$$b = -1$$

$$c = 2$$

Nadalje odredimo cemu su jednaki izrazi zvani Viete-ove formule:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-1)}{5} = \frac{1}{5}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{5}$$

Dakle izracnali smo da mora vrijediti:

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{5}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{5}$$

Kako ja moram odrediti cemu je jednako $x_1^{-4} + x_2^{-4}$, dok s druge stane znam cemu je jedako $x_1 + x_2$ i $x_1 \cdot x_2$ ideja jest da izraz $x_1^{-4} + x_2^{-4}$ pokusam prikazati pomocu izraza $x_1 + x_2$ i $x_1 \cdot x_2$. Pa probajmo to uciniti. Prisjetimo se da vrijedi sljedeci identitet $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Imajuci to na umu racunam:

$$x_1^{-4} + x_2^{-4} = \frac{1}{x_1^4} + \frac{1}{x_2^4}$$

Da bih izracunao danu sumu svodim razlomke na zajednicki nazivnik koji iznosi $x_1^4 \cdot x_2^4$:

$$x_1^{-4} + x_2^{-4} = \frac{1}{x_1^4} + \frac{1}{x_2^4} = \frac{x_2^4 \cdot 1 + x_1^4 \cdot 1}{x_1^4 \cdot x_2^4} = \frac{x_2^4 + x_1^4}{x_1^4 \cdot x_2^4} = \frac{x_1^4 + x_2^4}{x_1^4 \cdot x_2^4}$$

Sredim nazivnik dobivenog izraza prema poznatom identitetu $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$:

$$x_1^{-4} + x_2^{-4} = \frac{x_1^4 + x_2^4}{(x_1 \cdot x_2)^4}$$

U nazivniku prepznajem Viete-ovu fromulu $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, dok u brojniku stvari izgledaju malo gore, odnosno uocavam da cu izraz u nazivniku morati malo srediti. Promotrim li Viete-ove formule $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ i $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ uvidjam da se u njima pojavljuju nepoznanice x_1 i x_2 kao potencije stupnja 1.
Razmislim li malo kako doci od potencije stupnja 1, primjerice x_1, do potencije stupnja 4, dakle x_1^4, ubrzo dolazim do zakljucka da je jedni moguci nacin kvadriranje nepoznanice x_1 kako bi dobio potenciju x_1^2 te nakon toga kvadriranje potencije x_1^2 kako bi dobio potenciju x_1^4. Kako meni treba $x_1^4 + x_2^4$ probajmo 2 puta kvadrirati izraz $x_1 + x_2$. Dakle imajuci na umu identitet $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ racunam:

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2 \cdot x_1 x_2 + x_2^2$$

Sredim malo dobiveni izraz tako da mi na lijevoj strani ostanu samo kvadrati nepoznanica x_1 i x_2:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 x_2$$

Promotrim li doboveni izraz uocavam da se na desnoj stani nalaze Viete-ove formule, $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ i $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ koje znam izracunati. Nadalje da bih dobio potencije 4 stupnja x_1^4 i x_2^4 dobiveni izraz kvadriram jos jednom, dakle racunam:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 x_2 \ /^2$$

$$\left(x_1^2+x_2^2\right)^2=\Big((x_1+x_2)^2-2\cdot x_1x_2\Big)^2$$

Obadvije strane raspisem imajuci identitet $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ na umu. Dakle slijedi:

$$\left(x_1^2\right)^2+2\cdot x_1^2x_2^2+\left(x_2^2\right)^2=\Big((x_1+x_2)^2\Big)^2-2\cdot(x_1+x_2)^2\cdot(2x_1x_2)+(2x_1x_2)^2$$

$$x_1^4+2\cdot x_1^2x_2^2+x_2^4=(x_1+x_2)^4-4\cdot(x_1+x_2)^2\cdot(x_1x_2)+4\cdot(x_1x_2)^2$$

Sredim lijevu stranu dobivenog izraza prema poznatom identitetu
$(a\cdot b)=a^n\cdot b^n$:

$$x_1^4+2\cdot(x_1x_2)^2+x_2^4=(x_1+x_2)^4-4\cdot(x_1+x_2)^2\cdot(x_1x_2)+4\cdot(x_1x_2)^2$$

Nadalje prebacim izraz $2\cdot(x_1x_2)^2$ na desnu stranu:

$$x_1^4+x_2^4=(x_1+x_2)^4-4\cdot(x_1+x_2)^2\cdot(x_1x_2)+\underline{4\cdot(x_1x_2)^2}-\underline{2\cdot(x_1x_2)^2}$$

Oduzmem podcrtane stvari jer vidim sa da su to istovrsne potencije te dobijem:

$$x_1^4+x_2^4=(x_1+x_2)^4-4\cdot(x_1+x_2)^2\cdot(x_1x_2)+2\cdot(x_1x_2)^2$$

Promotrim li dobiveni izraz uocavam da sam na lijevoj strani dobio upravo ono sto sam trebao, dok se na lijevoj strani nalaze samo izrazi oblike x_1+x_2 i x_1x_2 koje prepoznajem kao Viete-ove formule.
Vratim li se na pocetni zadatak sada znam da mora vrijediti:

$$x_1^{-4}+x_2^{-4}=\frac{x_1^4+x_2^4}{(x_1\cdot x_2)^4}=\frac{(x_1+x_2)^4-4\cdot(x_1+x_2)^2\cdot(x_1x_2)+2\cdot(x_1x_2)^2}{(x_1\cdot x_2)^4}$$

Dakle vidim da vrijedi:

$$x_1^{-4}+x_2^{-4}=\frac{(x_1+x_2)^4-4\cdot(x_1+x_2)^2\cdot(x_1x_2)+2\cdot(x_1x_2)^2}{(x_1\cdot x_2)^4}$$

Prisjetim se da sam izracunao da vrijedi $x_1+x_2=\dfrac{1}{5}$ i $x_1\cdot x_2=\dfrac{2}{5}$, pa sada sve izraze oblika x_1+x_2 zamijenim s $\dfrac{1}{5}$ dok s druge strane sve izraze oblike $x_1\cdot x_2$ zamijenim s $\dfrac{2}{5}$. Racunam dalje:

$$x_1^{-4}+x_2^{-4}=\frac{(\overbrace{x_1+x_2}^{\frac{1}{5}})^4-4\cdot(\overbrace{x_1+x_2}^{\frac{1}{5}})^2\cdot(\overbrace{x_1x_2}^{\frac{2}{5}})+2\cdot(\overbrace{x_1x_2}^{\frac{2}{5}})^2}{(\underbrace{x_1x_2}_{\frac{2}{5}})^4}$$

$$x_1^{-4}+x_2^{-4}=\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^4-4\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)+2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2}{\left(\frac{2}{5}\right)^4}$$

Imajuci na umu identitet $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$ nastavljam racun:

$$x_1^{-4}+x_2^{-4}=\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^4-4\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\frac{2}{5}+2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2}{\left(\frac{2}{5}\right)^4}=\frac{\frac{1^4}{5^4}-4\cdot\frac{1^2}{5^2}\cdot\frac{2}{5}+2\cdot\frac{2^2}{5^2}}{\frac{2^4}{5^4}}$$

$$x_1^{-4}+x_2^{-4}=\frac{\frac{1^4}{5^4}-4\cdot\frac{1^2}{5^2}\cdot\frac{2}{5}+2\cdot\frac{2^2}{5^2}}{\frac{2^4}{5^4}}=\frac{\frac{1}{625}-4\cdot\frac{1}{25}\cdot\frac{2}{5}+2\cdot\frac{4}{25}}{\frac{16}{625}}$$

$$x_1^{-4}+x_2^{-4}=\frac{\frac{1}{625}-\frac{4}{1}\cdot\frac{1}{25}\cdot\frac{2}{5}+\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{25}}{\frac{16}{625}}=\frac{\frac{1}{625}-\frac{8}{125}+\frac{8}{25}}{\frac{16}{625}}$$

Svedem razlomke u brojniku na zajednicki nazivnik 625:

$$x_1^{-4}+x_2^{-4}=\frac{\frac{1}{625}-\frac{8}{125}+\frac{8}{25}}{\frac{16}{625}}=\frac{\frac{1-5\cdot 8+25\cdot 8}{625}}{\frac{16}{625}}=\frac{\frac{1-40+200}{625}}{\frac{16}{625}}=\frac{\frac{161}{625}}{\frac{16}{625}}$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$x_1^{-4}+x_2^{-4}=\frac{\frac{161}{{}^{1}\cancel{625}}}{\frac{16}{\cancel{625}_1}}=\frac{\frac{161}{1}}{\frac{16}{1}}$$

Rijesim se dvojnog razlomka te dobijem rjesenje:

$$x_1^{-4}+x_2^{-4}=\frac{161}{16}$$

$- \star -$

<u>Zadatak 9</u>: 2) (str. 55) Ne rjesavajuci kvadratnu jednadzbu $5x^2+2x-2=0$ izracunaj:

$$\frac{x_1}{x_1^2-1}+\frac{x_2}{x_2^2-1}$$

pri cemu su x_1 i x_2 rjesenja dane kvadratne jednadzbe.

Rjesenje: Pocnimo tako da ispisemo koeficijente kvadratne jednadzbe $5x^2 + 2x - 2 = 0$ zadane u zadatku:

$$a = 5$$

$$b = 2$$

$$c = -2$$

Nadalje odredimo cemu su jednaki izrazi zvani Viete-ove formule:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{2}{5}$$

Dakle izracnali smo da mora vrijediti:

$$x_1 + x_2 = -\frac{2}{5}$$

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{2}{5}$$

Nadalje idem probam malo srediti izraz ciji iznos trebam odrediti. Razlomke u sumi svedem na zajednicki nazivnik koji je jednak $\left(x_1^2 - 1\right)\cdot\left(x_2^2 - 1\right)$. Racunam:

$$\frac{x_1}{x_1^2 - 1} + \frac{x_2}{x_2^2 - 1} = \frac{x_1 \cdot \left(x_2^2 - 1\right) + x_2 \cdot \left(x_1^2 - 1\right)}{(x_1^2 - 1) \cdot (x_2^2 - 1)} = \frac{\underline{x_1 \cdot x_2^2} - x_1 + \underline{x_2 \cdot x_1^2} - x_2}{x_1^2 \cdot x_2^2 - x_2^2 - x_1^2 + 1}$$

Sredim malo dobiveni razlomak tako da izlucim $x_1 x_2$ iz podcrtanih izraza:

$$\frac{x_1}{x_1^2 - 1} + \frac{x_2}{x_2^2 - 1} = \frac{(x_1 x_2) \cdot (x_2 + x_1) \underline{-x_1} + \underline{\underline{-x_2}}}{x_1^2 \cdot x_2^2 - x_1^2 - x_2^2 + 1}$$

Nadalje izlucim $-$ iz podcrtanih izraza:

$$\frac{x_1}{x_1^2 - 1} + \frac{x_2}{x_2^2 - 1} = \frac{\underline{(x_1 x_2) \cdot (x_1 + x_2)} - \underline{\underline{(x_1 + x_2)}}}{x_1^2 \cdot x_2^2 \underline{-x_1^2 - x_2^2} + 1}$$

Nadalje izlucim $(x_1 + x_2)$ iz podcrtanih izraza:

$$\frac{x_1}{x_1^2 - 1} + \frac{x_2}{x_2^2 - 1} = \frac{(x_1 + x_2) \cdot (x_1 x_2 - 1)}{\underline{x_1^2 \cdot x_2^2} - (x_1^2 + x_2^2) + 1}$$

Podcrtani izraz sredim imajuci na umu identitet $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$:

$$\frac{x_1}{x_1^2 - 1} + \frac{x_2}{x_2^2 - 1} = \frac{(x_1 + x_2) \cdot (x_1 x_2 - 1)}{(x_1 \cdot x_2)^2 - (x_1^2 + x_2^2) + 1}$$

Promotrim li desnu stranu dobivenog izraza uocavam da sam dobio samo izraze oblika $x_1 + x_2$ i x_1x_2 koje prepoznajem kao Viete-ove formule osim jednog uljeza, a to je $x_1^2 + x_2^2$. No sjetim se da sam u prethodnom zadatku kvadriranjem izraza $x_1 + x_2$ kojeg znam odrediti uz pomoc Viete-ovih formula zakljucio da vrijedi:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1x_2$$

Vratim se sa tim saznanjem u izraz kojeg trebam odrediti:

$$\frac{x_1}{x_1^2 - 1} + \frac{x_2}{x_2^2 - 1} = \frac{(x_1 + x_2) \cdot (x_1x_2 - 1)}{(x_1 \cdot x_2)^2 - \Big((x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1x_2\Big) + 1}$$

Dakle sredjivanjem pocetnog iraza dosli smo do sljdeceeg izraza koji sadrzi samo izraze oblika $x_1 + x_2$ i x_1x_2 koje prepoznajem kao Viete-ove formule cije iznose sam odredio na pocetku zadatka. Dakle vrijedi:

$$\frac{x_1}{x_1^2 - 1} + \frac{x_2}{x_2^2 - 1} = \frac{(x_1 + x_2) \cdot (x_1x_2 - 1)}{(x_1 \cdot x_2)^2 - (x_1 + x_2)^2 + 2 \cdot x_1x_2 + 1}$$

Prisjetim se da sam izracunao da vrijedi $x_1 + x_2 = -\frac{2}{5}$ i $x_1 \cdot x_2 = -\frac{2}{5}$, pa sada sve izraze oblika $x_1 + x_2$ zamijenim s $-\frac{2}{5}$ dok s druge strane sve izraze oblike $x_1 \cdot x_2$ zamijenim s $-\frac{2}{5}$. Racunam dalje:

$$\frac{x_1}{x_1^2 - 1} + \frac{x_2}{x_2^2 - 1} = \frac{\overbrace{(x_1 + x_2)}^{-\frac{2}{5}} \cdot (\overbrace{x_1x_2}^{-\frac{2}{5}} - 1)}{\underbrace{(x_1 \cdot x_2)}_{-\frac{2}{5}}{}^2 - \underbrace{(x_1 + x_2)}_{-\frac{2}{5}}{}^2 + 2 \cdot \underbrace{x_1x_2}_{-\frac{2}{5}} + 1} = \frac{\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5} - 1\right)}{\left(-\frac{2}{5}\right)^2 - \left(-\frac{2}{5}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) + 1}$$

$$\frac{x_1}{x_1^2 - 1} + \frac{x_2}{x_2^2 - 1} = \frac{\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5} - 1\right)}{\left(-\frac{2}{5}\right)^2 - \left(-\frac{2}{5}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) + 1} = \frac{\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{2}{5}}{\left(-\frac{2}{5}\right)^2 - \left(-\frac{2}{5}\right)^2 - \frac{4}{5} + 1}$$

Imajuci na umu identitet $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ nastavljam racun

$$\frac{x_1}{x_1^2 - 1} + \frac{x_2}{x_2^2 - 1} = \frac{\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{2}{5}}{\left(-\frac{2}{5}\right)^2 - \left(-\frac{2}{5}\right)^2 - \frac{4}{5} + 1} = \frac{\frac{(-2)^2}{5^2} + \frac{2}{5}}{\frac{(-2)^2}{5^2} - \frac{(-2)^2}{5^2} - \frac{4}{5} + 1} = \frac{\frac{4}{25} + \frac{2}{5}}{\frac{4}{25} - \frac{4}{25} - \frac{4}{5} + 1}$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$\frac{x_1}{x_1^2-1}+\frac{x_2}{x_2^2-1}=\frac{\frac{4}{25}+\frac{2}{5}}{\frac{\cancel{4}}{\cancel{25}}-\frac{\cancel{4}}{\cancel{25}}-\frac{4}{5}+1}=\frac{\frac{4}{25}+\frac{2}{5}}{-\frac{4}{5}+\frac{1}{1}}$$

Razlomke u brojniku svedem na zajednicki nazvinik jednak 25, dok one u nazivnku svedem na zajednicki nazivnik jednak 5. Racunam:

$$\frac{x_1}{x_1^2-1}+\frac{x_2}{x_2^2-1}=\frac{\frac{4}{25}+\frac{2}{5}}{-\frac{4}{5}+\frac{1}{1}}=\frac{\frac{4\cdot 1+2\cdot 5}{25}}{\frac{-4\cdot 1+1\cdot 5}{5}}=\frac{\frac{4+10}{25}}{\frac{-4+5}{5}}=\frac{\frac{14}{25}}{\frac{1}{5}}$$

Pokratim sto se pokratit dade:

$$\frac{x_1}{x_1^2-1}+\frac{x_2}{x_2^2-1}=\frac{\frac{14}{{}^{5}\cancel{25}}}{\frac{1}{\cancel{5}_1}}=\frac{\frac{14}{5}}{\frac{1}{1}}$$

Rijesim se dvojnog razlomka te dobijem rjesenje:

$$\frac{x_1}{x_1^2-1}+\frac{x_2}{x_2^2-1}=\frac{14}{5}$$

$- \star -$

<u>Zadatak 15</u>: (str. 55) U jednadzbi $2\,(px-1)=p\,(2x-1)^2$, $p\neq 0$ odredi realni parametar p iz svakog od sljedecih uvjeta:

1) korijeni jednadzbe su jednaki;
2) jedan korijen jednadzbe jednak je 1;
3) jedan korijen jednadzbe dvostruko je veci od drugog;
4) jedan korijen jednadzbe za 2 je veci od drugog;
5) zbroj rjesenja jednadzbe cetverostruko je veci od umnoska.

<u>Rjesenje</u>: Pocnimo tako da sredimo danu kvadratnu jednadzbu $2\,(px-1)=p\,(2x-1)^2$ na nacin da lako mozemo iscitati njezine koeficijente a, b i c. Raspisujem danu jednadzbu imajuci na umu da izraz na desnoj strani raspisujem pomocu identiteta $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. Racunam:

$$2\,(px-1)=p\,(2x-1)^2$$

$$2\cdot px-2\cdot 1=p\left((2x)^2-2\cdot 2x\cdot 1+1^2\right)$$

$$2px-2=p\left(2^2x^2-4x+1\right)$$

$$2px-2=p\left(4x^2-4x+1\right)$$

$$2px-2=p\cdot 4x^2+p\cdot(-4x)+p\cdot 1$$
$$2px-2=4px^2-4px+p$$

Prebacim sve na desnu stranu izraza:

$$0=4px^2-\underline{4px}+p-\underline{2px}+2$$

Zbrojim istovrsne izraze (podcrtani izrazi):

$$4p\cdot x^2-6p\cdot x+p+2=0$$

Sad kad sam malo sredio pocetnu kvadratnu jednadzbu lako mogu iscitati njene koeficijente:

$$a=4p$$
$$b=-6p$$
$$c=p+2$$

Krenimo sada na prvi zadatak, odnosno:
1) Odredi realni parametar p, $p\neq 0$ tako da korijeni (rjesenja) kvadratne jednadzbe budu jednaki!

Dakle da bi korijeni (rjesenja) jednadzbe bili jednaki njezina diskriminanta mora biti jednaka 0. Prisjetim se da je diskriminanta kvadratne jednadzbe izraz oblika $D=b^2-4ac$. Za pocetak odredim cemu je jednaka diskriminanta nase kvadratne jednadzbe. Racunam:

$$D=b^2-4ac$$
$$D=(-6p)^2-4\cdot 4p\cdot(p+2)=(-6)^2\,p^2-16p\cdot(p+2)$$
$$D=36p^2-16p^2-32p=20p^2-32p$$

Dakle diskriminanta nase kvadratne jednadzbe jednaka je $D=20p^2-32p$. Da bi nasa jednadzba imala dva rjesenja koja su jednaka njezina diskriminanta mora biti jednaka 0. Dakle zakljucujem da mora rijesiti sljedecu jednadzbu:

$$20p^2-32p=0$$

Izlucim $4p$ iz oba clana sume te dobijem:

$$4p\,(5p-8)=0$$

Sada znam da ako je umnozak neka dva broja jednak 0, tada je ili prvi od ta dva broja jednak 0 ili je onaj drugi jednak 0. Primjenim li tu cinjenicu u nasem slucaju mora vrijediti:

$$4p=0 \ \text{ ili } \ 5p-8=0$$

Dakle rijesimo li te dvije jednostavne linearne jednadzbe dobijemo:

$$4p=0\;/:4 \ \text{ ili } \ 5p=8\;/:5$$

$$p_1 = 0 \text{ ili } p_2 = \frac{8}{5}$$

Dakle jednadzba ce imati dva jednaka rjesenja za $p_1 = 0$ i $p_2 = \frac{8}{5}$.

Rijesimo dalje drugi zadatak, odnosno:
2) Odredi realni parametar p, $p \neq 0$ tako da jedan korijen (rjesenje) kvadratne jednadzbe bude jednak 1!

Dakle jedan nacin na koji bih mogao rijesiti ovaj zadatak jest da uzmem poznati izraz za racunanje rjesenja kvadratne jednadzbe:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

te u tom izrazu lijevu stranu zamijenim s 1, te tako dobijem sljedecu jednadzbu:

$$1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

koju onda rijesim. No pokusajmo zadatak rijesiti malo drugacijim pristupom, odnosno pogledajmo sto dobijemo ako primjenimo Viete-ove formule. Prisjetim se da sam vec odredio koeficijente dane kvadratne jednadzbe i da su oni jednaki:

$$a = 4p$$

$$b = -6p$$

$$c = p + 2$$

Odredimo dakle cemu je jednak zbroj, $x_1 + x_2$, a cemu umnozak $x_1 \cdot x_2$ dane kvadratne jednadzbe preko Viete-ovih formula. Racunam:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-6p)}{4p} = \frac{{}^{3}\cancel{6}\,{}^{1}\cancel{p}}{\cancel{4}_{2}\cancel{p}_{1}} = \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{p+2}{4p}$$

Ono sto mogu uociti jest da zbroj rjesenja dane kvadratne jednadzbe uopce ne ovisi o p sto pak znaci da ako jedno rjesenje mora biti jednako 1 drugo mogu lako odrediti. Pa neka je dakle $x_1 = 1$. Tada iz prvog izraza slijedi:

$$x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$$

$$1 + x_2 = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{1} = \frac{3 \cdot 1 - 1 \cdot 2}{2} = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$$

Izracunali smo dakle da ako je jedno rjesenje jednako 1 drugo mora biti jednako $\frac{1}{2}$. No ako se sada s tim saznanjem vratimo u izraz $x_1 \cdot x_2 = \frac{p+2}{4p}$ slijedi:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{p+2}{4p}$$

$$1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{p+2}{4p}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{p+2}{4p} \ / \cdot 4p$$

$$\frac{1}{2} \cdot 4p = \frac{p+2}{4p} \cdot 4p$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$\frac{1}{{}_1\cancel{2}} \cdot \cancel{4}^2 p = \frac{p+2}{{}_1\cancel{4p}} \cdot \cancel{4p}^1$$

$$2p = p + 2$$

$$2p - p = 2$$

$$p = 2$$

Time smo rijesili zadatak, ako je $p = 2$ jedno rjesenje jednadzbe bit ce jednako 1.

Napomena: Ovaj zadatak mogli smo rijesiti preko Viete-ovih formula iz specificnog razloga, a taj je bio da zbroj rjesenja nije ovisio o parametru koji se javio u kvadratnoj jednadzbi. Dakle ako zbroj ili umnozak rjesenja ne ovisi o parametru kvadratne jednadzbe tada cemo moci koristiti Viete-ove formule kako bismo saznali kakav mora biti paramaetar da bi jedno ili oba rjesenja bila odredjenog oblika.

Nadalje pozabavimo se trecim zadatkom, odnoso: 3) Odredi realni parametar p, $p \neq 0$ tako da jedan korijen (rjesenje) kvadratne jednadzbe bude dvostuko veci od drugog!

Dakle pretpostavimo da je prvo rjesenje 2 puta vece od drugog rjesenja odnosno da vrijedi $x_1 = 2x_2$. Iskoristimo izraze za zbroj odnosno umnozak rjesenja dane kvadratne jednadzbe koje smo odredili u prethodnom zadatku:

$$x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{p+2}{4p}$$

Uvrstimo u prvi izraz pretpostavku, ondnosno $x_1 = 2x_2$ i pogledajmo cemu onda mora biti jednak x_2. Racunam:

$$x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$$

$$2x_2 + x_2 = \frac{3}{2}$$

$$3x_2 = \frac{3}{2} \;/\cdot \frac{1}{3}$$

$$3x_2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$^{1}\cancel{3}x_2 \cdot \frac{1}{\cancel{3}_1} = \frac{^{1}\cancel{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{3}_1}$$

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

Vratim se s tim saznanjem opet u izraz $x_1 + x_2 = \dfrac{3}{2}$ kako bi odredio cemu mora biti jednak x_1. Racunam:

$$x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$$

$$x_1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$x_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{^{1}\cancel{2}}{\cancel{2}_1}$$

$$x_1 = 1$$

Sada kada sam odredio kakvi moraju biti x_1 i x_2 vratim se u izraz $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{p+2}{4p}$ kako bi odredio cemu mora biti jednak p. Racunam:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{p+2}{4p}$$

$$1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{p+2}{4p}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{p+2}{4p} \;/\cdot 4p$$

$$\frac{1}{2} \cdot 4p = \frac{p+2}{4p} \cdot 4p$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$\frac{1}{_{1}\cancel{2}} \cdot \cancel{4}^{2}p = \frac{p+2}{_{1}\cancel{4p}} \cdot \cancel{4p}^{1}$$

$$2p = p + 2$$
$$2p - p = 2$$
$$p = 2$$

Time smo rijesili zadatak, ako je $p = 2$ jedno rjesenje kvadratne jednadzbe bit ce dvostruko vece od drugog rjesenja.

Rijesimo dalje cetvrti zadatak, odnosno:
4) Odredi realni parametar p, $p \neq 0$ tako da jedan korijen (rjesenje) kvadratne jednadzbe bude za 2 veci od drugog!

Dakle pretpostavimo da je prvo rjesenje za 2 vece od drugog rjesenja odnosno da vrijedi $x_1 = x_2 + 2$. Iskoristimo izraze za zbroj odnosno umnozak rjesenja dane kvadratne jednadzbe koje smo odredili u prethodnom zadatku:

$$x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$$
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{p+2}{4p}$$

Uvrstimo u prvi izraz pretpostavku, ondnosno $x_1 = x_2 + 2$ i pogledajmo cemu onda mora biti jednak x_2. Racunam:

$$x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$$
$$x_2 + 2 + x_2 = \frac{3}{2}$$
$$2x_2 = \frac{3}{2} - 2 = \frac{3}{2} - \frac{2}{1} = \frac{3 \cdot 1 - 2 \cdot 2}{2}$$
$$2x_2 = \frac{3-4}{2} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$
$$2x_2 = -\frac{1}{2} \ / \cdot \frac{1}{2}$$
$$2x_2 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$^{1}\cancel{2}x_2 \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$
$$x_2 = -\frac{1}{4}$$

Vratim se s tim saznanjem opet u izraz $x_1 + x_2 = \dfrac{3}{2}$ kako bi odredio cemu mora biti jednak x_1. Racunam:

$$x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$$

$$x_1 + \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}$$

$$x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 2 + 1 \cdot 1}{4} = \frac{6+1}{4}$$

$$x_1 = \frac{7}{4}$$

Sada kada sam odredio kakvi moraju biti x_1 i x_2 vratim se u izraz $x_1 \cdot x_2 = \frac{p+2}{4p}$ kako bi odredio cemu mora biti jednak p. Racunam:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{p+2}{4p}$$

$$\frac{7}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{p+2}{4p}$$

$$-\frac{7}{16} = \frac{p+2}{4p} \ / \cdot 16p$$

$$-\frac{7}{{}_1\cancel{16}} \cdot \cancel{16}^1 p = \frac{p+2}{{}_1\cancel{4p}} \cdot \cancel{16p}^4$$

$$-7p = (p+2) \cdot 4$$

$$-7p = 4p + 8$$

$$-7p - 4p = 8$$

$$-11p = 8 \ / : (-11)$$

$$\frac{{}^1\cancel{-11}p}{\cancel{-11}_1} = \frac{8}{-11}$$

$$p = -\frac{8}{11}$$

Time smo rijesili zadatak, ako je $p = -\frac{8}{11}$ jedno rjesenje kvadratne jednadzbe bit ce za 2 vece od drugog rjesenja.

Na kraju rijesimo jos peti zadatak, odnosno:
5) Odredi realni parametar p, $p \neq 0$ tako da zbroj korijena (rjesenja) kvadratne jednadzbe bude cetverostruko veci od njihovog umnoska!

Dakle ono sto mora vrijediti jest:

$$x_1 + x_2 = 4 \cdot x_1 x_2$$

Iskoristimo izraze za zbroj odnosno umnozak rjesenja dane kvadratne jednadzbe koje smo odredili u prethodnom zadatku:

$$x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{p+2}{4p}$$

Vratimo se s tim izrazima u izraz iz zadatka. Racunam:

$$x_1 + x_2 = 4 \cdot x_1 x_2$$

$$\frac{3}{2} = 4 \cdot \frac{p+2}{4p}$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$\frac{3}{2} =^1 \cancel{4} \cdot \frac{p+2}{\cancel{4}_1 p}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{p+2}{p} \ / \cdot 2p$$

$$\frac{3}{{}_1\cancel{2}} \cdot \cancel{2}^1 p = \frac{p+2}{{}_1\cancel{p}} \cdot 2\cancel{p}^1$$

$$3p = (p+2) \cdot 2$$

$$3p = 2p + 4$$

$$3p - 2p = 4$$

$$p = 4$$

Time smo rijesili zadatak, ako je $p = 4$ zbroj rjesenja kvadratne jednadzbe bit ce cetverostruko veci od njihovog umnoska.

$$- \star -$$

U sljedecim zadacima koristit cemo tvrdnju:

Tvrdnja: Ako vrijedi $x_1 + x_2 = m$, $x_1 x_2 = n$, onda su x_1 i x_2 rjesenja kvadratne jednadzbe:

$$x^2 - mx + n = 0$$

Zadatak 25: (str. 56) Ne rjesavajuci jednadzbu $2x^2 + 5x + 4 = 0$ napisi novu kvadratnu jednadzbu s rjesenjima $\frac{x_1}{x_2}$ i $\frac{x_2}{x_1}$ gdje su x_1 i x_2 rjesenja zadane kvadratne jednadzbe.

Rjesenje: Dakle zelimo napisati novu kvadratnu jednadzbu cija ce rjesenja x_1' i x_2' biti jednaka:

$$x_1' = \frac{x_1}{x_2}$$

$$x_2' = \frac{x_2}{x_1}$$

pri cemu su x_1 i x_2 su rjesenja kvadratne jednadzbe $2x^2+5x+4=0$. Da bismo to napravili koristit cemo gornju tvrdnju. Dakle ono sto nam je zadatak jest izracunati cemu je jednako $x_1'+x_2'$ i $x_1'\cdot x_2'$. Prvo racunam $x_1'+x_2'$:

$$x_1'+x_2'=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$$

Razlomke na desnoj strani svedem na zajednicki nazivnik x_1x_2 kako bi ih zbrojio:

$$x_1'+x_2'=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1\cdot x_1+x_2\cdot x_2}{x_1x_2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}$$

Promotrim li dobiveni izraz vidim da se u nazivniku nalazi Viete-ova formula vezana uz rjesenja kvadratne jednadzbe dane u zadatku. No s brojnikom to nije slucaj pa bi ga morao prikazati preko izraza oblika x_1+x_2 i x_1x_2 koje mogu lako izracunati pomocu Viete-ovih formula. No ako se prisjetim to sam vec odredio prije kad sam rjesavao prvi zadatak, drugim rijecima zakljucio sam da vrijedi $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2\cdot x_1x_2$. Imam li to na umu dale slijedi:

$$x_1'+x_2'=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1\cdot x_1+x_2\cdot x_2}{x_1x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2\cdot x_1x_2}{x_1x_2}$$

Mogu uociti da su sada svi izrazi na desnoj strani oblika x_1+x_2 ili x_1x_2 koje mogu lako izracunati pomocu Viete-ovih formula. Nadalje pokusajmo odrediti cemu je jednako $x_1'\cdot x_2'$. Racunam:

$$x_1'\cdot x_2'=\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_1}$$

Skratim sto se skratiti dade:

$$x_1'\cdot x_2'=\frac{{}^1\cancel{x_1}}{{}_1\cancel{x_2}}\cdot\frac{\cancel{x_2}^1}{\cancel{x_1}_1}=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}=1$$

Sljedeci korak jest odrediti cemu je jednako x_1+x_2 odnosno $x_1\cdot x_2$ kako bih mogao odrediti cemu je jednako $x_1'+x_2'$ i $x_1'\cdot x_2'$. Iz tog razloga promotrim danu kvadratnu jednadzbu $2x^2+5x+4=0$ i ispisem njezine koeficijente:

$$a=2$$

$$b=5$$

$$c=4$$

Nadalje racunam cemu je jednako x_1+x_2 odnosno $x_1\cdot x_2$, znam da vrijedi sljdece:

$$x_1+x_2=\frac{-b}{a}=\frac{-5}{2}=-\frac{5}{2}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{{}^2\cancel{4}}{\cancel{2}_1}=\frac{2}{1}=2$$

Sada kada sam to izracunao dalje racunam cemu je jednako $x_1' + x_2'$:

$$x_1' + x_2' = \frac{(\overbrace{x_1 + x_2}^{-\frac{5}{2}})^2 - 2 \cdot \overbrace{x_1 x_2}^{2}}{\underbrace{x_1 x_2}_{2}} = \frac{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \cdot 2}{2}$$

Imajuci na umu identitet $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ nastavljam racun:

$$x_1' + x_2' = \frac{\left(\frac{-5}{2}\right)^2 - 2 \cdot 2}{2} = \frac{\frac{(-5)^2}{2^2} - 4}{\frac{2}{1}} = \frac{\frac{25}{4} - \frac{4}{1}}{\frac{2}{1}}$$

Svedem razlomke u brojniku na isti nazivnik koji je jednak 4:

$$x_1' + x_2' = \frac{\frac{25}{4} - \frac{4}{1}}{\frac{2}{1}} = \frac{\frac{25 \cdot 1 - 4 \cdot 4}{4}}{\frac{2}{1}} = \frac{\frac{25 - 16}{4}}{\frac{2}{1}} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{2}{1}}$$

Rijesim se dvojnog razlomka:

$$x_1' + x_2' = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{2}{1}} = \frac{9 \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{9}{8}$$

Sada kada sam odredio cemu je jednako $x_1' + x_2'$ i $x_1' \cdot x_2'$, oznacim li $x_1' + x_2'$ s m, a $x_1' \cdot x_2'$ s n mogu napisati kvadratnu jednadzbu $x^2 - mx + n = 0$ i ona ce kao rjesenja imati bas brojeve x_1' i x_2' sto se u zadatku upravo trazi. Pa napravimo to:

$$m = x_1' + x_2' = \frac{9}{8}$$
$$n = x_1' \cdot x_2' = 1$$
$$x^2 - mx + n = 0$$
$$x^2 - \frac{9}{8}x + 1 = 0 \; / \cdot 8$$
$$8x^2 - 9x + 8 = 0$$

Time je zadatak rijesen, dakle trazena kvadratna jednadzba jest oblika $8x^2 - 9x + 8 = 0$.

$- \star -$

Zadatak 31: (str. 56) Napisi kvadratnu jednadzbu cija su rjesenja brojevi $\frac{x_1 + 1}{x_1 - 1}$ i $\frac{x_2 + 1}{x_2 - 1}$, a x_1 i x_2 su rjesenja kvadratne jednadzbe $3x^2 - x + 2 = 0$.

Rjesenje: Dakle ono sto mi zelimo jest napisati novu kvadratnu jednadzbu cija ce rjesenja x_1' i x_2' biti jednaka:

$$x_1' = \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1}$$

$$x_2' = \frac{x_2 + 1}{x_2 - 1}$$

pri cemu su x_1 i x_2 su rjesenja kvadratne jednadzbe $3x^2 - x + 2 = 0$. Da bismo to napravili koristit cemo gornu tvrdnju. Dakle ono sto nam je zadatak jest izracunati cemu je jednako $x_1' + x_2'$ i $x_1' \cdot x_2'$. Prvo racunam $x_1' + x_2'$:

$$x_1' + x_2' = \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1} + \frac{x_2 + 1}{x_2 - 1}$$

Razlomke na desnoj strani svedem na zajednicki nazivnik $(x_1 - 1)(x_2 - 1)$ kako bi ih zbrojio:

$$x_1' + x_2' = \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1} + \frac{x_2 + 1}{x_2 - 1} = \frac{(x_1 + 1)(x_2 - 1) + (x_2 + 1)(x_1 - 1)}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}$$

Dobiveni izraz pokusam malo srediti:

$$x_1' + x_2' = \frac{(x_1 + 1)(x_2 - 1) + (x_2 + 1)(x_1 - 1)}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} = \frac{x_1x_2 - x_1 + x_2 - 1 + x_2x_1 - x_2 + x_1 - 1}{x_1x_2 - x_1 - x_2 + 1}$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$x_1' + x_2' = \frac{x_1x_2 - \cancel{x_1} + \cancel{x_2} - 1 + x_1x_2 - \cancel{x_2} + \cancel{x_1} - 1}{x_1x_2 - x_1 - x_2 + 1}$$

$$x_1' + x_2' = \frac{x_1x_2 - 1 + x_2x_1 - 1}{x_1x_2 - x_1 - x_2 + 1}$$

Zbrojim istovrsne izraze u brojniku te izlucim $-$ iz druga dva clana u nazivniku:

$$x_1' + x_2' = \frac{2 \cdot x_1x_2 - 2}{x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1}$$

Ono sto mogu uociti jest da se sada s lijeve strane nalaze samo izrazi oblika $x_1 + x_2$ i x_1x_2 sto prepoznajem kao Viete-ove formule vezane uz rjesenja kvadratne jednadzbe dane u zadatku. Nadalje pokusajmo odrediti cemu je jednako $x_1' \cdot x_2'$. Racunam:

$$x_1' \cdot x_2' = \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1} \cdot \frac{x_2 + 1}{x_2 - 1}$$

Sredimo malo ovaj izraz mnozeci lijevu stranu:

$$x_1' \cdot x_2' = \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1} \cdot \frac{x_2 + 1}{x_2 - 1} = \frac{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}$$

$$x'_1 \cdot x'_2 = \frac{(x_1+1)\,(x_2+1)}{(x_1-1)\,(x_2-1)} = \frac{x_1x_2+x_1+x_2+1}{x_1x_2-x_1-x_2+1}$$

Izlucim $-$ iz druga dva clana u nazivniku te grupiram druga dva clana u brojniku:

$$x'_1 \cdot x'_2 = \frac{x_1x_2+(x_1+x_2)+1}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}$$

Mogu uociti da se sada s lijeve strane nalaze samo izrazi oblika
x_1+x_2 i x_1x_2 sto prepoznajem kao Viete-ove formule vezane uz rjesenja kvadratne jednadzbe dane u zadatku.
Sljedeci korak jest odrediti cemu je jednako x_1+x_2 odnosno $x_1 \cdot x_2$ kako bih mogao odrediti cemu je jednako $x'_1+x'_2$ i $x'_1 \cdot x'_2$. Iz tog razloga promotrim danu kvadratnu jednadzbu $3x^2-x+2=0$ i ispisem njezine koeficijente:

$$a = 3$$

$$b = -1$$

$$c = 2$$

Nadalje racunam cemu je jednako x_1+x_2 odnosno $x_1 \cdot x_2$, znam da vrijedi sljdece:

$$x_1+x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-1)}{3} = \frac{1}{3}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$$

Sada kada sam to izracunao dalje racunam cemu je jednako $x'_1+x'_2$:

$$x'_1+x'_2 = \frac{2\cdot\overbrace{x_1x_2}^{\frac{2}{3}}-2}{\underbrace{x_1x_2}_{\frac{2}{3}}-(\underbrace{x_1+x_2}_{\frac{1}{3}})+1} = \frac{2\cdot\frac{2}{3}-2}{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+1} = \frac{\frac{4}{3}-2}{\frac{1}{3}+1} = \frac{\frac{4}{3}-\frac{2}{1}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{1}}$$

Svedem razlomke u brojniku i nazivniku na zajednicki nazivnik koji je jednak 3:

$$x'_1+x'_2 = \frac{\frac{4}{3}-\frac{2}{1}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{1}} = \frac{\frac{4\cdot1-2\cdot3}{3}}{\frac{1\cdot1+1\cdot3}{3}} = \frac{\frac{4-6}{3}}{\frac{1+4}{3}} = \frac{\frac{-2}{3}}{\frac{4}{3}}$$

Skratim sto se skratiti dade:

$$x'_1+x'_2 = \frac{\frac{-\cancel{2}^{1}}{{}_{1}\cancel{3}}}{\frac{\cancel{4}_{2}}{{}_{1}\cancel{3}}} = \frac{\frac{-1}{1}}{\frac{2}{1}}$$

Rijesim se dvojnog razlomka te dobijem:

$$x_1' + x_2' = -\frac{1}{2}$$

Racunam dalje cemu je jednako $x_1' \cdot x_2'$:

$$x_1' \cdot x_2' = \frac{\overbrace{x_1 x_2}^{\frac{2}{3}} + (\overbrace{x_1 + x_2}^{\frac{1}{3}}) + 1}{\underbrace{x_1 x_2}_{\frac{2}{3}} - (\underbrace{x_1 + x_2}_{\frac{1}{3}}) + 1} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + 1}{\frac{2}{3} - \frac{1}{3} + 1} = \frac{\frac{3}{3} + 1}{\frac{1}{3} + 1}$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$x_1' \cdot x_2' = \frac{\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{3}_{1}} + 1}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{1 + 1}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{2}{\frac{1}{3} + 1}$$

Svedem razlomke u nazivniku na zajednicki nazivnik koji je jednak 3:

$$x_1' \cdot x_2' = \frac{2}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{\frac{2}{1}}{\frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 3}{3}} = \frac{\frac{2}{1}}{\frac{1 + 3}{3}} = \frac{\frac{2}{1}}{\frac{4}{3}}$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$x_1' \cdot x_2' = \frac{\frac{\cancel{2}^{1}}{1}}{\frac{\cancel{4}^{2}}{3}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{2}{3}}$$

Rijesim se dvojnog razlomka te dobijem:

$$x_1' \cdot x_2' = \frac{3}{2}$$

Sada kada sam odredio cemu je jednako $x_1' + x_2'$ i $x_1' \cdot x_2'$, oznacim li $x_1' + x_2'$ s m, a $x_1' \cdot x_2'$ s n mogu napisati kvadratnu jednadzbu $x^2 - mx + n = 0$ i ona ce kao rjesenja imati bas brojeve x_1' i x_2' sto se u zadatku upravo trazi. Pa napravimo to:

$$m = x_1' + x_2' = -\frac{1}{2}$$

$$n = x_1' \cdot x_2' = \frac{3}{2}$$

$$x^2 - mx + n = 0$$

$$x^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)x + \frac{3}{2} = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0 \ / \cdot 2$$

$$2x^2 + x + 3 = 0$$

Time je zadatak rijesen, dakle trazena kvadratna jednadzba jest oblika $2x^2 + x + 3 = 0$.

$- \star -$