Rijeseni neki zadaci iz poglavlja 2.2

Zadatak 7: 4) (str. 43) Rijesi sljedecu jednadzbu:

$$abx^2 - \left(a^2 - b^2\right)x + (a-b)^2 = 0$$

Rjesenje: Da bih se lakse snasao kod rijesavanja ove jednadzbe napravim jednostavne supstitucije

$$u = a$$

$$v = b$$

Razlog tome lezi u cinjenici da standardo kvadratne jednazbe zapisujem u obliku $ax^2 + bx + c = 0$, dakle kad bi ispisivao koeficijente tada bi mi se oznake poklopile. No to zelim izbjeci da bude jasniji postupak, a najlaksi nacin da to ucinim jest uvodjenjem supstitucija. Pocetna kvaratna jednadzba sada ima sljedeci oblik:

$$uvx^2 - \left(u^2 - v^2\right)x + (u-v)^2 = 0$$

Nadalje ispisem koeficijente dane kvadratne jednadbe:

$$a = uv$$

$$b = -\left(u^2 - v^2\right)$$

$$c = (u-v)^2$$

Izraz po kojem izracunavam rjesenja kvadratnih jednadzbi jest:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Uvrstim ispisane koeficijente u gornji izraz te racunam:

$$x_1, x_2 = \frac{-\left[-\left(u^2 - v^2\right)\right] \pm \sqrt{\left[-\left(u^2 - v^2\right)\right]^2 - 4uv\,(u-v)^2}}{2uv}$$

$$x_1, x_2 = \frac{u^2 - v^2 \pm \sqrt{\left(u^2 - v^2\right)^2 - 4uv\,(u-v)^2}}{2uv}$$

Prepoznam da je $u^2 - v^2$ zapravo razlika kvadrata, odnosno da vrijedi:

$$u^2 - v^2 = (u-v)\cdot(u+v)$$

Primjenim to saznanje kod svog racuna, dakle slijedi:

$$x_1, x_2 = \frac{(u-v)\cdot(u+v) \pm \sqrt{\left[(u-v)\cdot(u+v)\right]^2 - 4uv\,(u-v)^2}}{2uv}$$

Nadalje prema identitetu $(ab)^n = a^n b^n$ izraz $[(u-v)\cdot(u+v)]^2$ mogu raspisati na sljedeci nacin:

$$[(u-v)\cdot(u+v)]^2 = (u-v)^2\cdot(u+v)^2$$

Primjenim to saznanje kod svog racuna, dakle slijedi:

$$x_1, x_2 = \frac{(u-v)\cdot(u+v) \pm \sqrt{\underline{(u-v)^2}\cdot(u+v)^2 - 4uv\underline{(u-v)^2}}}{2uv}$$

Uocim da mogu iz clanova razlike ispod korijena izluciti podcrtani dio, pa ucinim to:

$$x_1, x_2 = \frac{(u-v)\cdot(u+v) \pm \sqrt{(u-v)^2\left[\underline{(u+v)^2 - 4uv}\right]}}{2uv}$$

Sredim podcrtani dio tako da $(u+v)^2$ raspisem prema izrazu
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ dakle racunam:

$$(u+v)^2 - 4uv = u^2 + 2uv + v^2 - 4uv = u^2 - 2uv + v^2$$

Prepoznam posljednji dobiveni izraz ako identitet $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Dakle uzmem li to u obzir vrijedi:

$$(u+v)^2 - 4uv = u^2 + 2uv + v^2 - 4uv = u^2 - 2uv + v^2 = (u-v)^2$$

Dakle zakljucili smo da mora vrijediti:

$$(u+v)^2 - 4uv = (u-v)^2$$

Vratim se sa tim saznanjem u glavni racun, dakle slijedi:

$$x_1, x_2 = \frac{(u-v)\cdot(u+v) \pm \sqrt{(u-v)^2(u-v)^2}}{2uv}$$

Izmnozim izraz pod korijenom, racunam:

$$x_1, x_2 = \frac{(u-v)\cdot(u+v) \pm \sqrt{(u-v)^{2+2}}}{2uv}$$

$$x_1, x_2 = \frac{(u-v)\cdot(u+v) \pm \sqrt{(u-v)^4}}{2uv}$$

Izvadim drugi korijen iz izraza ispod korijena te dobijem:

$$x_1, x_2 = \frac{(u-v)\cdot(u+v) \pm (u-v)^2}{2uv}$$

Nadalje, razlomim ovo na dva slucaja. Prvo racunam cemu je jedanko rjesenje x_1, a nakon toga cu odrediti cemu je jednako rjesenje x_2.
Prvi slucaj:

$$x_1 = \frac{(u-v)\cdot(u+v)-(u-v)^2}{2uv}$$

Rijesim se prve zagrade. No uvidjam da je to zapravo razlika kvadrata pa cu to srediti na sljedeci nacin:

$$(u-v)\cdot(u+v) = u^2 - v^2$$

Dakle mora vrijediti:

$$x_1 = \frac{u^2 - v^2 - (u-v)^2}{2uv}$$

Nadalje drugu zagradu raspisem po izrazu za kvadrat razlike
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, dakle mora vrijediti:

$$x_1 = \frac{u^2 - v^2 - \left(u^2 - 2uv + v^2\right)}{2uv}$$

$$x_1 = \frac{\cancel{u^2} - v^2 \cancel{- u^2} + 2uv - v^2}{2uv}$$

$$x_1 = \frac{-2v^2 + 2uv}{2uv}$$

Izlucim $-2v$ u brojniku, dakle slijedi:

$$x_1 = \frac{-{}^{1}\cancel{2}{}^{1}\cancel{v}\,(v-u)}{\cancel{2}_1 u \cancel{v}_1}$$

$$x_1 = \frac{-(v-u)}{u}$$

$$x_1 = \frac{-v+u}{u}$$

$$x_1 = \frac{u-v}{u}$$

Drugi slucaj:

$$x_2 = \frac{(u-v)\cdot(u+v)+(u-v)^2}{2uv}$$

Rijesim se prve zagrade. No uvidjam da je to zapravo razlika kvadrata pa cu to srediti na sljedeci nacin:

$$(u-v)\cdot(u+v) = u^2 - v^2$$

Dakle mora vrijediti:

$$x_2 = \frac{u^2 - v^2 + (u-v)^2}{2uv}$$

Nadalje drugu zagradu raspisem po izrazu za kvadrat razlike $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, dakle mora vrijediti:

$$x_2 = \frac{u^2 - v^2 + \left(u^2 - 2uv + v^2\right)}{2uv}$$

$$x_2 = \frac{u^2 \cancel{- v^2} + u^2 - 2uv + \cancel{v^2}}{2uv}$$

$$x_2 = \frac{2u^2 - 2uv}{2uv}$$

Izlucim $2u$ u brojniku, dakle slijedi:

$$x_2 = \frac{{}^1\cancel{2}\,{}^1\cancel{u}\,(u-v)}{\cancel{2}_1\cancel{u}_1 v}$$

$$x_2 = \frac{u-v}{v}$$

Time sam rijesio danu jednadzbu. Dobivena su dakle dva rjesenja $x_1 = \frac{u-v}{u}$ i $x_2 = \frac{u-v}{v}$. Jedino sto jos mogu jest vratiti supstitucije:

$$u = a$$

$$v = b$$

Uzmem li to u obzir rjesenja su zapravo $x_1 = \frac{a-b}{a}$ i $x_2 = \frac{a-b}{b}$.

$$- \star -$$

Zadatak 7: 6) (str. 43) Rijesi sljedecu jednadzbu:

$$x^2 - (2a - b)\,x + a^2 - ab - 2b^2 = 0$$

Rjesenje: Da bih se lakse snasao kod rijesavanja ove jednadzbe napravim jednostavne supstitucije

$$u = a$$

$$v = b$$

Razlog tome lezi u cinjenici da standardo kvadratne jednazbe zapisujem u obliku $ax^2 + bx + c = 0$, dakle kad bi ispisivao koeficijente tada bi mi se oznake poklopile. No to zelim izbjeci da bude jasniji postupak, a najlaksi nacin da to ucinim jest uvodjenjem supstitucija. Pocetna kvaratna jednadzba sada ima sljedeci oblik:

$$x^2 - (2u - v)\,x + u^2 - uv - 2v^2 = 0$$

Nadalje ispisem koeficijente dane kvadratne jednadbe:

$$a = 1$$

$$b = -\left(2u - v\right)$$

$$c = u^2 - uv - 2v^2$$

Izraz po kojem izracunavam rjesenja kvadratnih jednadzbi jest:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Uvrstim ispisane koeficijente u gornji izraz te racunam:

$$x_1, x_2 = \frac{-\left[-\left(2u - v\right)\right] \pm \sqrt{\left[-\left(2u - v\right)\right]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (u^2 - uv - 2v^2)}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1, x_2 = \frac{2u - v \pm \sqrt{\underline{\left(2u - v\right)^2} - 4u^2 + 4uv + 8v^2}}{2}$$

Raspisem podcrtani dio po izrazu za kvadrat razlike $\left(a - b\right)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ dakle racunam:

$$\left(2u - v\right)^2 = \left(2u\right)^2 - 2 \cdot 2u \cdot v + v^2 = 4u^2 - 4uv + v^2$$

Primjenim to saznanje kod svog racuna, dakle slijedi:

$$x_1, x_2 = \frac{2u - v \pm \sqrt{4u^2 - 4uv + v^2 - 4u^2 + 4uv + 8v^2}}{2}$$

Pokratim sto se pokratiti dade te dobijem:

$$x_1, x_2 = \frac{2u - v \pm \sqrt{\cancel{4u^2} \cancel{- 4uv} + v^2 \cancel{- 4u^2} + \cancel{4uv} + 8v^2}}{2}$$

$$x_1, x_2 = \frac{2u - v \pm \sqrt{v^2 + 8v^2}}{2}$$

$$x_1, x_2 = \frac{2u - v \pm \sqrt{9v^2}}{2}$$

Izvadim drugi korijen iz izraza ispod korijena te dobijem:

$$x_1, x_2 = \frac{2u - v \pm 3v}{2}$$

Nadalje, razlomim ovo na dva slucaja. Prvo racunam cemu je jedanko rjesenje x_1, a nakon toga cu odrediti cemu je jednako rjesenje x_2.
Prvi slucaj:

$$x_1 = \frac{2u - v - 3v}{2}$$

$$x_1 = \frac{2u - 4v}{2}$$

Izlucim 2 u brojniku, dakle slijedi:

$$x_1 = \frac{{}^1\cancel{2}(u-2v)}{\cancel{2}_1}$$

$$x_1 = u - 2v$$

Drugi slucaj:

$$x_2 = \frac{2u - v + 3v}{2}$$

$$x_2 = \frac{2u + 2v}{2}$$

Izlucim 2 u brojniku, dakle slijedi:

$$x_2 = \frac{{}^1\cancel{2}(u+v)}{\cancel{2}_1}$$

$$x_2 = u + v$$

Time sam rijesio danu jednadzbu. Dobivena su dakle dva rjesenja $x_1 = u - 2v$ i $x_2 = u + v$. Jedino sto jos mogu jest vratiti supstitucije:

$$u = a$$

$$v = b$$

Uzmem li to u obzir rjesenja su zapravo $x_1 = a - 2b$ i $x_2 = a + b$.

$- \star -$

Zadatak 10: 2) (str. 43) Rijesi sljedecu jednadzbu po varijabli x, odnosno y:

$$3y^2 + 4xy - 9x^2 = -1$$

Rjesenje: Mi cemo samo rijesiti danu jednadzbu po varijabli y. To znaci da y smatram nepoznanicom, dok x smatram nekom poznatom konstantom. Za pocetak sredim malo danu jednadzbu, drugim rijecima malo drugacije ju zapisem:

$$3y^2 + 4x \cdot y - 9x^2 + 1 = 0$$

Iscitam koeficijente dane kvadratne jednadbe imajuci na umu da y smatram nepoznanicom, dok x smatram nekom poznatom konstantom:

$$a = 3$$

$$b = 4x$$

$$c = -9x^2 + 1$$

Izraz po kojem izracunavam rjesenja kvadratnih jednadzbi jest:

$$y_1, y_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Uvrstim ispisane koeficijente u gornji izraz te racunam:

$$y_1, y_2 = \frac{-(4x) \pm \sqrt{(4x)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-9x^2 + 1)}}{2 \cdot 3}$$

$$y_1, y_2 = \frac{-4x \pm \sqrt{16x^2 + 108x^2 - 12}}{6}$$

$$y_1, y_2 = \frac{-4x \pm \sqrt{124x^2 - 12}}{6}$$

Izlucim 4 iz clanova razlike ispod korijena:

$$y_1, y_2 = \frac{-4x \pm \sqrt{4(31x^2 - 3)}}{6}$$

Nadalje znam da za korijene vrijedi sljdeci identitet $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$. Imajuci to na umu dalje racunam:

$$y_1, y_2 = \frac{-4x \pm \sqrt{4} \cdot \sqrt{31x^2 - 3}}{6}$$

$$y_1, y_2 = \frac{-4x \pm 2 \cdot \sqrt{31x^2 - 3}}{6}$$

Izlucim 2 iz oba clana sume/razlike u brojniku:

$$y_1, y_2 = \frac{{}^{1}\cancel{2}\left(-2x \pm \sqrt{31x^2 - 3}\right)}{\cancel{6}_{3}}$$

$$y_1, y_2 = \frac{-2x \pm \sqrt{31x^2 - 3}}{3}$$

Ovo se nazalost dalje vise ne moze srediti. Na slican nacin bi rijesili ovu jednadzbu i po varijabli x te bi tada y smatrali konstantom.

$- \star -$

Zadatak 13: 2) (str. 44) Rijesi sljedecu jednadzbu:

$$(x-a)^3 - (x-b)^3 = b^2 - a^3$$

Rjesenje: Uocim da se i na lijevoj i na desnoj strani zapravo nalaze razlike kubova. Nadalje znam da ya rayliku kubova vrijedi sljedeci identitet:

$$u^3 - v^3 = (u - v)\left(u^2 + uv + v^2\right)$$

Raspisem lijevu i desnu stranu po tom izrazu:

$$(\underbrace{x-a}_{u})^3 - (\underbrace{x-b}_{v})^3 = b^2 - a^3$$

$$[x-a-(x-b)]\left[(x-a)^2+(x-a)(x-a)+(x-b)^2\right]=(b-a)\left(b^2+ab+a^2\right)$$

$$(x-a-x+b)\left[(x-a)^2+(x-a)(x-b)+(x-b)^2\right]=(b-a)\left(b^2+ab+a^2\right)$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$(\cancel{x}-a\cancel{-x}+b)\left[(x-a)^2+(x-a)(x-b)+(x-b)^2\right]=(b-a)\left(b^2+ab+a^2\right)$$

$$(b-a)\left[(x-a)^2+(x-a)(x-b)+(x-b)^2\right]=(b-a)\left(b^2+ab+a^2\right)$$

Podijelim cijelu jednadzbu sa $(b-a)$ te dobijem:

$$(b-a)\left[(x-a)^2+(x-a)(x-b)+(x-b)^2\right]=(b-a)\left(b^2+ab+a^2\right)\ /\ :(b-a)$$

$$(x-a)^2+(x-a)(x-b)+(x-b)^2=b^2+ab+a^2$$

Nadalje raspisem sve sto se dade s lijeve strane, dakle po dva kvadrata razlike prema izrazu $(u-v)^2=u^2-2uv+v^2$, dok srednji clan sredjujem po principu svaki sa svakim. Racunam:

$$x^2-2xa+a^2+x^2-xb-ax+ab+x^2-2xb+b^2=b^2+ab+a^2$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$x^2-2ax+\cancel{a^2}+x^2-bx-ax+\cancel{ab}+x^2-2bx+\cancel{b^2}=\cancel{b^2}+\cancel{ab}+\cancel{a^2}$$

$$x^2-2ax+x^2-bx-ax+x^2-2bx=0$$

Zbrojim istovrsne clanove sume:

$$3x^2-3ax-3bx=0$$

Podijelim cijeli izraz s 3:

$$3x^2-3ax-3bx=0/\ :3$$

$$x^2-ax-bx=0$$

Izlucim iz svih clanova sume x:

$$x\cdot(x-a-b)=0$$

Sada znam da ako je umnozak neka dva broja jednak 0, tada je ili prvi od ta dva broja jednak 0 ili je onaj drugi jednak 0. Primjenim li tu cinjenicu u nasem slucaju mora vrijediti:

$$x=0\ \text{ ili }\ x-a-b=0$$

Dakle rijesimo li te dvije jednostavne linearne jednadzbe dobijemo:

$$x_1=0\ \text{ ili }\ x_2=a+b$$

I time smo rijesili nasu jednadzbu s time da smo dobili dva rjesenja i to $x_1 = 0$ i $x_2 = a + b$.

$- \star -$

Zadatak 13: 4) (str. 44) Rijesi sljedecu jednadzbu:

$$a^2 (b - x)^2 = b^2 (a - x)^2$$

Rjesenje: Prvo sto bi mi palo na pamet jest korijenovati cijeli izraz. No to mi povlaci uvodjenje apsolutnih vrijesnosti sto zelim zapravo izbjeci. Pa umjesto da korijenujemo cijelu jednadzbu probajmo desnu stranu jednadzbe prebaciti na lijevu stranu:

$$a^2 (b - x)^2 - b^2 (a - x)^2 = 0$$

Prisjetim se da vrijedi sljedeci identitet $u^n \cdot v^n = (u \cdot v)^n$. Sredim gornji izraz imajuci to na umu:

$$[a (b - x)]^2 - [b (a - x)]^2 = 0$$

Promotrim li malo dobiveni izraz dolazim do zakljucka da se zapravo radi o razlici kvadratu koju raspisujem prema izrazu $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$. Imajuci to na umu sredim gore dobiveni izraz:

$$[a (b - x) - b (a - x)] \cdot [a (b - x) + b (a - x)] = 0$$

Raspisem zagrade unutar uglatih zagrada:

$$[ab - ax - ba + bx] \cdot [ab - ax + ba - bx] = 0$$

Pokratim sto se pokratiti dade te takodjer zbrojim istovjetne clanove suma:

$$[\cancel{ab} - ax \cancel{- ab} + bx] \cdot [2ab - ax - bx] = 0$$

$$[-ax + bx] \cdot [2ab - ax - bx] = 0$$

Sada znam da ako je umnozak neka dva broja jednak 0, tada je ili prvi od ta dva broja jednak 0 ili je onaj drugi jednak 0. Primjenim li tu cinjenicu u nasem slucaju mora vrijediti:

$$-ax + bx = 0 \;\text{ ili }\; 2ab - ax - bx = 0$$

Usredotocimo se na prvu jednadzbu za pocetak. Dakle racunam:

$$-ax + bx = 0$$

Izlucim x iz oba clana na lijevoj strani:

$$x \cdot (-a + b) = 0$$

Podijelim cijelu jedndadzbu s $-a + b$ te dobijem:

$$x \cdot (-a + b) = 0 / \;: (-a + b)$$

$$x = 0$$

Dakle rjesenje prve jednadzbe jest $x_1 = 0$. Nadalje rijesimo i drugu jednadzbu:

$$2ab - ax - bx = 0$$

Prebacim $2ab$ na desnu stranu:

$$-ax - bx = -2ab$$

Izlucim x iz oba clana na lijevoj strani:

$$x \cdot (-a - b) = -2ab$$

Podijelim cijelu jedndadzbu s $-a + b$ te dobijem:

$$x \cdot (-a - b) = -2ab / \ : (-a - b)$$

$$x = \frac{-2ab}{-a - b}$$

Izlucim $-$ u nazivniku i pokratim sto se dade:

$$x = \frac{\cancel{-}2ab}{\cancel{-}(a + b)}$$

$$x = \frac{2ab}{a + b}$$

Dakle rjesenje druge jednadzbe jest $x_2 = \dfrac{2ab}{a + b}$.
Time smo rijesili pocetnu jednadzbu s time da smo dobili dva rjesenja i to $x_1 = 0$ i $x_2 = \dfrac{2ab}{a + b}$.

$- \star -$

Zadatak 13: 6) (str. 44) Rijesi sljedecu jednadzbu:

$$(x - a)^2 + 2(x - a) - 3 = 0$$

Rjesenje: Dakle ova jednadzba je najjednostavnija od primjera koje smo rijesili iz ovog zadatka Promotrim li malo jednadzbu vidim da se neki izrazi u njoj ponavljaju. Podcrtajmo ih:

$$(\underline{x - a})^2 + 2(\underline{x - a}) - 3 = 0$$

Ideja jest uvesti supstituciju za taj izraz, dakle uvodim sljedecu supstituciju:

$$t = x - a$$

Tada dana jednadzba prelazi u sljedeci oblik:

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

To je standardna kvadratna jednadzba. Izraz po kojem izracunavam rjesenja kvadratnih jednadzbi jest:

$$t_1, t_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nadalje ispisem koeficijente dane kvadratne jednadbe:

$$a = 1$$

$$b = 2$$

$$c = -3$$

Uvrstim ispisane koeficijente u gornji izraz te racunam:

$$t_1, t_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}$$

$$t_1, t_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$$

$$t_1, t_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$t_1, t_2 = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

Dakle jedno rijesenje dane kvadratne jednadzbe jest:

$$t_1 = \frac{-2 - 4}{2} = \frac{{}^{-3}\cancel{-6}}{\cancel{2}_1} = -3$$

Dok je drugo rijesenje dane kvadratne jednadzbe:

$$t_2 = \frac{-2 + 4}{2} = \frac{{}^{1}\cancel{2}}{\cancel{2}_1} = 1$$

Posto sam uveo supstituciju preostalo je jos rijesiti dvije jednadzbe:

$$t_1 = -3 \;\text{ i }\; t_2 = 1$$

$$x_1 - a = -3 \;\text{ i }\; x_2 - a = 1$$

U obje jednadzbe prebacim a s lijeve na desnu stranu te dobijem:

$$x_1 = a - 3 \;\text{ i }\; x_2 = a + 1$$

Time smo rijesili pocetnu jednadzbu s time da smo dobili dva rjesenja i to $x_1 = a - 3$ i $x_2 = a + 1$.

$- \star -$

Zadatak 14: 4) (str. 44) Rijesi sljedecu jednadzbu:

$$\frac{x+b}{x-a}-\frac{x^2+a^2-b^2-ax}{x^2-ax-bx+ab}=\frac{x+a}{b-x}$$

Rjesenje: Dakle ova jednadzba me zapravo podsjeca na algebarske razlomke. Prosjetim se da kod algebarskih razlomaka glavna stvar jest pokusati faktorizirati nazivnike svakog od clana izraza. Jedini nazivnik koji ja trebam faktorizirati jest nazvinik drugog po redu clana naseg izraza:

$$\frac{x^2+a^2-b^2-ax}{x^2-ax-bx+ab}$$

Nadalje uocim da iz prva dva clana sume u nazivniku tog razlomka mogu izluciti x, dok iz druga dva clana sume unazivniku tog razlomka mogu izluciti $-b$. Pa ucinim to:

$$\frac{x^2+a^2-b^2-ax}{x^2-ax-bx+ab}=\frac{x^2+a^2-b^2-ax}{x\,(x-a)-b\,(x-a)}$$

Sada uocim da mogu izluciti izraz $(x-a)$ u nazivniku tog razlomka. Racunam:

$$\frac{x^2+a^2-b^2-ax}{x^2-ax-bx+ab}=\frac{x^2+a^2-b^2-ax}{x\,(x-a)-b\,(x-a)}=\frac{x^2+a^2-b^2-ax}{(x-a)\,(x-b)}$$

Vratim se sada s tako sredjenim razlomkom u pocetnu jednadzbu:

$$\frac{x+b}{x-a}-\frac{x^2+a^2-b^2-ax}{(x-a)\,(x-b)}=\frac{x+a}{b-x}$$

Malo jos sredim ovu jednadzbu na nacin da izlucim $-$ u nazivniku posljednjeg razlomka.Tada dobijem:

$$\frac{x+b}{x-a}-\frac{x^2+a^2-b^2-ax}{(x-a)\,(x-b)}=\frac{x+a}{-\,(-b+x)}$$

$$\frac{x+b}{x-a}-\frac{x^2+a^2-b^2-ax}{(x-a)\,(x-b)}=-\frac{x+a}{(x-a)}$$

Vidim da sada mogu cijelu jednadzbu pomnoziti s $(x-a)\,(x-b)$. No prije nego to ucinim primjetim da mora vrijediti slijedece:

$$x-a\neq 0\Rightarrow x\neq a$$

$$x-b\neq 0\Rightarrow x\neq b$$

Dakle ovo cinim jer moram paziti da se ne dijeli s 0. No samim time sada znam da ako dobijem rjesenja konacnje jednadzbe jednaka a ili b morat cu ih izbaciti iz skupa rjesenja pocetne jednadzbe. Nakon ovog razmatranja provedem mnozenje:

$$\frac{x+b}{x-a}-\frac{x^2+a^2-b^2-ax}{(x-a)\,(x-b)}=-\frac{x+a}{(x-b)}\;/\cdot(x-a)\,(x-b)$$

$$(x+b)(x-b)-\left(x^2+a^2-b^2-ax\right)=-(x+a)(x-a)$$

Nadalje uocim da je prvi odnosno zadnji produkt u izrazu zapravo razlika kvadrata koju sredjujem prema izrazu $(u-v)(u+v)=u^2-v^2$. Imajuci to na umu sredim gore dobiveni izraz:

$$x^2-b^2-x^2-a^2+b^2+ax=-\left(x^2-a^2\right)$$

$$x^2-b^2-x^2-a^2+b^2+ax=-x^2+a^2$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$\cancel{x^2}\cancel{-b^2}\cancel{-x^2}-a^2+\cancel{b^2}+ax=-x^2+a^2$$

$$-a^2+ax=-x^2+a^2$$

Prebacim sve na lijevu stranu te dobijem sljedecu kvadratnu jednadzbu:

$$x^2-a^2+ax-a^2=0$$

$$x^2+ax-2a^2=0$$

Nadalje ispisem koeficijente dane kvadratne jednadbe:

$$a=1$$

$$b=a$$

$$c=-2a^2$$

Izraz po kojem izracunavam rjesenja kvadratnih jednadzbi jest:

$$x_1,x_2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Uvrstim ispisane koeficijente u gornji izraz te racunam:

$$x_1,x_2=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4\cdot1\cdot(-2a^2)}}{2\cdot1}$$

$$x_1,x_2=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+8a^2}}{2}$$

$$x_1,x_2=\frac{-a\pm\sqrt{9a^2}}{2}$$

Korijenuujem izraz pod korijenom:

$$x_1,x_2=\frac{-a\pm3a}{2}$$

Dakle jedno rijesenje dane kvadratne jednadzbe jest:

$$x_1=\frac{-a-3a}{2}=\frac{{}^{-2a}\cancel{-4a}}{\cancel{2}_1}=-2a$$

Dok je drugo rijesenje dane kvadratne jednadzbe:

$$x_2 = \frac{-a+3a}{2} = \frac{{}^{a}\cancel{2a}}{\cancel{2}_1} = a$$

No prisjetim se da je ovo drugo rjesenje u skupu zabranjenih rjesenja jer vodi k dijeljenju s 0. Zakljucujem da jednadzba ima samo jedno rjesenje.
Time smo rijesili pocetnu jednadzbu s time da smo dobili samo jedno rjesenje i to $x = -2a$.

$- \star -$

Zadatak 18: 2) (str. 44) Odredi vrijednosti koeficijenta k za koje je jedan korijen druge jednadzbe dvostruko veci od jednog korijena prve jednadzbe:

$$\begin{cases} 2x^2 + kx - 1 = 0 \\ 3x^2 - kx - 2 = 0 \end{cases}$$

Napomena: Korijen jest drugo ime za rjesenje jednadzbe!

Rjesenje: Ono sto cu uciniti jest ustedotocit cu se na prvu jednadzbu za pocetak i pokusati odrediti cemu bi njena rjesenja trebala biti jednaka. Dakle kvadratna jednadzba kojom se prvo bavim jest:

$$2x^2 + kx - 1 = 0$$

Ispisem koeficijente dane kvadratne jednadbe:

$$a = 2$$

$$b = k$$

$$c = -1$$

Izraz po kojem izracunavam rjesenja kvadratnih jednadzbi jest:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Uvrstim ispisane koeficijente u gornji izraz te racunam:

$$x_1, x_2 = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 + 8}}{4}$$

Isti postupak ponovim za drugu jednadzbu, odnosno za jednadzbu:

$$3x^2 - kx - 2 = 0$$

Ispisem koeficijente dane kvadratne jednadbe:

$$a = 3$$

$$b = -k$$

$$c = -2$$

Izraz po kojem izracunavam rjesenja kvadratnih jednadzbi jest:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Uvrstim ispisane koeficijente u gornji izraz te racunam:

$$x_1, x_2 = \frac{-(-k) \pm \sqrt{(-k)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3}$$

$$x_1, x_2 = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 24}}{6}$$

U zadatku dakle pise da moram odrediti takav k da jedan korijen druge jednadzbe bude dvostuko veci od jednog korijena prve jednadzbe. To mi u sustini znaci da izraz za rjesenja druge jednadzbe mora biti dvostruko veci od izraza za rjesenja prve jednadbe. Dakle mora vrijediti:

$$2 \cdot \frac{-k \pm \sqrt{k^2 + 8}}{4} = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 24}}{6}$$

$${}^{1}\cancel{2} \cdot \frac{-k \pm \sqrt{k^2 + 8}}{\cancel{4}_2} = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 24}}{6}$$

$$\frac{-k \pm \sqrt{k^2 + 8}}{2} = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 24}}{6}$$

Ono sto sam dobio na taj nacin jest iracionalna jednadzba po varijabli k. Sredjivanje zapocnem na nacin da izraz ponozim s 6. Racunam:

$$\frac{-k \pm \sqrt{k^2 + 8}}{2} = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 24}}{6} \quad / \cdot 6$$

$${}^{3}\cancel{6} \cdot \frac{-k \pm \sqrt{k^2 + 8}}{\cancel{2}_1} =^{1} \cancel{6} \cdot \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 24}}{\cancel{6}_1}$$

$$3\left(-k \pm \sqrt{k^2 + 8}\right) = k \pm \sqrt{k^2 + 24}$$

$$-3k \pm 3\sqrt{k^2 + 8} = k \pm \sqrt{k^2 + 24}$$

Prebacim $-3k$ s lijeve strane na desnu te dobijem:

$$\pm 3\sqrt{k^2 + 8} = 4k \pm \sqrt{k^2 + 24}$$

Nadalje moram kvadrirati gore dobiveni izraz.

<u>Napomena</u>: Ako se prisjetim kako se rjesavaju iracionalne jednadzbe trebao

bi postaviti uvjet da su svi izrazi ispod korijena pozitivni. Nou nasem slucaju to je doista tako jer zbroj kvadrata nekog broja i pozitivnog broja jest pozitivan broj!

Racunam:

$$\pm 3\sqrt{k^2+8} = 4k \pm \sqrt{k^2+24} \ /^2$$

$$\left(\pm 3\sqrt{k^2+8}\right)^2 = \left(4k \pm \sqrt{k^2+24}\right)^2$$

Lijevu stranu kvadriram imajuci na umu identitet $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, dok desnu stranu rapisujem po identitetu $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. Imajuci to na umu nastavljam racun:

$$(\pm 3)^2 \left(\sqrt{k^2+8}\right)^2 = (4k)^2 \pm 2 \cdot 4k \cdot \sqrt{k^2+24} + \left(\sqrt{k^2+24}\right)^2$$

$$9\left(k^2+8\right) = 16k^2 \pm 8k \cdot \sqrt{k^2+24} + \left(\sqrt{k^2+24}\right)^2$$

$$9k^2 + 72 = 16k^2 \pm 8k \cdot \sqrt{k^2+24} + k^2 + 24$$

Preostali korijen prebacim na lijevu stranu dok ostatak izraza prebacim na desnu stranu:

$$\mp 8k \cdot \sqrt{k^2+24} = 16k^2 + k^2 - 9k^2 + 24 - 72$$

$$\mp 8k \cdot \sqrt{k^2+24} = 8k^2 - 48$$

Podijelim cijelu jednadzbu s 8 te dobijem:

$$\mp 8k \cdot \sqrt{k^2+24} = 8k^2 - 48 \ / : 8$$

$$\mp k \cdot \sqrt{k^2+24} = k^2 - 6$$

Da bih se rijesio korijena cijeli izraz kvadriram ponovo, i ovaj put vrijedi ista napomena, drugim rijecima nije potrebno pisati uvjete abog specificne situacije u kojoj se nalazimo. Racunam:

$$\mp k \cdot \sqrt{k^2+24} = k^2 - 6 \ /^2$$

$$\left(\mp k \cdot \sqrt{k^2+24}\right)^2 = \left(k^2-6\right)^2$$

Lijevu stranu kvadriram imajuci na umu identitet $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, dok desnu stranu rapisujem po identitetu $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. Imajuci to na umu nastavljam racun:

$$(\mp k)^2 \left(\sqrt{k^2+24}\right)^2 = \left(k^2\right)^2 - 2 \cdot k^2 \cdot 6 + 6^2$$

$$k^2\left(k^2+24\right) = k^4 - 12k^2 + 36$$

$$k^4 + 24k^2 = k^4 - 12k^2 + 36$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$\cancel{k^4} + 24k^2 = \cancel{k^4} - 12k^2 + 36$$

$$24k^2 = -12k^2 + 36$$

Prebacim nepoznanice na jednu stranu, a poznanice na drugu:

$$24k^2 + 12k^2 = 36$$

$$36k^2 = 36$$

Podijelim cijelu jednadzbu s 36 i dobijem:

$$36k^2 = 36 \ / : 36$$

$$k^2 = 1$$

Sada jos samo korijenujem danu jednadzbu da bih dobio njena rjesenja:

$$k^2 = 1 \ /\sqrt{\ }$$

$$k_{1,2} = \pm 1$$

Dakle da bi jedno rjesenje druge jednadzbe bilo dvostruko vece od jednog rjesenja prve jednadzbe k mora bit ili 1 ili -1.

$- \star -$