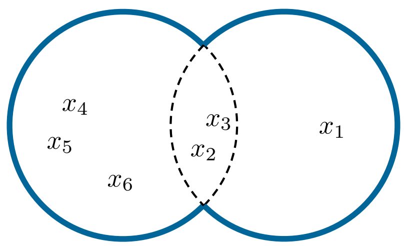
Operacije sa skupovima

Prvo dajemo definicije dviju osnovnih operacija sa skupovima, unije i presjeka.

Definicija: (**unija**) Unija dvaju skupova A i B je skup koji sadrzi sve elemente koji su sadrzani ili u skupu A ili u skupu B.

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ili } x \in B\}$$

Graficki to izgleda ovako:

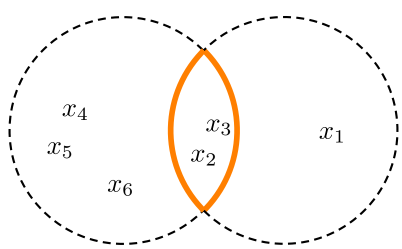


Unija dvaju skupova su svi oni elementi koji se nalaze unutar plavih "linija". Unija zapravo sadrzi sve elemente prvog i drugog skupa. Svaki element se navodi samo jednom bez obzira na broj pojava.

Definicija: (**presjek**) Presjek dvaju skupova A i B je skup koji sadrzi one elemente koji su sadrzani i u skupu A i u skupu B.

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ ili } x \in B\}$$

Graficki to izgleda ovako:

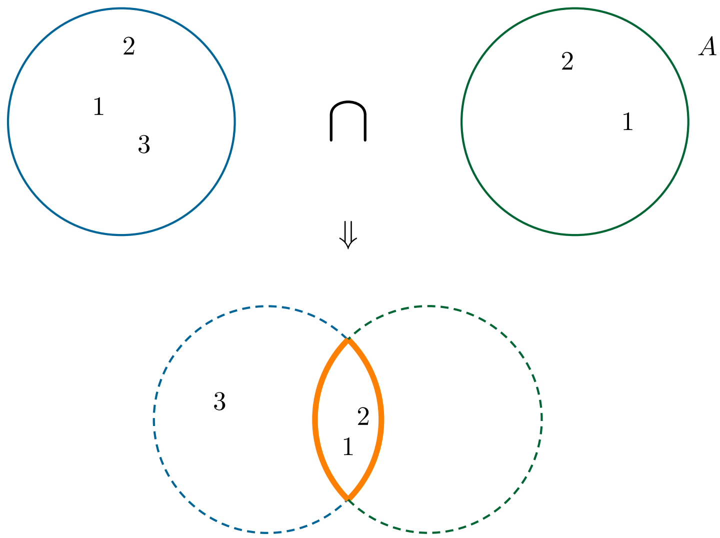


Presjek dvaju skupova su oni elementi koji se nalaze unutar narancastih "linija".

Zadatak 7: (str. 34) 1) Odredi neki skup A tako da vrijedi:

$$\{1,2,3\} \cap A = \{1,2\}$$

Rjesenje: Pokusajmo ovo prikazati graficki:



Dakle kako su brojevi 1 i 2 u presjeku oni se moraju sigurno nalaziti u oba skupa pa zakljucujemo da skup A mora barem sadrzavati elemente 1 i 2, odnosno:

$$A = \{1,2\}$$

Postavlja se pitanje koje jos elemente skup A moze sadrzavati. No lakse je odgovoriti koje elemente skup A ne smije sadrzavati. To je dakako broj 3. Naime kad bi broj 3 bio u skupu A tada bi on morao biti i u presjeku, a vidimo iz teksta zadatka da to ne smije biti tako.

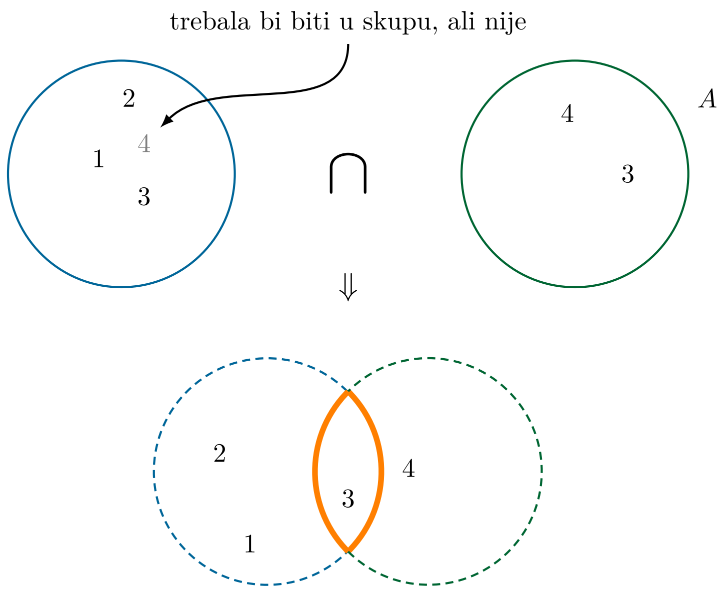
Dakle uz 1 i 2 skup A moze jos sadrzavati bilo koji element koji je **razlicit** od 3.

Time je zadatak rijesen.

Zadatak 7: (str. 34) 3) Odredi neki skup A tako da vrijedi:

$$\{1,2,3\} \cap A = \{3,4\}$$

Rjesenje: Pokusajmo ovo prikazati graficki:



Dakle kako su brojevi 3 i 4 u presjeku oni se moraju sigurno nalaziti u oba skupa pa zakljucujemo da skup A mora barem sadrzavati elemente 3 i 4, odnosno:

$$A = \{3, 4\}$$

No tu dolazimo do fundamentalnog problema, a taj je da prvi skup ne sadrzi element 4 pa ga samim time ne moze biti ni u presjeku. Zbog te cinjenice sasvim je svejedno kakav je skup A jer je nemoguce postici dan presjek.

Zadatak, dakle nema rjesenja, a samim time je i na neki nacin rijesen.

Zadatak 8: (str. 34) 1) Odredi neki skup B tako da vrijedi:

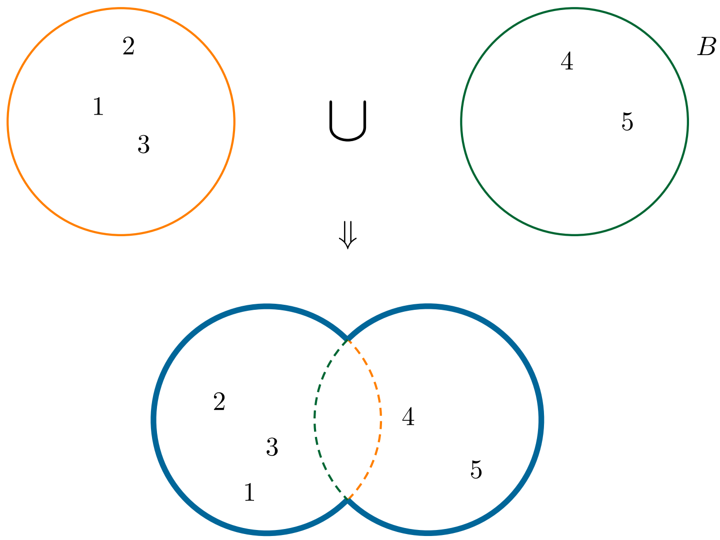
$$\{1, 2, 3\} \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Rjesenje: Kako unija dvaju skupova sadrzi sve one elemente koji su barem od jedom od skupova ciju uniju gledamo. Kako prvi skup sadrzi elemente 1, 2 i 3 da bi unija sadrzavala elemente 1, 2, 3 skup B sigurno mora sadrzavati barem elemente 4 i 5, odnosno:

$$B = \{4, 5\}$$

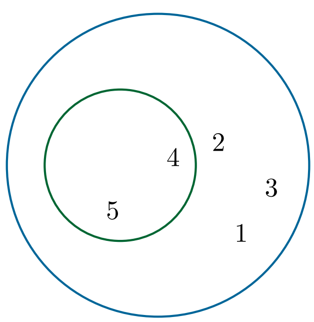
Postavlja se pitanje koje jos elemente skup B moze sadrzavati. Sasvim je jasno da skup moze sadrzavati jos eventualno on elemente koji se nalaze i u prvom skupu. Ako bi sadrzavao jos bilo koji drugi element tada bi i unija morala sadrzavati taj element.

Dakle uz 4 i 5 skup B moze jos sadrzavati neke od elementa 1, 2 i 3. Graficki prikazano:



Odnosi medju skupovima mogu biti sljedeci:

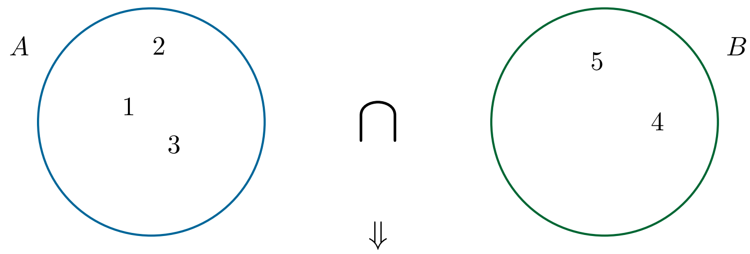
I. Jedan skup je podskup drugog:

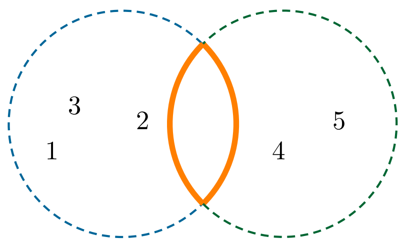


Vidimo da je svaki element skupa B ujedno i element skupa A pa kazemo da je skup B podskup skupa A, odnosno

$$(x \in B \Rightarrow x \in A) \Rightarrow B \subseteq A$$

II. Skupovi nemaju zajednickih elemenata (disjunktni su):

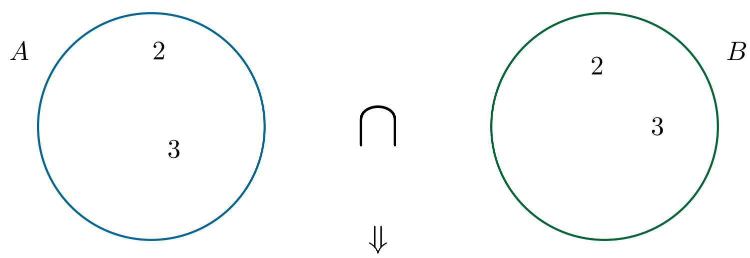


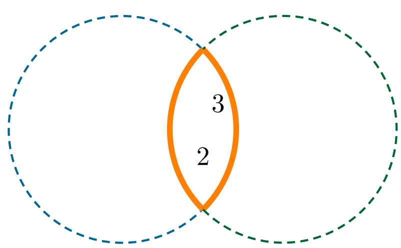


Vidimo da u presjeku tih dvaju skupova nema nijednog elementa, odnosno da vrijedi

$$A \cap B = \varnothing$$

III. Skupovi su jednaki:





Vidimo da je u presjeku tih dvaju skupova svaki element obaju skupova, odnosno da vrijedi

$$A \cap B = A = B$$

Primjetimo da takodjer vrijedi

$$(A \subseteq B \text{ i } B \subseteq A) \Leftrightarrow A = B$$

Dakle skupovi su jednaki ako je prvi skup podskup drugog i drugi skup je podskup prvog.

Zadatak 6: (str. 34) 1) U kojem su medjusobnom odnosi sljedeci skupovi:

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n = 3k\}$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} : n = 6k\}$$

Rjesenje: Kako broj 6 mozemo zapisati kao $3 \cdot 2$ skup B mozemo definirati na sljedeci nacin:

$$B = \{n \in \mathbb{N} : n = \underset{3\cdot 2}{6}k\} \quad \Rightarrow \quad B = \{n \in \mathbb{N} : n = 3 \cdot 2k\}$$

Uocimo da je svaki element skupa B ujedno i element skupa A. Naime u skupu A su visekratnici broja 3, a ako malo razmislimo vidimo da je u skupu B je zapravo svaki drugi visektanik broja 3 no jos uvijek u sustini visekranik broja 3, dakle vrijedi:

$$B \subseteq A$$

Time je zadatak rijesen.

Zadatak 12: (str. 34) 1) Sto se moze reci o skupovima A i B ako vrijedi:

$$A \cup B = A$$

Rjesenje: Promotrimo li danu jednakost mozemo zakljuciti da u skupu B ocito ne postoji ni jedan element koji nije i u skupu A, jer inace unija skupova A i B nebi bila jednaka skupu A vec necem drugom. No ako je svaki element skupa B ujedno i u skupu A ta da vrijedi:

$$B \subseteq A$$

Odnosno skup B mora biti podskup skupa A. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 12: (str. 34) 2) Sto se moze reci o skupovima A i B ako vrijedi:

$$A \cup B = A \cap B$$

Rjesenje: Promotrimo li danu jednakost mozemo zakljuciti da u skupu A i u skupu B moraju biti potpuno isti elementi. Kad bi postojao neki element koji jest u jednom, a nije u drugom skupu tada bi se taj element nalazio i u uniji, no nebi se nalazio u presjeku jer su u presjeku samo oni elementi koji su u oba skupa. Dakle vrijedi:

$$A = B$$

Dakle skupovi A i B su jednaki. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 12: (str. 34) 3) Sto se moze reci o skupovima A, B i C ako vrijedi:

$$A \cap B \cap C = A$$

Rjesenje: Promotrimo li danu jednakost zakljucujemo da svi elementi skupa A moraju ujedno biti i u skupovima B i C jer u protivnom njihov presjek nebi bio jednak skupu A, neki element bi nedostajao, dakle vrijedi:

$$A \subseteq B \quad \text{i} \quad A \subseteq C$$

Odnosno skup A je podskup skupa B i skupa C. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 12: (str. 34) 4) Sto se moze reci o skupovima A, B i C ako vrijedi:

$$A \cup B \cup C = A$$

Rjesenje: Promotrimo li danu jednakost zakljucujemo da svi elementi skupa B moraju ujedno biti i u skupu A i svi elementi skupa C takodjer moraju biti u skupu A. Kad to ne bi bio slucaj unija sva tri skupa nebi bila jednaka skupu A vec bi postojao jos neki element u njoj koji nije element skupa A, dakle mora vrijediti:

$$B \subseteq A \quad \text{i} \quad C \subseteq A$$

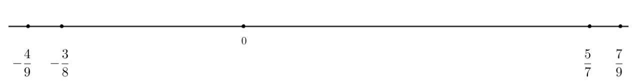
Odnosno skup B je podskup skupa A i skup C je takodjer podskup skupa A. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 16: (str. 34) Odredi $A \cup B$ i $A \cap B$ ako je:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Q} : -\frac{3}{8} < x \leq \frac{5}{7} \right\}$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{Q} : -\frac{4}{9} \leq x \leq \frac{7}{9} \right\}$$

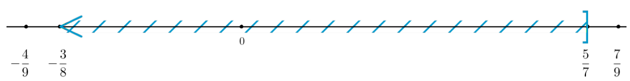
Rjesenje: Sve razlomke koji se nalaze u definiciji skupova A i B ucrtamo na brojevni pravac, time dobijamo sljedecu sliku:



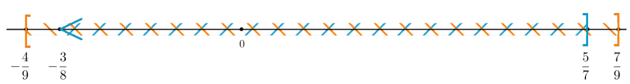
Iscrtajmo prvo racionalne brojeve koji su u skupu A tako da iscrtamo dio pravca izmedju racionalnih brojeva $-\frac{3}{8}$ i $\frac{5}{7}$ plavom bojom linijama ukosenim udesno.

Napomena: Stroge nejednakosti $<$ i $>$ na pravcu oznacavamo istim simbolima i citamo da rub nije ukljucen, dok nejednakosti $\leq$ i $\geq$ na pravcu oznacavamo simbolima [i] i citamo da je rub ukljucen.

Situacija je dana sljedecom slikom:



Na isti pravac ucrtavamo racionalne brojeve koji su u skupu B tako da iscrtamo dio pravca izmedju racionalnih brojeva $-\dfrac{4}{9}$ i $\dfrac{7}{9}$ narancastom bojom linijama ukosenim ulijevo. Konacna situacija dana je sljedecom slikom:



Sada zakljucujemo prema definiciji. Pozabavimo se prvo presjekom. Brojevi koji su u presjeku dvaju skupova moraju biti u oba skupa sto zapravo znaci da su u nasem slucaju to svi oni brojevi koji su dvaput iscrtani, odnosno racionalni brojevi izmedju racionalnih brojeva $-\dfrac{3}{8}$ i $\dfrac{5}{7}$. Odnosno vrijedi:

$$A \cap B = \left\{ x \in \mathbb{Q} : -\frac{3}{8} < x \leq \frac{5}{7} \right\}$$

Primjetimo da lijevi rub nije ukljucen pa je pokraj njega stroga nejednakost. Takodjer primjetimo da je presjek skupova A i B zapravo skup A.

Nadalje preostaje jos odrediti uniju danih skupova. Brojevi koji su u uniji dvaju skupova moraju biti barem u jednom od skupova sto zapravo znaci da su u nasem slucaju to svi oni brojevi koji su iscrtani barem jednom, odnosno racionalni brojevi izmedju racionalnih brojeva $-\dfrac{3}{8}$ i $\dfrac{5}{7}$. Odnosno vrijedi:

$$A \cup B = \left\{ x \in \mathbb{Q} : -\frac{4}{9} \leq x \leq \frac{7}{9} \right\}$$

Primjetimo da je presjek skupova A i B zapravo skup B. Time je zadatak rijesen.