Mjera i visekratnik. Euklidov algoritam

Zadatak 5: (str. 24) Dokazi da je najveca zajednicka mjera dvaju uzastopnih parnih brojeva jednaka 2.

Rjesenje: Prisjetimo se da parne brojeve opcenito mozemo zapisati na sljedeci nacin:

$$2n; \quad \text{za } n \in \mathbb{Z}$$

Tada su dva uzastopna parna broja primjerice jednaka:

$$2n, 2n+2; \quad \text{za } n \in \mathbb{Z}$$

Kod drugog broja iz oba clana sume mozemo izluciti broj 2 pa niz od dva uzastopna parna broja poprima oblik:

$$2 \cdot n, 2 \cdot (n+1)\,; \quad \text{za } n \in \mathbb{Z}$$

Uocimo da su oba broja djeljiva s 2. Da bi taj broj ujedno bio i najveci zajednicki djelitelj (mjera) brojevi n i $n+1$ ne smiju imati zajednicki djelitelj odnosno njihova najveca zajednicka mjera mora biti jednaka 1. Dakle nas zadatak je pokazati da vrijedi:

$$M(n, n+1) = 1$$

Da bismo dokazali tu tvrdnu pretpostavimo suprotno, odnosno da postoji neki cijeli broj k takav da vrijedi:

$$M(n, n+1) = k$$

Drugim rijecima pretpostavljamo da je cijeli broj k djelitelj oba broja, odnosno da vrijedi:

$$k \mid n \quad \text{i} \quad k \mid n+1$$

Tada znamo da cijeli broj k mora djeliti i razliku ta dva broja, odnosno mora vrijediti:

$$k \mid n+1-n \quad \Rightarrow \quad k \mid 1$$

Dakle dosli smo do zakljucka da cijeli broj k mora djeliti 1. No to je moguce samo ako je k jednak 1.

Kako nas je pretpostavka dovela do nemoguce situacije zakljucujemo da je ona kriva, odnosno da zaista vrijedi:

$$M(n, n+1) = 1$$

Konacno zakljucujemo da tvrdnja zadatka vrijedi:

$$M(2n, 2n+2) = 2; \quad \text{za } n \in \mathbb{Z}$$

Time je zadatak rijesen.

Napomena: Cinjenica da je najveca zajednicka mjera dvaju uzastopnih cijelih brojeva n i $n+1$ za neki $n \in \mathbb{Z}$ jednaka 1 ili krace zapisano:

$$M\left(n, n+1\right) = 1; \quad \text{za } n \in \mathbb{Z}$$

se cesto koristi kod rjesavanja zadataka danih u knjizi.

Zadatak 9: (str. 24) Ako je $M\left(a, c\right) = M\left(b, c\right) = 1$, dokazi da je onda $M\left(ab, c\right) = 1$.

Rjesenje: Neka su dani cijeli brojevi a, b i c takvi da vrijedi

$$M\left(a, c\right) = M\left(b, c\right) = 1$$

Pretpostavimo, suprtono tvrdnji zadatka, da tada postoji prost broj p takav da vrijedi

$$M\left(ab, c\right) \geq p$$

To drugim rijecima znaci da p dijeli oba broja ab i c, odnosno:

$$p \mid ab \quad \text{i} \quad p \mid c$$

No nadalje, zbog $M\left(a, c\right) = M\left(b, c\right) = 1$, zakljucujemo da p ne moze dijeliti ni a ni b, odnosno vrijedi

$$p \nmid a \quad \text{i} \quad p \nmid b$$

U suprotnom bi vrijedilo:

$$M\left(a, c\right) = M\left(b, c\right) \geq p$$

Odnosno da je najveca zajednicka mjera brojeva a i c, odnosno b i c barem jednaka prostom broju p.

To pak znaci da u rastavu na proste faktore brojeva a i b nema prostog broja p pa ga zasigurno nema ni u rastavu na proste faktore njihovog umnoska ab.

No to je, konacno, u suprotnosti s tvrdnjom da postoji prost broj p takav da vrijedi $M\left(ab, c\right) \geq p$. Dakle pretpostavka je kriva pa mora vrijediti

$$M\left(ab, c\right) = 1$$

Time je zadatak rijesen.

Zadatak 12: (str. 24) Dokazi da razlomak $\dfrac{2n-3}{n^2-3n+2}$ nije skrativ ni za koji prirodni broj n, $n \geq 3$.

Rjesenje: Izraz u nazivniku razlomka je relativno problematican pa cemo ga pokusati more srediti. Primjetimo da drugi clan sume u nazivniku, $-3n$, mozemo prikazati kao razliku na sljedeci nacin:

$$-3n = -2n - n$$

Razlomak sad poprima sljedeci oblik:

$$\frac{2n-3}{n^2 \underbrace{-\,3n}_{-2n-n} + 2} = \frac{2n-3}{n^2-2n-n+2} = (\star)$$

Izlucimo n iz prva dva clana sume u nazivniku razlomka, a $-$ iz druga dva, slijedi:

$$(\star) = \frac{2n-3}{n^2-2n-n+2} = \frac{2n-3}{n\cdot(n-2)-(n-2)} = (\star\star)$$

Nadalje izlucimo izraz $n-2$ iz oba clana sume u nazivniku razlomka, slijedi:

$$(\star\star) = \frac{2n-3}{n\cdot(n-2)-(n-2)} = \frac{2n-3}{(n-2)\cdot(n-1)}$$

Da bismo dokazali da dobiveni razlomak nije skrativ trebamo pokazati da ne postoji cijeli broj k takav da dijeli cijele brojeve $2n-3$ i $n-1$ ili da ne postoji cijeli broj k takav da dijeli cijele brojeve $2n-3$ i $n-2$. Ukratko trebamo pokazati:

$$M\left(2n-3, n-1\right) = 1; \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 3$$

ili

$$M\left(2n-3, n-2\right) = 1; \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 3$$

Usredotocit cemo se na drugu tvrdnju, odnosno na:

$$M\left(2n-3, n-2\right) = 1; \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 3$$

Nju cemo dokazati tako da pretpostavimo da vrijedi suprotna tvrdnja, odnosno da postoji neki cijeli broj k koji dijeli oba cijela broja $2n-3$ i $n-2$ za n prirodan broj veci ili jednak 3. To znaci da vrijedi:

$$k \mid 2n-3 \quad \text{i} \quad k \mid n-2$$

No tada cijeli broj k mora dijeliti i razliku ta dva broja, odnosno mora vrijediti:

$$k \mid 2n-3-(n-2)$$

Rijesimo se zagrade, slijedi:

$$k \mid 2n - 3 - n + 2$$

Pozbrojimo sto se zbrojiti dade, slijedi:

$$k \mid n - 1$$

Dakle zakljucujemo da cijeli broj k mora dijeliti i cijeli broj $n-1$ za n prirodan broj veci ili jednak 3. No to nadalje znaci da taj cijeli broj k mora dijeliti i razliku cijelih brojeva $n-1$ i $n-2$ za n prirodan broj veci ili jednak 3, odnosno mora vrijediti:

$$k \mid n - 1 - (n - 2)$$

Rijesimo se zagrade, slijedi:

$$k \mid n - 1 - n + 2$$

Pozbrojimo sto se zbrojiti dade, slijedi:

$$k \mid 1$$

Dakle dosli smo do zakljucka da cijeli broj k mora djeliti 1. No to je moguce samo ako je k jednak 1.

Kako nas je pretpostavka dovela do nemoguce situacije zakljucujemo da je ona kriva, odnosno da zaista vrijedi:

$$M\left(2n - 3, n - 2\right) = 1$$

Dakle dani razlomak je neskrativ. Time je zadatak rijesen.