1.2 Matematicka indukcija (trigonometrija) (staro izdanje)

⚔⚔ Zadatak 18: (str. 20) 2) Dokazi matematickom indukcijom:

$$\cos x+\cos 2x+\cos 3x+...+\cos nx=\frac{\cos\frac{(n+1)\,x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{nx}{2}$$

Rjesenje: Provodimo postupak dokazivanja matematickom indukcijom.

BAZA INDUKCIJE: Pokazimo da tvrdnja vrijedi za $n=1$. Uvrstavamo broj 1 u zadnji clan sume na lijevoj strani i u izraz na desnoj strani.

$$\cos\overbrace{n}^{1}x=\frac{\cos\frac{(\overbrace{n}^{1}+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{\overbrace{n}^{1}x}{2}$$

$$\cos(1\cdot x)=\frac{\cos\frac{(1+1)\,x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{1\cdot x}{2}$$

$$\cos x=\frac{\cos\frac{2x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{x}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade:

$$\cos x=\frac{\cos\frac{\cancel{2}^{1}x}{{}_{1}\cancel{2}}}{{}_{1}\cancel{\sin\frac{x}{2}}}\cdot\frac{\cancel{\sin\frac{x}{2}}^{1}}{1}$$

$$\cos x=\frac{\cos\frac{x}{1}}{1}\cdot\frac{1}{1}$$

$$\cos x=\cos x$$

Kako je lijeva strana jednaka desnoj, tvrdnja vrijedi za $n=1$.

PRETPOSTAVKA INDUKCIJE: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n\in\mathbb{N}$. Dakle da vrijedi:

$$\cos x+\cos 2x+\cos 3x+...+\cos nx=\frac{\cos\frac{(n+1)\,x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{nx}{2}$$

KORAK INDUKCIJE: Uz pretpotavku pakazimo da tvrdnja vrijedi i za n+1.
Pogledajmo prvo kako bi trebao izgledati izraz na desnoj strani tvrdnje kad bi suma na lijevoj strani imala $n+1$ clanova. To cemo uciniti tako da u izrazu na desnoj strani zamijenimo n s $n+1$, racunam:

$$\frac{\cos\frac{(\overbrace{n}^{(n+1)}+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{\overbrace{n}^{n+1}x}{2}\quad\Rightarrow\quad\frac{\cos\frac{(n+1+1)\,x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{(n+1)\,x}{2}=$$

$$=\frac{\cos\frac{(n+2)\,x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{(n+1)\,x}{2}$$

Dakle to je ono sto bi trebali dobiti kada zbrojimo prvih $n+1$ clanova sume. Racunamo:

$$\cos x+\cos 2x+\cos 3x+...+\cos nx+\cos(n+1)\,x=(\star)$$

Posljednji, dakle $n+1$ clan sume, dobili smo tako da smo u posljednji clan na lijevoj strani tvrdnje, $\cos nx$, umjesto n uvrstili $n+1$. Nastavljamo s racunom. Primjetimo da je, prema pretpostavci indukcije, suma prvih n clanova sume jednaka $\frac{\cos\frac{(n+1)\,x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{nx}{2}$. Slijedi:

$$(\star)=\underbrace{\cos x+\cos 2x+\cos 3x+...+\cos nx}_{\frac{\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{nx}{2}}+\cos(n+1)\,x=$$

$$=\frac{\cos\frac{(n+1)\,x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{nx}{2}+\cos(n+1)\,x=(\star\star)$$

I ovdje stvari postaju zanimljive, krenut cu tako da svedem dobiveni izraz na zajednicki nazivnik:

$$(\star\star)=\frac{\cos\frac{(n+1)\,x}{2}\cdot\sin\frac{nx}{2}+\cos(n+1)\,x\cdot\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=(\star\star\star)$$

Nadalje pomnozit cu prvi clan sume brojnika prema pravilu za pretvorbu umnoska u zbroj za trigonometrijske funkcije, ondnosno pomocu izraza

$\cos x \cdot \sin x = \frac{1}{2}\left[\sin\left(x+y\right) - \sin\left(x-y\right)\right]$, slijedi:

$$(\star\star\star) = \frac{\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{(n+1)\,x}{2} + \frac{nx}{2}\right) - \sin\left(\frac{(n+1)\,x}{2} - \frac{nx}{2}\right)\right] + \cos\left(n+1\right)x \cdot \sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{nx+x}{2} + \frac{nx}{2}\right) - \sin\left(\frac{nx+x}{2} - \frac{nx}{2}\right)\right] + \cos\left(n+1\right)x \cdot \sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left[\sin\frac{nx+x+nx}{2} - \sin\frac{\cancel{nx}+x\cancel{-nx}}{2}\right] + \cos\left(n+1\right)x \cdot \sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left[\sin\frac{2nx+x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right] + \cos\left(n+1\right)x \cdot \sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = (\spadesuit)$$

Zapisimo izraz $2nx+x$ u brojniku izaraza $\frac{2nx+x}{2}$ pod sinusom kao $2nx+2x-x$, te izlucimo $2x$ iz prva dva clana sume tako zapisanog izraza, slijedi:

$$(\spadesuit) = \frac{\frac{1}{2}\left[\sin\frac{2nx+2x-x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right] + \cos\left(n+1\right)x \cdot \sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left[\sin\frac{2x\left(n+1\right)-x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right] + \cos\left(n+1\right)x \cdot \sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = (\spadesuit\spadesuit)$$

Rastavimo izraz $\frac{2x\left(n+1\right)-x}{2}$ na dva razlomka i pokratim sto se pokratiti dade:

$$(\spadesuit\spadesuit) = \frac{\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{{}^{1}\cancel{2}x\left(n+1\right)}{\cancel{2}_{1}} - \frac{x}{2}\right) - \sin\frac{x}{2}\right] + \cos\left(n+1\right)x \cdot \sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left[\sin\left(\left(n+1\right)x - \frac{x}{2}\right) - \sin\frac{x}{2}\right] + \cos\left(n+1\right)x \cdot \sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = (\spadesuit\spadesuit\spadesuit)$$

Primjenim adicijski teorem za sinus razlike kutova na izraz $\sin\left((n+1)\,x - \frac{x}{2}\right)$, osnosno primjenjujemo izraz $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$, slijedi:

$$(\spadesuit\spadesuit\spadesuit) = \frac{\frac{1}{2}\left[\sin(n+1)\,x \cdot \cos\frac{x}{2} - \cos(n+1)\,x \cdot \sin\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right] + \cos(n+1)\,x \cdot \sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sin(n+1)\,x \cdot \cos\frac{x}{2} - \underline{\frac{1}{2}\cos(n+1)\,x \cdot \sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} + \underline{\underline{\cos(n+1)\,x \cdot \sin\frac{x}{2}}}}{\sin\frac{x}{2}} = (\clubsuit)$$

Zbrojim podcrtane izraze, te izlucim $\frac{1}{2}$ iz svih clanove sume u brojniku, slijedi:

$$(\clubsuit) = \frac{\frac{1}{2}\sin(n+1)\,x \cdot \cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cos(n+1)\,x \cdot \sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left[\sin(n+1)\,x \cdot \cos\frac{x}{2} + \cos(n+1)\,x \cdot \sin\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right]}{\sin\frac{x}{2}} = (\clubsuit\clubsuit)$$

Primjenim adicijski teorem za sinus zbroa kutova na prva dva clana sume u zagradi brojnika, osnosno primjenjujemo izraz $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$, slijedi:

$$(\clubsuit\clubsuit) = \frac{\frac{1}{2}\left[\sin\left((n+1)\,x + \frac{x}{2}\right) - \sin\frac{x}{2}\right]}{\sin\frac{x}{2}} = (\clubsuit\clubsuit\clubsuit)$$

Na clanove sume u zagradi primjenjujemo pravilo za pretvorbu zbroja u umnozak za trigonometrijske funkcije, ondnosno izraz
$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$, slijedi:

$$(\clubsuit\clubsuit\clubsuit) = \frac{\frac{1}{2}\left[2 \cdot \cos\frac{(n+1)\,x + \frac{x}{2} + \frac{x}{2}}{2}\sin\frac{(n+1)\,x + \frac{x}{2} - \frac{x}{2}}{2}\right]}{\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \cos\frac{(n+1)\,x + 2 \cdot \frac{x}{2}}{2}\sin\frac{(n+1)\,x + \cancel{\frac{x}{2}} - \cancel{\frac{x}{2}}}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = (\diamondsuit)$$

Pokratimo sto se pokratiti dade:

$$(\diamondsuit) = \frac{\frac{1}{\cancel{2}_1} \cdot \frac{\cancel{2}^1}{1} \cdot \cos \frac{(n+1)\,x + \frac{^1\cancel{2}}{1} \cdot \frac{x}{\cancel{2}}}{2} \sin \frac{(n+1)\,x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\cos \frac{(n+1)\,x + x}{2} \sin \frac{(n+1)\,x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = (\diamondsuit\diamondsuit)$$

Sredimo jos malo razlomak pod sinusom u brojniku. Raspisemo izraz u brojniku tog razlomka pa izlucimo x, slijedi:

$$(\diamondsuit\diamondsuit) = \frac{\cos \frac{nx + x + x}{2} \sin \frac{(n+1)\,x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{\cos \frac{nx + 2x}{2} \sin \frac{(n+1)\,x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\cos \frac{(n+2)\,x}{2} \sin \frac{(n+1)\,x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = (\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit)$$

Zapisem ovaj izraz malo drugacije:

$$(\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit) = \frac{\cos \frac{(n+2)\,x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \sin \frac{(n+1)\,x}{2}$$

Time smo zapravo dobili isti izraz kao i na pocetku koraka indukcije, odnosno dobili smo upravo ono sto smo trebali dobiti.

Prema PMI mozemo zakljuciti da tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dakle zadatak je rijesen.

⚜ ✧ ⚜

⚔⚔ Zadatak 18: (str. 20) 3) Dokazi matematickom indukcijom:

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + ... + \sin(2n-1)\,x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}$$

Rjesenje: Provodimo postupak dokazivanja matematickom indukcijom.

BAZA INDUKCIJE: Pokazimo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$. Uvrstavamo broj 1 u zadnji clan sume na lijevoj strani i u izraz na desnoj strani.

$$\sin(2\overbrace{n}^{1}-1)x = \frac{\sin^2 \overbrace{n}^{1} x}{\sin x}$$

$$\sin{(2\cdot 1-1)x}=\frac{\sin^2{(1\cdot x)}}{\sin x}$$

$$\sin{(2-1)x}=\frac{\sin^2 x}{\sin x}$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$\sin{(1\cdot x)}=\frac{\overset{\sin x}{\cancel{\sin^2 x}}}{\underset{1}{\cancel{\sin x}}}$$

$$\sin x=\frac{\sin x}{1}$$

$$\sin x=\sin x$$

Kako je lijeva strana jednaka desnoj, tvrdnja vrijedi za $n=1$.

PRETPOSTAVKA INDUKCIJE: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n\in\mathbb{N}$. Dakle da vrijedi:

$$\sin x+\sin 3x+\sin 5x+...+\sin{(2n-1)}\,x=\frac{\sin^2 nx}{\sin x}$$

KORAK INDUKCIJE: Uz pretpotavku pakazimo da tvrdnja vrijedi i za n+1.
Pogledajmo prvo kako bi trebao izgledati izraz na desnoj strani tvrdnje kad bi suma na lijevoj strani imala $n+1$ clanova. To cemo uciniti tako da u izrazu na desnoj strani zamijenimo n s $n+1$, racunam:

$$\frac{\sin^2 \overbrace{n}^{n+1} x}{\sin x}\quad\Rightarrow\quad\frac{\sin^2{(n+1)}\,x}{\sin x}$$

Dakle to je ono sto bi trebali dobiti kada zbrojimo prvih $n+1$ clanova sume. Racunamo:

$$\sin x+\sin 3x+\sin 5x+...+\sin{(2n-1)}\,x+\sin{[(2\,(n+1)-1)\,x)]}=(\star)$$

Posljednji, dakle $n+1$ clan sume, dobili smo tako da smo u posljednji clan na lijevoj strani tvrdnje, $\sin{(2n-1)}\,x$, umjesto n uvrstili $n+1$. Nastavljamo s racunom. Primjetimo da je, prema pretpostavci indukcije, suma prvih n clanova sume jednaka $\dfrac{\sin^2 nx}{\sin x}$. Slijedi:

$$(\star)=\underbrace{\sin x+\sin 3x+\sin 5x+...+\sin{(2n-1)}\,x}_{\frac{\sin^2 nx}{\sin x}}+\sin{(2n+2-1)}\,x=$$

$$=\frac{\sin^2 nx}{\sin x}+\sin{(2n+1)}\,x=(\star\star)$$

I ovdje stvari postaju zanimljive (no vidjet cemo puno manje zanimljive nego u prethodnom zadatku), krenut cu kao i u prethodnom zadataku tako da svedem dobiveni izraz na zajednicki nazivnik:

$$(\star\star) = \frac{\sin^2 nx + \sin\left(2n+1\right)x \cdot \sin x}{\sin x} = (\star\star\star)$$

Nadalje pomnozit cu drugi clan sume brojnika prema pravilu za pretvorbu umnoska u zbroj za trigonometrijske funkcije, ondnosno pomocu izraza $\sin x \cdot \sin x = \frac{1}{2}\left[\cos\left(x-y\right) - \cos\left(x+y\right)\right]$, slijedi:

$$(\star\star\star) = \frac{\sin^2 nx + \frac{1}{2}\left\{\cos\left[\left(2n+1\right)x - x\right] - \cos\left[\left(2n+1\right)x + x\right]\right\}}{\sin x} = (\spadesuit)$$

Sredimo malo dobiveni izraz:

$$(\spadesuit) = \frac{\sin^2 nx + \frac{1}{2}\left\{\cos\left[2nx + x - x\right] - \cos\left[2nx + x + x\right]\right\}}{\sin x} =$$

$$= \frac{\sin^2 nx + \frac{1}{2}\left[\cos 2nx - \cos\left(2nx + 2x\right)\right]}{\sin x} = (\spadesuit\spadesuit)$$

Izlucimo $2x$ iz izraza unutar drugog kosinusa u zagradi brojnika, te to zapisemo tako da broj 2 stavimo ispred, a nepoznanicu x iza izraza $(n+1)$, slijedi:

$$(\spadesuit\spadesuit) = \frac{\sin^2 nx + \frac{1}{2}\left[\cos 2nx - \cos 2\left(n+1\right)x\right]}{\sin x} = (\spadesuit\spadesuit\spadesuit)$$

Primjetimo sada da su oba izraza u zagradi brojnika zapravo kosinusi dvostrukog kuta, pa cemo ih raspisati prema izrazu za kosinus dvostrukog kuta, odnosno koristit cemo izraz $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, slijedi:

$$(\spadesuit\spadesuit\spadesuit) = \frac{\sin^2 nx + \frac{1}{2}\left[\overbrace{\cos 2nx}^{\cos^2 nx - \sin^2 nx} - \overbrace{\cos 2\left(n+1\right)x}^{\cos^2\left(n+1\right)x - \sin^2\left(n+1\right)x}\right]}{\sin x} =$$

$$= \frac{\sin^2 nx + \frac{1}{2}\left\{\cos^2 nx - \sin^2 nx - \left[\cos^2\left(n+1\right)x - \sin^2\left(n+1\right)x\right]\right\}}{\sin x} = (\diamondsuit)$$

Prisjetimo se temeljnog identiteta trignometrije, odnosno cinjenice da vrijedi izraz $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. No to povlaci da mora vrijediti $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Imajuci to na umu raspisem sve pojave kosinusa u dobivenom izrazu, slijedi:

$$(\diamondsuit) = \frac{\sin^2 nx + \frac{1}{2}\left\{\overbrace{\cos^2 nx}^{1-\sin^2 nx} - \sin^2 nx - \left[\overbrace{\cos^2\left(n+1\right)x}^{1-\sin^2\left(n+1\right)x} - \sin^2\left(n+1\right)x\right]\right\}}{\sin x} =$$

$$= \frac{\sin^2 nx + \frac{1}{2}\left[1 - \sin^2 nx - \sin^2 nx - \left(1 - \sin^2 (n+1)\, x - \sin^2 (n+1)\, x\right)\right]}{\sin x} = (\diamondsuit\diamondsuit)$$

Zbrojimo istovjetne izraze, slijedi:

$$(\diamondsuit\diamondsuit) = \frac{\sin^2 nx + \frac{1}{2}\left[1 - 2\sin^2 nx - \left(1 - 2\sin^2 (n+1)\, x\right)\right]}{\sin x} =$$

$$= \frac{\sin^2 nx + \frac{1}{2}\left[\cancel{1} - 2\sin^2 nx \cancel{-1} + 2\sin^2 (n+1)\, x\right]}{\sin x} =$$

$$= \frac{\sin^2 nx + \frac{1}{2}\left[-2\sin^2 nx + 2\sin^2 (n+1)\, x\right]}{\sin x} = (\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit)$$

Izlucimo 2 iz clanova sume u zagradi brojnika te pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$(\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit) = \frac{\sin^2 nx + \frac{1}{2}\left\{2\left[-\sin^2 nx + \sin^2 (n+1)\, x\right]\right\}}{\sin x} =$$

$$= \frac{\sin^2 nx + \frac{1}{{}_1\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}^1}{1}\left[-\sin^2 nx + \sin^2 (n+1)\, x\right]}{\sin x} =$$

$$= \frac{\sin^2 nx - \sin^2 nx + \sin^2 (n+1)\, x}{\sin x} = (\clubsuit)$$

Zbrojim istovjetne izraze, slijedi:

$$(\clubsuit) = \frac{\cancel{\sin^2 nx} \cancel{- \sin^2 nx} + \sin^2 (n+1)\, x}{\sin x} = \frac{\sin^2 (n+1)\, x}{\sin x}$$

Time smo zapravo dobili isti izraz kao i na pocetku koraka indukcije, odnosno dobili smo upravo ono sto smo trebali dobiti.

Prema PMI mozemo zakljuciti da tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dakle zadatak je rijesen.

☙ ✧ ❧

⨯⨯ Zadatak 18: (str. 20) 4) Dokazi matematickom indukcijom:

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x + ... + \cos (2n-1)\, x = \frac{\sin 2nx}{2 \cdot \sin x}$$

Rjesenje: Provodimo postupak dokazivanja matematickom indukcijom.

BAZA INDUKCIJE: Pokazimo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$. Uvrstavamo broj 1 u zadnji clan sume na lijevoj strani i u izraz na desnoj strani.

$$\cos(2\overbrace{n}^{1}-1)x = \frac{\sin 2\overbrace{n}^{1}x}{2\cdot\sin x}$$

$$\cos(2\cdot 1-1)x = \frac{\sin(2\cdot 1\cdot x)}{2\cdot\sin x}$$

$$\cos(2-1)x = \frac{\sin 2x}{2\cdot\sin x}$$

Prisjetimo se izraza za sinus dvostrukog kuta, odnosno izraza
$\sin 2x = 2\cdot\sin x\cdot\cos x$. Imajuci to na umu dalje racunam:

$$\cos(1\cdot x) = \frac{\overbrace{\sin 2x}^{2\cdot\sin x\cdot\cos x}}{2\cdot\sin x}$$

Pokratim sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\cos x = \frac{2\cdot\sin x\cdot\cos x}{2\cdot\sin x}$$

$$\cos x = \frac{{}^{1}\cancel{2\cdot\sin x}\cdot\cos x}{\cancel{2\cdot\sin x}_{1}}$$

$$\cos x = \frac{1\cdot\cos x}{1}$$

$$\cos x = \cos x$$

Kako je lijeva strana jednaka desnoj, tvrdnja vrijedi za $n = 1$.

PRETPOSTAVKA INDUKCIJE: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Dakle da vrijedi:

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x + ... + \cos(2n-1)\,x = \frac{\sin 2nx}{2\cdot\sin x}$$

KORAK INDUKCIJE: Uz pretpotavku pakazimo da tvrdnja vrijedi i za n+1.
Pogledajmo prvo kako bi trebao izgledati izraz na desnoj strani tvrdnje kad bi suma na lijevoj strani imala $n+1$ clanova. To cemo uciniti tako da u izrazu na desnoj strani zamijenimo n s $n+1$, racunam:

$$\frac{\sin 2\overbrace{n}^{n+1}x}{2\cdot\sin x} \quad\Rightarrow\quad \frac{\sin 2\,(n+1)\,x}{2\cdot\sin x}$$

Dakle to je ono sto bi trebali dobiti kada zbrojimo prvih $n+1$ clanova sume. Racunamo:

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x + ... + \cos(2n-1)\,x + \cos[(2\,(n+1)-1)\,x)] = (\star)$$

Posljednji, dakle $n+1$ clan sume, dobili smo tako da smo u posljednji clan na lijevoj strani tvrdnje, $\cos(2n-1)x$, umjesto n uvrstili $n+1$. Nastavljamo s racunom. Primjetimo da je, prema pretpostavci indukcije, suma prvih n clanova sume jednaka $\frac{\sin 2nx}{2\cdot\sin x}$. Slijedi:

$$(\star) = \underbrace{\cos x + \cos 3x + \cos 5x + ... + \cos(2n-1)x}_{\frac{\sin 2nx}{2\cdot\sin x}} + \cos(2n+2-1)x =$$

$$= \frac{\sin 2nx}{2\cdot\sin x} + \cos(2n+1)x = (\star\star)$$

Krenut cu kao i u prethodnom zadataku tako da svedem dobiveni izraz na zajednicki nazivnik:

$$(\star\star) = \frac{\sin 2nx + 2\cos(2n+1)x\cdot\sin x}{2\cdot\sin x} = (\star\star\star)$$

Nadalje pomnozit cu drugi clan sume brojnika prema pravilu za pretvorbu umnoska u zbroj za trigonometrijske funkcije, ondnosno pomocu izraza $\cos x\cdot\sin x = \frac{1}{2}[\sin(x+y) - \sin(x-y)]$, slijedi:

$$(\star\star\star) = \frac{\sin 2nx + 2\cdot\frac{1}{2}\{\sin[(2n+1)x - x] - \sin[(2n+1)x + x]\}}{\sin x} = (\spadesuit)$$

Sredimo malo dobiveni izraz, krateci usput sto se pokratiti dade, slijedi:

$$(\spadesuit) = \frac{\sin 2nx + \frac{{}^{1}\cancel{2}}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{2}_{1}}[\cos(2nx+x+x) - \cos(2nx+x-x)]}{2\cdot\sin x} =$$

$$= \frac{\sin 2nx + [\sin(2nx+2x) - \sin 2nx]}{2\cdot\sin x} = (\spadesuit\spadesuit)$$

Izlucimo $2x$ iz izraza unutar prvog sinusa u zagradi brojnika, te to zapisemo tako da broj 2 stavimo ispred, a nepoznanicu x iza izraza $(n+1)$, slijedi:

$$(\spadesuit\spadesuit) = \frac{\sin 2nx + [\sin 2(n+1)x - \sin 2nx]}{2\cdot\sin x} = (\diamondsuit)$$

Rijesimo se zagrade, slijedi:

$$(\diamondsuit) = \frac{\sin 2nx + \sin 2(n+1)x - \sin 2nx}{2\cdot\sin x} = (\diamondsuit\diamondsuit)$$

Pokratimo suprotne izraze, slijedi:

$$(\diamondsuit\diamondsuit) = \frac{\cancel{\sin 2nx} + \sin 2(n+1)x \cancel{- \sin 2nx}}{2\cdot\sin x} =$$

$$= \frac{\sin 2(n+1)x}{2\cdot\sin x}$$

Time smo zapravo dobili isti izraz kao i na pocetku koraka indukcije, odnosno dobili smo upravo ono sto smo trebali dobiti.

Prema PMI mozemo zakljuciti da tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dakle zadatak je rijesen.

⚔⚔ Zadatak 19: (str. 20) 2) Dokazi matematickom indukcijom:

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2^3}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\cdot\sin\frac{x}{2^n}}$$

Rjesenje: Provodimo postupak dokazivanja matematickom indukcijom.

BAZA INDUKCIJE: Pokazimo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$. Uvrstavamo broj 1 u zadnji clan produkta na lijevoj strani i u izraz na desnoj strani.

$$\cos\frac{x}{2^{\overbrace{n}^{1}}}=\frac{\sin x}{2^{\overbrace{n}^{1}}\cdot\sin\left[\frac{x}{2^{\overbrace{n}^{1}}}\right]}$$

$$\cos\frac{x}{2^1}=\frac{\sin x}{2^1\cdot\sin\frac{x}{2^1}}$$

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{2\cdot\sin\frac{x}{2}}$$

Prvo cemo izraz $\sin x$ zapisati kao $\sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)$, jer znamo da vrijedi $2\cdot\frac{x}{2}=x$, slijedi:

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{\sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)}{2\cdot\sin\frac{x}{2}}$$

Prisjetimo se izraza za sinus dvostrukog kuta (to je i razlog zasto smo gornji izraz mijenjali, htjeli smo dobiti sinus dvostrukog kuta), odnosno izraza $\sin 2x = 2\cdot\sin x\cdot\cos x$. Imajuci to na umu dalje racunam:

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{\overbrace{\sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)}^{2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}}{2\cdot\sin\frac{x}{2}}$$

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{2\cdot\sin\frac{x}{2}}$$

Pokratim sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{{}^{1}\cancel{2\cdot\sin\frac{x}{2}}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\cancel{2\cdot\sin\frac{x}{2}}{}^{1}}$$

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{1\cdot\cos\frac{x}{2}}{1}$$

$$\cos\frac{x}{2}=\cos\frac{x}{2}$$

Kako je lijeva strana jednaka desnoj, tvrdnja vrijedi za $n=1$.

PRETPOSTAVKA INDUKCIJE: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n\in\mathbb{N}$. Dakle da vrijedi:

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2^3}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\cdot\sin\frac{x}{2^n}}$$

KORAK INDUKCIJE: Uz pretpotavku pakazimo da tvrdnja vrijedi i za n+1.
Pogledajmo prvo kako bi trebao izgledati izraz na desnoj strani tvrdnje kad bi produkt na lijevoj strani imao $n+1$ clanova. To cemo uciniti tako da u izrazu na desnoj strani zamijenimo n s $n+1$, racunam:

$$\frac{\sin x}{2^{\overbrace{n}^{n+1}}\cdot\sin\left[\dfrac{x}{2^{\overbrace{n}^{n+1}}}\right]}\quad\Rightarrow\quad\frac{\sin x}{2^{n+1}\cdot\sin\frac{x}{2^{n+1}}}$$

Dakle to je ono sto bi trebali dobiti kada izmnozimo prvih $n+1$ clanova produkta. Racunamo:

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2^3}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}\cdot\cos\frac{x}{2^{n+1}}=(\star)$$

Posljednji, dakle $n+1$ clan produkta, dobili smo tako da smo u posljednji clan na lijevoj strani tvrdnje, $\cos\frac{x}{2^n}$, umjesto n uvrstili $n+1$. Nastavljamo s racunom. Primjetimo da je, prema pretpostavci indukcije, produkt prvih n clanova produkta jednak $\dfrac{\sin x}{2^n\cdot\sin\frac{x}{2^n}}$. Slijedi:

$$(\star)=\underbrace{\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2^3}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}}_{\frac{\sin x}{2^n\cdot\sin\frac{x}{2^n}}}\cdot\cos\frac{x}{2^{n+1}}=$$

$$= \frac{\sin x}{2^n \cdot \sin \frac{x}{2^n}} \cdot \cos \frac{x}{2^{n+1}} = (\star\star)$$

Izmnozim dobiveni izraz:

$$(\star\star) = \frac{\sin x}{2^n \cdot \sin \frac{x}{2^n}} \cdot \frac{\cos \frac{x}{2^{n+1}}}{1} = \frac{\sin x \cdot \cos \frac{x}{2^{n+1}}}{2^n \cdot \sin \frac{x}{2^n}} = (\spadesuit)$$

Nadalje izraz $\frac{x}{2^n}$ mogu prikazati kao $2 \cdot \frac{x}{2^{n+1}}$, jer ako malo razmislim vrijedi:

$$2 \cdot \frac{x}{2^{n+1}} = \frac{{}^{1}\cancel{2}}{1} \cdot \frac{x}{\cancel{2^{n+1}}_{2^n}} = \frac{x}{2^n}$$

Vracam se s tim saznanjem u racun, slijedi:

$$(\spadesuit) = \frac{\sin x \cdot \cos \frac{x}{2^{n+1}}}{2^n \cdot \sin \left(2 \cdot \frac{x}{2^{n+1}}\right)} = (\spadesuit\spadesuit)$$

Prisjetimo se izraza za sinus dvostrukog kuta (to je i razlog zasto smo gornji izraz mijenjali, htjeli smo dobiti sinus dvostrukog kuta), odnosno izraza $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$. Imajuci to na umu dalje racunam:

$$(\spadesuit\spadesuit) = \frac{\sin x \cdot \cos \frac{x}{2^{n+1}}}{2^n \cdot \underbrace{\sin \left(2 \cdot \frac{x}{2^{n+1}}\right)}_{2 \cdot \sin \frac{x}{2^{n+1}} \cdot \cos \frac{x}{2^{n+1}}}} =$$

$$= \frac{\sin x \cdot \cos \frac{x}{2^{n+1}}}{2^n \cdot 2 \cdot \sin \frac{x}{2^{n+1}} \cdot \cos \frac{x}{2^{n+1}}} = (\diamondsuit)$$

Pomnozimo potencije prema pravilu za mnozenje potencija istih baza, odnosno prema izrazu $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$, slijedi:

$$(\diamondsuit) = \frac{\sin x \cdot \cos \frac{x}{2^{n+1}}}{2^n \cdot 2^1 \cdot \sin \frac{x}{2^{n+1}} \cdot \cos \frac{x}{2^{n+1}}} = \frac{\sin x \cdot \cos \frac{x}{2^{n+1}}}{2^{n+1} \cdot \sin \frac{x}{2^{n+1}} \cdot \cos \frac{x}{2^{n+1}}} = (\diamondsuit\diamondsuit)$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$(\diamondsuit\diamondsuit) = \frac{\sin x \cdot \cancel{\cos \frac{x}{2^{n+1}}}^{1}}{2^n \cdot 2^1 \cdot \sin \frac{x}{2^{n+1}} \cdot \cancel{\cos \frac{x}{2^{n+1}}}_{1}} = \frac{\sin x \cdot 1}{2^{n+1} \cdot \sin \frac{x}{2^{n+1}} \cdot 1} =$$

$$= \frac{\sin x}{2^{n+1} \cdot \sin \frac{x}{2^{n+1}}}$$

Time smo zapravo dobili isti izraz kao i na pocetku koraka indukcije, odnosno dobili smo upravo ono sto smo trebali dobiti.

Prema PMI mozemo zakljuciti da tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dakle zadatak je rijesen.

⚜ Zadatak 19: (str. 20) 3) Dokazi matematickom indukcijom:

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + ... + \cos nx = \frac{\sin \frac{(2n+1)\,x}{2}}{2 \cdot \sin \frac{x}{2}}$$

Rjesenje: Primjetimo da ce suma ne lijevoj strani za neki $n \in \mathbb{N}$ uvijek sadrzavati $n+1$ clanova. Prvi clan sume, broj $\frac{1}{2}$ ne ovisi o broju n te ce on uvijek biti dio sume. Krenimo na dokaz.

Provodimo postupak dokazivanja matematickom indukcijom.

BAZA INDUKCIJE: Pokazimo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$. Uvrstavamo broj 1 u zadnji clan sume na lijevoj strani i u izraz na desnoj strani. Dodat cemo i broj $\frac{1}{2}$ na lijevu stranu jer smo zakljucili da on uvijek mora biti dio sume, racunamo:

$$\frac{1}{2} + \cos \overbrace{n}^{1} x = \frac{\sin \frac{(2\overbrace{n}^{1}+1)x}{2}}{2 \cdot \sin \frac{x}{2}}$$

$$\frac{1}{2} + \cos (1 \cdot x) = \frac{\sin \frac{(2 \cdot 1 + 1)\,x}{2}}{2 \cdot \sin \frac{x}{2}}$$

$$\frac{1}{2} + \cos x = \frac{\sin \frac{(2+1)\,x}{2}}{2 \cdot \sin \frac{x}{2}}$$

$$\frac{1}{2} + \cos x = \frac{\sin \frac{3x}{2}}{2 \cdot \sin \frac{x}{2}}$$

Dosli smo do, kako ce se pokazati kroz par redaka, najtezeg problema baze indukcije. Prvo cemo razlomak $\frac{3x}{2}$ prikazati kao $\frac{3x}{2} = \frac{2x+x}{2}$. Vratimo se racunu, slijedi:

$$\frac{1}{2}+\cos x=\frac{\sin\frac{2x+x}{2}}{2\cdot\sin\frac{x}{2}}$$

$$\frac{1}{2}+\cos x=\frac{\sin\left(\frac{2x}{2}+\frac{x}{2}\right)}{2\cdot\sin\frac{x}{2}}$$

Svedemo razlomke na lijevoj strani na zajednicki nazivnik 2, dok na lijevoj strani skratimo razlomak unutar sinusa u brojniku razlomka, slijedi:

$$\frac{1}{2}+\frac{\cos x}{1}=\frac{\sin\left(\frac{{}^{1}\cancel{2}x}{\cancel{2}_{1}}+\frac{x}{2}\right)}{2\cdot\sin\frac{x}{2}}$$

$$\frac{1+2\cdot\cos x}{2}=\frac{\sin\left(x+\frac{x}{2}\right)}{2\cdot\sin\frac{x}{2}}$$

Raspisemo izraz u brojniku razlomka na desnoj strani po adicijskom teoremu za sinus zbroja, odnosno prema $\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y$, slijedi:

$$\frac{1+2\cdot\cos x}{2}=\frac{\sin x\cdot\cos\frac{x}{2}+\cos x\cdot\sin\frac{x}{2}}{2\cdot\sin\frac{x}{2}}$$

Nadalje prisjetimo se izraza za sinus dvostrukog kuta (to je i razlog zasto smo gornji izraz mijenjali, htjeli smo dobiti sinus dvostrukog kuta), odnosno izraza $\sin 2x=2\cdot\sin x\cdot\cos x$. Imajuci to na umu dalje racunam:

$$\frac{1+2\cdot\cos x}{2}=\frac{\overbrace{\sin x}^{2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos\frac{x}{2}+\cos x\cdot\sin\frac{x}{2}}{2\cdot\sin\frac{x}{2}}$$

$$\frac{1+2\cdot\cos x}{2}=\frac{2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}+\cos x\cdot\sin\frac{x}{2}}{2\cdot\sin\frac{x}{2}}$$

$$\frac{1+2\cdot\cos x}{2}=\frac{2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}+\cos x\cdot\sin\frac{x}{2}}{2\cdot\sin\frac{x}{2}}$$

Nadalje izlucimo $2 \cdot \sin \dfrac{x}{2}$ iz oba clana sume u brojniku razlomka desne strane, slijedi:

$$\frac{1+2\cdot\cos x}{2} = \frac{2\cdot\sin\dfrac{x}{2}\left(\cos^2\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\cos x\right)}{2\cdot\sin\dfrac{x}{2}}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{1+2\cdot\cos x}{2} = \frac{{}^{1}\cancel{2\cdot\sin\dfrac{x}{2}}\left(\cos^2\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\cos x\right)}{\cancel{2\cdot\sin\dfrac{x}{2}}^{1}}$$

$$\frac{1+2\cdot\cos x}{2} = \frac{\cos^2\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\cos x}{1}$$

$$\frac{1+2\cdot\cos x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}+\frac{\cos x}{2}$$

Nadalje pozabavimo se malo lijevom stranom jednakosti, prikazimo $2\cdot\cos x$ kao $2\cdot\cos x = \cos x + \cos x$, slijedi:

$$\frac{1+\overbrace{2\cdot\cos x}^{\cos x+\cos x}}{2} = \cos^2\frac{x}{2}+\frac{\cos x}{2}$$

$$\frac{1+\cos x+\cos x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}+\frac{\cos x}{2}$$

Razdvojimo izraz na lijevoj strani na dva razlomka, slijedi:

$$\frac{1+\cos x}{2}+\frac{\cos x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}+\frac{\cos x}{2}$$

Na kraju prisjetimo se jos izraza za kosinus polovicnog kuta, odnosno da vrijedi $\cos^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1+\cos x}{2}$. Imajuci to na umu, slijedi:

$$\frac{\overbrace{1+\cos x}^{\cos^2\frac{x}{2}}}{2}+\frac{\cos x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}+\frac{\cos x}{2}$$

$$\cos^2\frac{x}{2}+\frac{\cos x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}+\frac{\cos x}{2}$$

Kako je lijeva strana jednaka desnoj, tvrdnja vrijedi za $n=1$.

PRETPOSTAVKA INDUKCIJE: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Dakle da vrijedi:

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+...+\cos nx = \frac{\sin\dfrac{(2n+1)\,x}{2}}{2\cdot\sin\dfrac{x}{2}}$$

KORAK INDUKCIJE: Uz pretpotavku pakazimo da tvrdnja vrijedi i za n+1.
Pogledajmo prvo kako bi trebao izgledati izraz na desnoj strani tvrdnje kad bi suma na lijevoj strani imala $n+2$ clana (prisjetimo se da svakoj sumi u ovom zadatku moramo dodati broj $\dfrac{1}{2}$ uz $n+1$ ostalih clanova). To cemo uciniti tako da u izrazu na desnoj strani zamijenimo n s $n+1$, racunam:

$$\frac{\sin\dfrac{(2\overbrace{n}^{n+1}+1)x}{2}}{2\cdot\sin\dfrac{x}{2}} \quad\Rightarrow\quad \frac{\sin\dfrac{[2\,(n+1)+1]\,x}{2}}{2\cdot\sin\dfrac{x}{2}}=\frac{\sin\dfrac{(2n+3)\,x}{2}}{2\cdot\sin\dfrac{x}{2}}$$

Dakle to je ono sto bi trebali dobiti kada zbrojimo prvih $n+2$ clana sume. Racunamo:

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+...+\cos nx+\cos\,(n+1)\,x=(\star)$$

Posljednji, dakle $n+2$ clan sume, dobili smo tako da smo u posljednji clan na lijevoj strani tvrdnje, $\cos nx$, umjesto n uvrstili $n+1$. Nastavljamo s racunom. Primjetimo da je, prema pretpostavci indukcije, suma prvih $n+1$ clanova sume (prisjetimo se da svakoj sumi u ovom zadatku moramo dodati broj $\dfrac{1}{2}$ uz n ostalih clanova) jednaka $\dfrac{\sin\dfrac{(2n+1)\,x}{2}}{2\cdot\sin\dfrac{x}{2}}$. Slijedi:

$$\underbrace{(\star)=\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+...+\cos nx}_{\frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\cdot\sin\frac{x}{2}}}+\cos\,(n+1)\,x=$$

$$=\frac{\sin\dfrac{(2n+1)\,x}{2}}{2\cdot\sin\dfrac{x}{2}}+\cos\,(n+1)\,x=(\star\star)$$

Krenut cu tako da svedem dobiveni izraz na zajednicki nazivnik, slijedi:

$$(\star\star)=\frac{\sin\dfrac{(2n+1)\,x}{2}+\cos\,(n+1)\,x\cdot 2\cdot\sin\dfrac{x}{2}}{2\cdot\sin\dfrac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\dfrac{(2n+1)\,x}{2}+2\cdot\cos\,(n+1)\,x\cdot\sin\dfrac{x}{2}}{2\cdot\sin\dfrac{x}{2}}=(\star\star\star)$$

Nadalje pomnozit cu drugi clan sume brojnika prema pravilu za pretvorbu umnoska u zbroj za trigonometrijske funkcije, ondnosno pomocu izraza $\cos x \cdot \sin x = \dfrac{1}{2}\left[\sin\left(x+y\right) - \sin\left(x-y\right)\right]$, slijedi:

$$(\star\star\star) = \frac{\sin\dfrac{(2n+1)\,x}{2} + 2\cdot\dfrac{1}{2}\left\{\sin\left[(n+1)\,x + \dfrac{x}{2}\right] - \sin\left[(n+1)\,x - \dfrac{x}{2}\right]\right\}}{2\cdot\sin\dfrac{x}{2}} = (\spadesuit)$$

Svedemo izraze pod posljednje dvije trigonometrijske funkcije na isti nazivnik 2, slijedi:

$$(\spadesuit) = \frac{\sin\dfrac{(2n+1)\,x}{2} + 2\cdot\dfrac{1}{2}\left(\sin\dfrac{2\,(n+1)\,x + x}{2} - \sin\dfrac{2\,(n+1)\,x - x}{2}\right)}{2\cdot\sin\dfrac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\dfrac{(2n+1)\,x}{2} + 2\cdot\dfrac{1}{2}\left(\sin\dfrac{2nx+2x+x}{2} - \sin\dfrac{2nx+2x-x}{2}\right)}{2\cdot\sin\dfrac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\dfrac{(2n+1)\,x}{2} + 2\cdot\dfrac{1}{2}\left(\sin\dfrac{2nx+3x}{2} - \sin\dfrac{2nx+x}{2}\right)}{2\cdot\sin\dfrac{x}{2}} = (\spadesuit\spadesuit)$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$(\spadesuit\spadesuit) = \frac{\sin\dfrac{(2n+1)\,x}{2} + \dfrac{{}^{1}\cancel{2}}{1}\cdot\dfrac{1}{\cancel{2}_{1}}\left(\sin\dfrac{2nx+3x}{2} - \sin\dfrac{2nx+x}{2}\right)}{2\cdot\sin\dfrac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\dfrac{(2n+1)\,x}{2} + \left(\sin\dfrac{2nx+3x}{2} - \sin\dfrac{2nx+x}{2}\right)}{2\cdot\sin\dfrac{x}{2}} = (\diamondsuit)$$

Izlucimo x iz izraza u brojnicima razlomaka unutar posljednjih dviju trigonometrijskih funkcija brojnika, slijedi:

$$(\diamondsuit) = \frac{\sin\dfrac{(2n+1)\,x}{2} + \left(\sin\dfrac{(2n+3)\,x}{2} - \sin\dfrac{(2n+1)\,x}{2}\right)}{2\cdot\sin\dfrac{x}{2}} = (\diamondsuit\diamondsuit)$$

Rijesimo se zagrade, slijedi:

$$(\diamondsuit\diamondsuit) = \frac{\sin\dfrac{(2n+1)\,x}{2} + \sin\dfrac{(2n+3)\,x}{2} - \sin\dfrac{(2n+1)\,x}{2}}{2\cdot\sin\dfrac{x}{2}} = (\clubsuit)$$

Pokratimo suprotne izraze, slijedi:

$$(\clubsuit) = \frac{\cancel{\sin \frac{(2n+1)\,x}{2}} + \sin \frac{(2n+3)\,x}{2} \cancel{- \sin \frac{(2n+1)\,x}{2}}}{2 \cdot \sin \frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\sin \frac{(2n+3)\,x}{2}}{2 \cdot \sin \frac{x}{2}}$$

Time smo zapravo dobili isti izraz kao i na pocetku koraka indukcije, odnosno dobili smo upravo ono sto smo trebali dobiti.

Prema PMI mozemo zakljuciti da tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dakle zadatak je rijesen.

☙ ✧ ❧

⚔⚔ Zadatak 19: (str. 20) 4) Dokazi matematickom indukcijom:

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2^2} \operatorname{tg} \frac{x}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^n} - \operatorname{ctg} x$$

Rjesenje: Provodimo postupak dokazivanja matematickom indukcijom.

BAZA INDUKCIJE: Pokazimo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$. Uvrstavamo broj 1 u zadnji clan sume na lijevoj strani i u izraz na desnoj strani.

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} \left[\frac{x}{2^{\overbrace{n}^{1}}} \right] = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left[\frac{x}{2^{\overbrace{n}^{1}}} \right] - \operatorname{ctg} x$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2^1} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^1} - \operatorname{ctg} x$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} x$$

Zapisimo x u obliku $x = 2 \cdot \frac{x}{2}$ kako bi u zadnjem clanu sume dobili kotangnes dvostrukog kuta, slijedi:

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \overbrace{x}^{2 \cdot \frac{x}{2}}$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \left(2 \cdot \frac{x}{2}\right)$$

Sada raspisemo posljednji clan sume prema izrazu za kotangens dvostruog kuta, ondnosno prema izrazu $\operatorname{ctg} 2x = \dfrac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x}$, slijedi:

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \overbrace{\operatorname{ctg}\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right)}^{\frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{1} - 1}{2 \cdot \operatorname{ctg}\frac{x}{2}}}$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{1} - 1}{2 \cdot \operatorname{ctg}\frac{x}{2}}$$

Zapisimo prvi clan sume na desnoj strani malo drugacije, vrijedi:

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{2} - \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{1} - 1}{2 \cdot \operatorname{ctg}\frac{x}{2}}$$

Svedemo clanove sume na desnoj strani na jednaki nazivnik $2 \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$, slijedi:

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} - \left(\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} - 1\right)}{2 \cdot \operatorname{ctg}\frac{x}{2}}$$

Rijsimo se zagrade u brojniku nazivnika na desnoj strani, slijedi:

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} - \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} + 1}{2 \cdot \operatorname{ctg}\frac{x}{2}}$$

Pokratimo suprotne izraze, slijedi:

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\cancel{\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2}} \cancel{- \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2}} + 1}{2 \cdot \operatorname{ctg}\frac{x}{2}}$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{2 \cdot \operatorname{ctg}\frac{x}{2}}$$

Prisjetimo se da vrijedi sljedeci identitet za tangense i kotangense, $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$. Ta cinjenica povlaci da mora vrijediti $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$. Imajuci to na umu racunam dalje:

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{2 \cdot \underbrace{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}_{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}}}$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{2\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}}$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}}$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}}$$

Rijesimo se dvojnog razlomka prema pravilu vanjski s vanjskim, unutarnji s unutarnjim, odnosno prema $\left(\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}\right)=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}$, slijedi:

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\left(\frac{\frac{1}{1}}{\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}}\right)$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1\cdot 2}$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2}$$

Desnu stranu zapisem na malo drugaciji nacin, vrijedi:

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1}$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

Kako je lijeva strana jednaka desnoj, tvrdnja vrijedi za $n=1$.

PRETPOSTAVKA INDUKCIJE: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n\in\mathbb{N}$. Dakle da vrijedi:

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}-\operatorname{ctg}x$$

KORAK INDUKCIJE: Uz pretpotavku pakazimo da tvrdnja vrijedi i za n+1.

Pogledajmo prvo kako bi trebao izgledati izraz na desnoj strani tvrdnje kad bi suma na lijevoj strani imala $n+1$ clanova. To cemo uciniti tako da u izrazu na desnoj strani zamijenimo n s $n+1$, racunam:

$$\frac{1}{2^{\overbrace{n}^{n+1}}} \operatorname{ctg}\left[\frac{x}{2^{\overbrace{n}^{n+1}}}\right] - \operatorname{ctg} x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2^{n+1}} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^{n+1}} - \operatorname{ctg} x$$

Dakle to je ono sto bi trebali dobiti kada zbrojimo prvih $n+1$ clanova sume. Racunamo:

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2^2} \operatorname{tg} \frac{x}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \operatorname{tg} \frac{x}{2^{n+1}} = (\star)$$

Posljednji, dakle $n+1$ clan sume, dobili smo tako da smo u posljednji clan na lijevoj strani tvrdnje, $\frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$, umjesto n uvrstili $n+1$. Nastavljamo s racunom. Primjetimo da je, prema pretpostavci indukcije, suma prvih n clanova sume jednaka $\frac{1}{2^n} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^n} - \operatorname{ctg} x$. Slijedi:

$$(\star) = \underbrace{\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2^2} \operatorname{tg} \frac{x}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}}_{\frac{1}{2^n} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^n} - \operatorname{ctg} x} + \frac{1}{2^{n+1}} \operatorname{tg} \frac{x}{2^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{2^n} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^n} - \operatorname{ctg} x + \frac{1}{2^{n+1}} \operatorname{tg} \frac{x}{2^{n+1}} = (\star\star)$$

Promijenimo malo poredak clanovima sume, vrijedi:

$$(\star\star) = \frac{1}{2^n} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \operatorname{tg} \frac{x}{2^{n+1}} - \operatorname{ctg} x = (\clubsuit)$$

Krenut cu tako da izraz ispod prvog kotangensa umjesto $\frac{x}{2^n}$ zapisemo kao $\frac{x}{2^n} = 2 \cdot \frac{x}{2^{n+1}}$, da bismo dobili kotangens dvostrukog kuta (tu ideju smo vec koristili kod Zadatka 19 pod 2)), slijedi:

$$(\clubsuit) = \frac{1}{2^n} \operatorname{ctg}\left(2 \cdot \frac{x}{2^{n+1}}\right) + \frac{1}{2^{n+1}} \operatorname{tg} \frac{x}{2^{n+1}} - \operatorname{ctg} x = (\clubsuit\clubsuit)$$

Nadalje raspisemo prvi kotangnes prema izrazu za kotangens dvostruog kuta, ondnosno prema izrazu $\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x}$, slijedi:

$$(\clubsuit\clubsuit) = \frac{1}{2^n} \overbrace{\operatorname{ctg}\left(2 \cdot \frac{x}{2^{n+1}}\right)}^{\frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2^{n+1}} - 1}{2 \cdot \operatorname{ctg} \frac{x}{2^{n+1}}}} + \frac{1}{2^{n+1}} \operatorname{tg} \frac{x}{2^{n+1}} - \operatorname{ctg} x =$$

$$= \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2^{n+1}} - 1}{2 \cdot \operatorname{ctg} \frac{x}{2^{n+1}}} + \frac{1}{2^{n+1}} \operatorname{tg} \frac{x}{2^{n+1}} - \operatorname{ctg} x = (\spadesuit)$$

Sredim malo izraz tako da pomnozim prva dva clana sume, slijedi:

$$(\spadesuit) = \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2^{n+1}} - 1}{2^n \cdot 2 \cdot \operatorname{ctg} \frac{x}{2^{n+1}}} + \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2^{n+1}}}{2^{n+1}} - \operatorname{ctg} x = (\spadesuit\spadesuit)$$

Pomnozimo potencije u nazivniku prvog razlomka prema izrazu za mnozenje potencija istih baza, osnosno prema izrazu $a^n \cdot a^m = a^{n \cdot m}$, slijedi:

$$(\spadesuit\spadesuit) = \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2^{n+1}} - 1}{2^n \cdot 2^1 \cdot \operatorname{ctg} \frac{x}{2^{n+1}}} + \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2^{n+1}}}{2^{n+1}} - \operatorname{ctg} x =$$

$$= \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2^{n+1}} - 1}{2^{n+1} \cdot \operatorname{ctg} \frac{x}{2^{n+1}}} + \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2^{n+1}}}{2^{n+1}} - \operatorname{ctg} x = (\diamondsuit)$$

Svedema prva dva razlomka na isti nazivnik $2^{n+1} \cdot \operatorname{ctg} \frac{x}{2^{n+1}}$, slijedi:

$$(\diamondsuit) = \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2^{n+1}} - 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2^{n+1}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{x}{2^{n+1}}}{2^{n+1} \cdot \operatorname{ctg} \frac{x}{2^{n+1}}} - \operatorname{ctg} x = (\diamondsuit\diamondsuit)$$

Prisjetimo se da vrijedi identitet $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$. Imajuci to na umu racunam dalje, slijedi:

$$(\diamondsuit\diamondsuit) = \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2^{n+1}} - 1 + \overbrace{\operatorname{tg} \frac{x}{2^{n+1}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{x}{2^{n+1}}}^{1}}{2^{n+1} \cdot \operatorname{ctg} \frac{x}{2^{n+1}}} - \operatorname{ctg} x =$$

$$= \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2^{n+1}} \cancel{-1} + \cancel{1}}{2^{n+1} \cdot \operatorname{ctg} \frac{x}{2^{n+1}}} - \operatorname{ctg} x = \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2^{n+1}}}{2^{n+1} \cdot \operatorname{ctg} \frac{x}{2^{n+1}}} - \operatorname{ctg} x = (\triangle)$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$(\triangle) = \frac{\cancelto{\operatorname{ctg} \frac{x}{2^{n+1}}}{\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2^{n+1}}}}{2^{n+1} \cdot \cancelto{1}{\operatorname{ctg} \frac{x}{2^{n+1}}}} - \operatorname{ctg} x = \frac{\operatorname{ctg} \frac{x}{2^{n+1}}}{2^{n+1}} - \operatorname{ctg} x = (\triangle\triangle)$$

Ovaj izraz mozemo zapisati malo drugacije, slijedi:

$$(\triangle\triangle) = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{\operatorname{ctg} \frac{x}{2^{n+1}}}{1} - \operatorname{ctg} x = \frac{1}{2^{n+1}} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^{n+1}} - \operatorname{ctg} x$$

Time smo zapravo dobili isti izraz kao i na pocetku koraka indukcije, odnosno dobili smo upravo ono sto smo trebali dobiti.

Prema PMI mozemo zakljuciti da tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dakle zadatak je rijesen.