1.2 Matematicka indukcija (staro izdanje knjige)

Zadatak 1: (str. 19) 4) Matematickom indukcijom dokazi da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$5 + 8 + 11 + ... + (3n + 2) = \frac{1}{2}(3n + 7)$$

Rjesenje: Provodimo postupak dokazivanja matematickom indukcijom.

BAZA INDUKCIJE: Pokazimo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$. Uvrstavamo broj 1 u zadnji clan sume na lijevoj strani i u izraz na desnoj strani.

$$3\overbrace{n}^{1}+2 = \frac{1}{2}\overbrace{n}^{1}(3\overbrace{n}^{1}+7)$$

$$3 \cdot 1 + 2 = \frac{1}{2} \cdot 1\,(3 \cdot 1 + 7)$$

$$3 + 2 = \frac{1}{2} \cdot (3 + 7)$$

Pokratimo sto se pokratiti dade:

$$5 = \frac{1}{\cancel{2}_1} \cdot \frac{\cancel{10}^5}{1}$$

$$5 = 5$$

Kako je lijeva strana jednaka desnoj, tvrdnja vrijedi za $n = 1$.

PRETPOSTAVKA INDUKCIJE: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Dakle da vrijedi:

$$5 + 8 + 11 + ... + (3n + 2) = \frac{1}{2}(3n + 7)$$

KORAK INDUKCIJE: Uz pretpotavku pakazimo da tvrdnja vrijedi i za n+1.

Pogledajmo prvo kako bi trebao izgledati izraz na desnoj strani tvrdnje kad bi suma na lijevoj stani imala $n + 1$ clanova. To cemo uciniti tako da u izrazu na desnoj strani zamijenimo n s $n + 1$, racunam:

$$\frac{1}{2}\overbrace{n}^{n+1}(3\overbrace{n}^{n+1}+7) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}(n+1)\left[3(n+1)+7\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(n+1)(3n+3+7) = \frac{1}{2}(n+1)(3n+10)$$

Dakle to je ono sto bi trebali dobiti kada zbrojimo prvih $n + 1$ clanova sume. Racunamo:

$$5 + 8 + 11 + ... + (3n + 2) + [3(n + 1) + 2] = (\star)$$

Posljednji, dakle $n+1$ clan sume, dobili smo tako da smo u posljednji clan na lijevoj strani tvrdnje, $((3n+2))$, umjesto n uvrstili $n+1$. Nastavljamo s racunom. Primjetimo da je, prema pretpostavci indukcije, suma prvih n clanova sume jednaka $\frac{1}{2}n\,(3n+7)$. Slijedi:

$$(\star) = \underbrace{5+8+11+...+(3n+2)}_{\frac{1}{2}n(3n+7)} + (3n+3+2) =$$

$$= \frac{1}{2}n\,(3n+7) + (3n+5) = \frac{1}{2}n \cdot 3n + \frac{1}{2}n \cdot 7 + 3n + 5 =$$

$$= \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n + 3n + 5 = (\star\star)$$

Svedemo sve koeficijente na isti nazivnik te izlucimo $\frac{1}{2}$:

$$(\star\star) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n + \frac{6}{2}n + \frac{10}{2} = \frac{3}{2}n^2 + \frac{13}{2}n + \frac{10}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(3n^2 + 13n + 10\right) = \frac{1}{2}\left(3n^2 + 3n + 10n + 10\right) = (\star\star\star)$$

Izlucimo $3n$ iz prva dva clana zagrade i 10 iz druga dva clana zagrade, slijedi:

$$(\star\star\star) = \frac{1}{2}\left[3n\,(n+1) + 10\,(n+1)\right] = (\square)$$

Izlucimo $n+1$ iz oba clana sume, slijedi:

$$(\square) = \frac{1}{2}\,(n+1)\,(3n+10)$$

Cime smo zapravo dobili isti izraz kao i na pocetku koraka indukcije, odnosno dobili smo upravo ono sto smo trebali dobiti.

Prema PMI mozemo zakljuciti da tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. Time je zadatak rijesen.

✠ Zadatak 2: (str. 19) 4) Matematickom indukcijom dokazi da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$2 + 16 + 56 + ... + (3n-2) \cdot 2^n = 10 + (3n-5) \cdot 2^{n+1}$$

Rjesenje: Provodimo postupak dokazivanja matematickom indukcijom.

BAZA INDUKCIJE: Pokazimo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$. Uvrstavamo broj 1 u zadnji clan sume na lijevoj strani i u izraz na desnoj strani.

$$(3\overbrace{n}^{1}-2) \cdot 2^{\overbrace{n}^{1}} = 10 + (3\overbrace{n}^{1}-5) \cdot 2^{\overbrace{n}^{1}+1}$$

$$(3 \cdot 1 - 2) \cdot 2^1 = 10 + (3 \cdot 1 - 5) \cdot 2^{1+1}$$

$$(3 - 2) \cdot 2 = 10 + (3 - 5) \cdot 2^2$$

$$1 \cdot 2 = 10 + (-2) \cdot 4$$

$$2 = 10 + (-8)$$

$$2 = 10 - 8$$

$$2 = 2$$

Kako je lijeva strana jednaka desnoj, tvrdnja vrijedi za $n = 1$.

PRETPOSTAVKA INDUKCIJE: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Dakle da vrijedi:

$$2 + 16 + 56 + ... + (3n - 2) \cdot 2^n = 10 + (3n - 5) \cdot 2^{n+1}$$

KORAK INDUKCIJE: Uz pretpotavku pakazimo da tvrdnja vrijedi i za n+1.
Pogledajmo prvo kako bi trebao izgledati izraz na desnoj strani tvrdnje kad bi suma na lijevoj stani imala $n + 1$ clanova. To cemo uciniti tako da u izrazu na desnoj strani zamijenimo n s $n + 1$, racunam:

$$10 + (3 \overbrace{n}^{n+1} - 5) \cdot 2^{\overbrace{n}^{n+1} + 1} \Rightarrow 10 + [3\,(n + 1) - 5] \cdot 2^{n+1+1} =$$

$$= 10 + (3n + 3 - 5) \cdot 2^{n+2} = 10 + (3n - 2) \cdot 2^{n+2}$$

Dakle to je ono sto bi trebali dobiti kada zbrojimo prvih $n + 1$ clanova sume. Racunamo:

$$2 + 16 + 56 + ... + (3n - 2) \cdot 2^n + [3\,(n + 1) - 2] \cdot 2^{n+1} = (\star)$$

Posljednji, dakle $n + 1$ clan sume, dobili smo tako da smo u posljednji clan na lijevoj strani tvrdnje, $((3n - 2) \cdot 2^n)$, umjesto n uvrstili $n + 1$. Nastavljamo s racunom. Primjetimo da je, prema pretpostavci indukcije, suma prvih n clanova sume jednaka $10 + (3n - 5) \cdot 2^{n+1}$. Slijedi:

$$(\star) = \underbrace{2 + 16 + 56 + ... + (3n - 2) \cdot 2^n}_{10+(3n-5)\cdot 2^{n+1}} + (3n + 3 - 2) \cdot 2^{n+1} =$$

$$= 10 + (3n - 5) \cdot 2^{n+1} + (3n + 1) \cdot 2^{n+1} = (\star\star)$$

Izlucimo 2^{n+1} iz posljednja cetiri clana sume, slijedi:

$$(\star\star) = 10 + 2^{n+1}\,[(3n - 5) + (3n + 1)] = 10 + 2^{n+1}\,(3n - 5 + 3n + 1) =$$

$$= 10 + 2^{n+1}\,(6n - 4) = (\square)$$

Izlucimo 2 iz clanova sume u zagradi, slijedi:

$$(\Box) = 10 + 2^{n+1} \cdot 2 \cdot (3n - 2) = (\Box\Box)$$

Pomnozimo potencije prema pravilu za mnozenje potencija istih baza razlicitih eksponenata, ($a^n \cdot a^m = a^{m+n}$), slijedi:

$$(\Box\Box) = 10 + 2^{n+1} \cdot 2^1 \cdot (3n - 2) = 10 + 2^{n+1+1} \cdot (3n - 2) =$$

$$= 10 + 2^{n+2} \cdot (3n - 2) = 10 + (3n - 2) \cdot 2^{n+2}$$

Cime smo zapravo dobili isti izraz kao i na pocetku koraka indukcije, odnosno dobili smo upravo ono sto smo trebali dobiti.

Prema PMI mozemo zakljuciti da tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. Time je zadatak rijesen.

⚔ Zadatak 3: (str. 19) 1) Matematickom indukcijom dokazi da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$1 \cdot 2^n + 2 \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-2} + ... + n \cdot 2 + (n + 1) = 2^{n+2} - (n + 3)$$

Rjesenje: Provodimo postupak dokazivanja matematickom indukcijom. Prije nego sto prijedjemo na sam postupak dokazivanja promotrimo prvo kako je zapravo gornja suma dobivena.

Ovdje se svaka suma dobiva na poseban nacin, tocnije nije dovoljno samo dodati clanove na kraj sume ako zelimo povecati broj clanova, vec je potrebno revidirati cijelu sumu. U svrhu promatranja zapisimo izraz iz zadataka na malo dugaciji nacin:

$$1 \cdot 2^n + 2 \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-2} + ... + n \cdot 2^1 + (n + 1) \cdot 2^0 = 2^{n+2} - (n + 3)$$

Pogledamo li malo pomnije svaki clan sume, mozemo uociti da je on nastao na sljedeci nacin:

$$k \cdot 2^{n+1-k}, \quad k \in \{1, 2, ..., n, n + 1\}$$

Drugim rijecima dobijemo ga tako da uzmemo neki broj izmedju 0 i $n + 1$, ako se radi o n-toj sumi, i pomnozimo ga s potencijom cija je baza broj 2, a eksponent broj $n+1$ umanjen za taj broj. Dakle n-ta suma ima $n+1$ clanova sume.

BAZA INDUKCIJE: Pokazimo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$. Imajuci na umu prijasnje razmatranje bitno je uociti da za $n = 1$, prva suma (lijeva strana tvrdnje), ima zapravo dva clana, a ne kao u prethodna dva zadatka samo jedan. Ta dva clana su slijedeca (koristimo izraz $k \cdot 2^{2-k}, \quad k \in \{1, 2\}$):

$$1 \cdot 2^{2-1} = 1 \cdot 2^1 \quad \text{za} \quad k = 1$$

$$2 \cdot 2^{2-2} = 1 \cdot 2^0 \quad \text{za} \quad k = 2$$

Dakle prva suma, odnosno kad je $n = 1$ ima oblik:

$$1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^0 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 2 + 2 = 4$$

Pogledajmo da li i na desnoj strani dobijemo isti rezultat kada uvrstimo $n = 1$ u desnu stranu tvrdnje dane u zadatku, racunam:

$$2^{\overbrace{n}^{1}+2} - (\overbrace{n}^{1}+3) = 2^{1+2} - (1+3) =$$
$$2^3 - 4 = 8 - 4 = 4$$

Dakle s obje strane smo dobili isti rezultat sto znaci da tvrdnja doista vrijedi za $n = 1$.

PRETPOSTAVKA INDUKCIJE: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Dakle da vrijedi:

$$1 \cdot 2^n + 2 \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-2} + ... + n \cdot 2 + (n+1) = 2^{n+2} - (n+3)$$

KORAK INDUKCIJE: Uz pretpotavku pakazimo da tvrdnja vrijedi i za n+1.

Pogledajmo prvo kako bi trebao izgledati izraz na desnoj strani tvrdnje kad bi kad bi gledali $(n+1)$-vu sumu. To cemo uciniti tako da u izrazu na desnoj strani zamijenimo n s $n+1$, racunam:

$$2^{\overbrace{n}^{n+1}+2} - (\overbrace{n}^{n+1}+3) \quad \Rightarrow \quad 2^{n+1+2} - (n+1+3) =$$
$$= 2^{n+3} - (n+4)$$

Pogledajmo sada kako bi izgledala lijeva strana n+1-ve sume. Ona ce se sastojati od $n+2$ clana (isto kao sto je prva suma imala dva clana). Svi clanovi sume su oblika $k \cdot 2^{n+2-k}$, $k \in \{1, 2, ..., n+1, n+2\}$, vrijedi:

$$1 \cdot 2^{n+1} + 2 \cdot 2^n + 3 \cdot 2^{n-1} + ... + n \cdot 2^2 + (n+1) \cdot 2^1 + (n+2) \cdot 2^0 = (\star)$$

Problem koji ovdje nastaje jest da ne mozemo jasno prepoznati pretpostavku indukcije kao dio lijeve strane kako sto smo to mogli u prethodna dva problema. No ono sto mogu primjetiti jest da je lijeva strana gotovo identicna izrazu danom u zadatku do na eksponent u potencijama svakog os clana sume, odnosno taj eksponent je za 1 prevelik. Ideja koja se sada javlja prirodno jest da pokusamo izluciti 2 iz prvih $n+1$ clanova sume (dakle svih osim posljednjeg), slijedi:

$$(\star) = 2\left(1 \cdot 2^n + 2 \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-2} + ... + n \cdot 2^1 + (n+1) \cdot 2^0\right) + (n+2) \cdot 2^0 = (\star\star)$$

Promotrim li malo dobiveni izraz mogu uociti da se izraz u zagradi poklapa s pretpostavkom, odnosno vrijedi:

$$(\star\star) = 2\underbrace{\left(1 \cdot 2^n + 2 \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-2} + ... + n \cdot 2^1 + (n+1) \cdot 2^0\right)}_{2^{n+2}-(n+3)} + (n+2) \cdot 1 =$$

$$= 2\left(2^{n+2} - (n+3)\right) + n + 2 = (\square)$$

Raspisem dobiveni izraz:

$$(\square) = 2 \cdot 2^{n+2} - 2 \cdot (n+3) + n + 2 = (\square\square)$$

Pomnozimo potencije prema pravilu za mnozenje potencija istih baza razlicitih eksponenata, ($a^n \cdot a^m = a^{m+n}$), slijedi:

$$(\square\square) = 2^1 \cdot 2^{n+2} - 2n - 6 + n + 2 = 2^{1+n+2} - n - 4 = (\triangle)$$

Izlucimo minus iz posljednja dva clana sume, slijedi:

$$(\triangle) = 2^{n+3} - (n+4)$$

Cime smo zapravo dobili isti izraz kao i na pocetku koraka indukcije, odnosno dobili smo upravo ono sto smo trebali dobiti.

Prema PMI mozemo zakljuciti da tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 4: (str. 19) 3) Uvrsti nekoliko pocetnih vrijednosti za broj n i pokusaj odrediti izraz za sljedecu sumu. Dobivenu formulu provjeri matematickom indukcijom.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + ... + \frac{1}{(n-1)\,n} =?$$

Rjesenje: Pogledajmo prvih nekoliko suma i odredimo cemu su one jednake te na temelju toga probajmo odrediti opceniti izraz za sumu. Krenimo od $n = 1$, ta suma imat ce samo jedan clan:

$$\frac{1}{0 \cdot 1} = \frac{1}{0}$$

Ovo je zapravo nemoguce sto znaci da dani izraz promatrati za $n > 1$. Pogledajmo nadalje sumu za $n = 2$, ta suma imat ce jedan clan (jer je $n = 2$ zapravo prvi dozvoljeni broj):

$$\frac{1}{(2-1) \cdot 2} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

Odredimo nadalje sumu za $n = 3$, ta suma ima dva clana:

$$\frac{1}{(2-1) \cdot 2} + \frac{1}{(3-1) \cdot 3} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = (\star)$$

Svedemo razlomke na zajednicki nazivnik 6, slijedi:

$$(\star) = \frac{3+1}{6} = \frac{4}{6} = (\star\star)$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$(\star\star) = \frac{{}^{2}\cancel{4}}{\cancel{6}_{3}} = \frac{2}{3}$$

Odredimo jos i sumu za $n = 4$, ta suma ima tri clana:

$$\frac{1}{(2-1)\cdot 2} + \frac{1}{(3-1)\cdot 3} + \frac{1}{(4-1)\cdot 4} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = (\star)$$

Svedemo razlomke na zajednicki nazivnik 12, slijedi:

$$(\star) = \frac{6+2+1}{12} = \frac{9}{12} = (\star\star)$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$(\star\star) = \frac{{}^{3}\cancel{9}}{\cancel{12}_{4}} = \frac{3}{4}$$

Dakle nakon sto smo proveli ova tri racuna mogli bi pretpostaviti da vrijedi:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{(n-1)\,n} = \frac{n-1}{n}$$

Jer kao sto smo vidjeli uvijek je suma imala oblik razlomka pri cemu je brojnik bio upravo za 1 manji od n, dok je nazivnik bio upravo jednak n, za $n > 1$. Primjetimo i da suma uvijek ima $n - 1$ clanova.
Jedino sto preostaje jest provesti postupak dokazivanja matematickom indukcijom.

BAZA INDUKCIJE: Pokazimo da tvrdnja vrijedi za $n = 2$ (jer tvrdnja vrijedi samo za $n > 1$). Uvrstavamo broj 2 u zadnji clan sume na lijevoj strani i u izraz na desnoj strani.

$$\frac{1}{(\underbrace{n}_{2}-1)\underbrace{n}_{2}} = \frac{\overbrace{n}^{2}-1}{\underbrace{n}_{2}}$$

$$\frac{1}{(2-1)\cdot 2} = \frac{2-1}{2}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Kako je lijeva strana jednaka desnoj, tvrdnja vrijedi za $n = 2$.

PRETPOSTAVKA INDUKCIJE: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Dakle da vrijedi:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{(n-1)\,n}=\frac{n-1}{n}$$

KORAK INDUKCIJE: Uz pretpotavku pakazimo da tvrdnja vrijedi i za n+1.

Pogledajmo prvo kako bi trebao izgledati izraz na desnoj strani tvrdnje kad bi suma na lijevoj stani imala n clanova (kako smo poceli s $n=2$ suma ima jedan clan manje). To cemo uciniti tako da u izrazu na desnoj strani zamijenimo n s $n+1$, racunam:

$$\frac{\overbrace{n}^{n+1}-1}{\underbrace{n}_{n+1}} \quad\Rightarrow\quad \frac{n+\cancel{1}\cancel{-1}}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

Dakle to je ono sto bi trebali dobiti kada zbrojimo prvih n (kako smo poceli s $n=2$ suma uvijek ima jedan clan manje) clanova sume. Racunam:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{(n-1)\,n}+\frac{1}{(n+1-1)\,(n+1)}=(\star)$$

Posljednji, dakle n-ti clan sume (kako smo poceli s $n=2$ suma ima jedan clan manje), dobili smo tako da smo u posljednji clan na lijevoj strani tvrdnje, $\left(\frac{1}{(n-1)\,n}\right)$, umjesto n uvrstili $n+1$. Nastavljamo s racunom. Primjetimo da je, prema pretpostavci indukcije, suma prvih $n-1$ clanova sume (kako smo poceli s $n=2$ suma ima jedan clan manje) jednaka $\frac{n-1}{n}$. Slijedi:

$$(\star)=\underbrace{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{(n-1)\,n}}_{\frac{n-1}{n}}+\frac{1}{n\,(n+1)}=$$

$$=\frac{n-1}{n}+\frac{1}{n\,(n+1)}=(\star\star)$$

Svedemo razlomke na zajednicki nazivnik $n\,(n+1)$, slijedi:

$$(\star\star)=\frac{(n-1)\,(n+1)+1\cdot 1}{n\,(n+1)}=(\square)$$

Prvi izraz u sumi brojnika prepoznam kako razliku kvadrata, odnosno $a^2-b^2=(a-b)\,(a+b)$, imajuci to na umu vrijedi:

$$(\square)=\frac{\overbrace{(n-1)\,(n+1)}^{n^2-1^2}+1}{n\,(n+1)}=\frac{n^2-1^2+1}{n\,(n+1)}=$$

$$= \frac{n^2 \cancel{-1} + \cancel{1}}{n\,(n+1)} = \frac{n^2}{n\,(n+1)} = (\square\square)$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$(\square\square) = \frac{\cancel{n^2}^{\,n}}{{}_1\cancel{n}(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Cime smo zapravo dobili isti izraz kao i na pocetku koraka indukcije, odnosno dobili smo upravo ono sto smo trebali dobiti.

Prema PMI mozemo zakljuciti da tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $n > 1$. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 6: (str. 19) 4) Dokazi matematickom indukcijom:

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) ... \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2\,(n+1)}$$

Rjesenje: Ono sto mozemo primjetiti kod ovog zadatka jest da se na lijevoj strani nalazi produkt umjesto sume, no postupak dokazivanja matematickom indukcijom provest cemo na sasvim isti nacin.

BAZA INDUKCIJE: Pokazimo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$. Uvrstavamo broj 1 u zadnji clan produkta na lijevoj strani i u izraz na desnoj strani.

$$1 - \frac{1}{(\underbrace{n}_{1}+1)^2} = \frac{\overbrace{n}^{1}+2}{2(\underbrace{n}_{1}+1)}$$

$$1 - \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1+2}{2\,(1+1)}$$

$$1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{2 \cdot 2}$$

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Svedem razlomke na lijevoj strani na isti nayivnik 4, slijedi:

$$\frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

Kako je lijeva strana jednaka desnoj, tvrdnja vrijedi za $n = 1$.

PRETPOSTAVKA INDUKCIJE: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Dakle da vrijedi:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)...\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2(n+1)}$$

KORAK INDUKCIJE: Uz pretpotavku pakazimo da tvrdnja vrijedi i za n+1.
Pogledajmo prvo kako bi trebao izgledati izraz na desnoj strani tvrdnje kad bi produkt na lijevoj stani imala $n+1$ clanova. To cemo uciniti tako da u izrazu na desnoj strani zamijenimo n s $n+1$, racunam:

$$\frac{\overbrace{n}^{n+1}+2}{2(\underbrace{n}_{n+1}+1)} \Rightarrow \frac{n+1+2}{2(n+1+1)}=\frac{n+3}{2(n+2)}$$

Dakle to je ono sto bi trebali dobiti kada izmnoyimo prvih $n+1$ clanova produkta. Racunamo:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)...\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1+1)^2}\right)=(\star)$$

Posljednji, dakle $n+1$ clan produkta, dobili smo tako da smo u posljednji clan na lijevoj strani tvrdnje, $\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$, umjesto n uvrstili n+1. Nastavljamo s racunom. Primjetimo da je, prema pretpostavci indukcije, produkt prvih n clanova produkta jednak $\frac{n+2}{2(n+1)}$. Slijedi:

$$(\star)=\underbrace{\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)...\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)}_{\frac{n+2}{2(n+1)}}\left(1-\frac{1}{(n+2)^2}\right)=$$

$$=\frac{n+2}{2(n+1)}\left(1-\frac{1}{(n+2)^2}\right)=(\star\star)$$

Svedemo razlomke u zagradi na isti nazivnik $(n+2)^2$, slijedi:

$$(\star\star)=\frac{n+2}{2(n+1)}\left(1-\frac{1}{(n+2)^2}\right)=(\star\star\star)$$

Svedemo clanove sume u zagradi na isti nazivnik $(n+2)^2$

$$(\star\star\star)=\frac{n+2}{2(n+1)}\cdot\frac{1\cdot(n+2)^2-1\cdot 1}{(n+2)^2}=\frac{n+2}{2(n+1)}\cdot\frac{(n+2)^2-1}{(n+2)^2}=(\Box)$$

Raspisemo izraz u brojniku drugog razlomka prema izrazu za kvadrat binoma, odnosno prema $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, slijedi:

$$(\square) = \frac{n+2}{2(n+1)} \cdot \frac{n^2 + 2 \cdot n \cdot 2 + 2^2 - 1}{(n+2)^2} = \frac{n+2}{2(n+1)} \cdot \frac{n^2 + 4n + 4 - 1}{(n+2)^2} =$$

$$= \frac{n+2}{2(n+1)} \cdot \frac{n^2 + 4n + 3}{(n+2)^2} = (\square\square)$$

Rastavimo na faktore izraz u brojniku drugog razlomka tako da srednji clan $4n$ prikazemo kao $n + 3n$ te izlucimo n iz prva dva clana sume, odnosno 3 iz posljednja dva clana sume, slijedi:

$$(\square\square) = \frac{n+2}{2(n+1)} \cdot \frac{n^2 + n + 3n + 3}{(n+2)^2} = \frac{n+2}{2(n+1)} \cdot \frac{n(n+1) + 3(n+1)}{(n+2)^2} = (\triangle)$$

Izlucimo $n+1$ iz oba clana sume u izrazu brojnika drugog razlomka te pokratim sto se pokratiti dade:

$$(\triangle) = \frac{\cancel{n+2}^{1}}{2\cancel{(n+1)}_{1}} \cdot \frac{{}^{1}\cancel{(n+1)}(n+3)}{\cancel{(n+2)^2}_{(n+2)}} = \frac{n+3}{2(n+2)}$$

Cime smo zapravo dobili isti izraz kao i na pocetku koraka indukcije, odnosno dobili smo upravo ono sto smo trebali dobiti.

Prema PMI mozemo zakljuciti da tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 6: (str. 19) 6) Dokazi matematickom indukcijom:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{16} + ... + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

Rjesenje: Provodimo postupak dokazivanja matematickom indukcijom.

BAZA INDUKCIJE: Pokazimo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$. Uvrstavamo broj 1 u zadnji clan sume na lijevoj strani i u izraz na desnoj strani.

$$\frac{\overbrace{n}^{1}}{2^{\underbrace{n}_{1}}} = 2 - \frac{\overbrace{n}^{1}+2}{2^{\underbrace{n}_{1}}}$$

$$\frac{1}{2^1} = 2 - \frac{1+2}{2^1}$$

$$\frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2}$$

Svedemo razlomak na desnoj strani na isti nazivnik 2, slijedi:

$$\frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 2 - 3}{2}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{4 - 3}{2}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Kako je lijeva strana jednaka desnoj, tvrdnja vrijedi za $n = 1$.

PRETPOSTAVKA INDUKCIJE: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Dakle da vrijedi:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{16} + ... + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

KORAK INDUKCIJE: Uz pretpotavku pakazimo da tvrdnja vrijedi i za n+1.
Pogledajmo prvo kako bi trebao izgledati izraz na desnoj strani tvrdnje kad bi suma na lijevoj stani imala $n + 1$ clanova. To cemo uciniti tako da u izrazu na desnoj strani zamijenimo n s $n + 1$, racunam:

$$2 - \frac{\overbrace{n}^{n+1} + 2}{2^{\overbrace{n}^{n+1}}} \quad \Rightarrow \quad 2 - \frac{n+1+2}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}$$

Dakle to je ono sto bi trebali dobiti kada zbrojimo prvih $n + 1$ clanova sume. Racunamo:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{16} + ... + \frac{n}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = (\star)$$

Posljednji, dakle $n + 1$ clan sume, dobili smo tako da smo u posljednji clan na lijevoj strani tvrdnje, $\frac{n}{2^n}$, umjesto n uvrstili $n + 1$. Nastavljamo s racunom. Primjetimo da je, prema pretpostavci indukcije, suma prvih n clanova sume jednaka $2 - \frac{n+2}{2^n}$. Slijedi:

$$(\star) = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{16} + ... + \frac{n}{2^n}}_{2 - \frac{n+2}{2^n}} + \frac{n+1}{2^{n+1}} =$$

$$= 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = (\star\star)$$

Izlucimo minus iz druga dva razlomka te ih svedemo na isti nazivnik 2^{n+1}, uocimo da vrijedi ($2^{n+1} = 2^n \cdot 2^1 = 2 \cdot 2^n$, sto racunamo prema izrazu za mnozenje potencija istih baza, odnosno prema $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$), slijedi:

$$(\star\star) = 2 - \left(\frac{n+2}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n+1}}\right) = 2 - \left(\frac{n+2}{2^n} - \frac{n+1}{2 \cdot 2^n}\right) =$$

$$= 2 - \frac{2\left(n+2\right)-\left(n+1\right)}{2 \cdot 2^n} = 2 - \frac{2n+4-n-1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}$$

Cime smo zapravo dobili isti izraz kao i na pocetku koraka indukcije, odnosno dobili smo upravo ono sto smo trebali dobiti.

Prema PMI mozemo zakljuciti da tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. Time je zadatak rijesen.

Napomena: Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijede sljedeci izrazi:

$$1+2+3+...+n = \frac{n\left(n+1\right)}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}$$

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3 = \left(\frac{n\left(n+1\right)}{2}\right)^2$$

Tocnost svih ovih izraza pokazuje se matematickom indukcijom!

Zadatak 9: (str. 20) 6) Koristeci se formulama navedenim u napomeni izracunaj sljedecu sumu:

$$2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 3^2 + ... + \left(n+1\right) \cdot n^2 = ?$$

Rjesenje: Posljednji, n-ti, clan ove sume zapisat cemo na malo drugaciji nacin, odnosno raspisat cemo ga, slijedi:

$$\left(n+1\right) \cdot n^2 = n^3 + n^2$$

Koristeci taj novi oblik posljednjeg clana sume i svaki drugi clan te sume mogu zapisati na slican nacin, primjerice prva dva clana sume izgledala bi na sljedeci nacin:

$$2 \cdot 1^2 = 1^3 + 1^2$$

$$3 \cdot 2^2 = 2^3 + 2^2$$

Zapisimo cijelu sumu u tom obliku, vrijedi:

$$2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + ... + \left(n+1\right) \cdot n^2 = 1^3 + 1^2 + 2^3 + 2^2 + ... + n^3 + n^2 = (\star)$$

Poredajmo sada prvo sve potencije ciji je eksponet 2 u jedna niz, a nakon toga sve potencije ciji je esponent 3 u drugi niz, slijedi:

$$(\star) = 1^2 + 2^2 + ... + n^2 + 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (\star\star)$$

Prema napomeni slijedi da mora vrijediti:

$$(\star\star) = \underbrace{1^2 + 2^2 + ... + n^2}_{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} + \underbrace{1^3 + 2^3 + ... + n^3}_{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = (\triangle)$$

Kavdriram drugi razlomak na nacin da svaki clan produkta u brojniku kvadriram posebno kao i sam nazivnik, slijedi:

$$(\triangle) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)^2}{2^2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (\triangle\triangle)$$

Svedem razlomke na zajednicki nazivnik 12, slijedi:

$$(\triangle\triangle) = \frac{2n(n+1)(2n+1) + 3n^2(n+1)^2}{12} = (\square)$$

Izlucimo $n(n+1)$ iz oba clana sume u brojniku, racunam:

$$(\square) = \frac{n(n+1)[2(2n+1) + 3n(n+1)]}{12} = \frac{n(n+1)\left[4n + 2 + 3n^2 + 3n\right]}{12} =$$

$$= \frac{n(n+1)\left(3n^2 + 7n + 3n\right)}{12}$$

Dakle vrijedi:

$$2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 3^2 + ... + (n+1) \cdot n^2 = \frac{n(n+1)\left(3n^2 + 7n + 3n\right)}{12}$$

Time je zadatak rijesen.

✣ Zadatak 12: (str. 20) 3) Matematickom indukcijom dokazi:

$$24 \mid n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$$

Rjesenje: Provodimo postupak dokazivanja matematickom indukcijom.

BAZA INDUKCIJE: Pokazimo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$. Uvrstavamo broj 1 u izraz $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$, slijedi:

$$1^4 + 6 \cdot 1^3 + 11 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 = 1 + 6 \cdot 1 + 11 \cdot 1 + 6 \cdot 1 =$$

$$= 1 + 6 + 11 + 6 = 24$$

Kako je 24 dijeljivo s 24, odnosno $24 \mid 24$, tvrdnja vrijedi za $n = 1$.

PRETPOSTAVKA INDUKCIJE: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Dakle da vrijedi:

$$24 \mid n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$$

Dakle mozemo pisati da vrijedi:

$$n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n = 24 \cdot a\ ;\quad a \in \mathbb{N}$$

KORAK INDUKCIJE: Uz pretpotavku pakazimo da tvrdnja vrijedi i za n+1.
Uvrstavamo $n + 1$ umjesto n u izraz $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$, slijedi:

$$\underbrace{n}_{n+1}{}^4 + 6\underbrace{n}_{n+1}{}^3 + 11\underbrace{n}_{n+1}{}^2 + 6\underbrace{n}_{n+1} =$$

$$= (n+1)^4 + 6\,(n+1)^3 + 11\,(n+1)^2 + 6\,(n+1) = (\star)$$

Kako ne znamo raspisati $(n+1)^4$ taj cemo izraz zapisati malo drugacije. Imajuci na umu potenciranje potencija, osnosno izraz $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$, uocimo da vrijedi $(n+1)^4 = (n+1)^{2 \cdot 2} = \left((n+1)^2\right)^2$. Izraz sada poprima slijedeci oblik:

$$(\star) = \left((n+1)^2\right)^2 + 6\,(n+1)^3 + 11\,(n+1)^2 + 6\,(n+1) = (\star\star)$$

Nadalje raspisujemo izraze prema izrazima za kvadrat binoma, odnosno $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, te kubu binoma, odnosno $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, slijedi:

$$(\star\star) = \left(n^2 + 2 \cdot n \cdot 1 + 1^2\right)^2 + 6\left(n^3 + 3 \cdot n^2 \cdot 1 + 3 \cdot n \cdot 1^2 + 1^3\right) +$$

$$+11\left(n^2 + 2 \cdot n \cdot 1 + 1^2\right) + 6n + 6 =$$

$$= \left(n^2 + 2n + 1\right)^2 + 6\left(n^3 + 3n^2 + 3n + 1\right) + 11\left(n^2 + 2n + 1\right) + 6n + 6 = (\triangle)$$

Prvi clan sume raspisemo po izrazu za kvadrat trinoma, osnosno $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$, slijedi:

$$(\triangle) = \left(n^2\right)^2 + (2n)^2 + 1^2 + 2 \cdot n^2 \cdot 2n + 2 \cdot 2n \cdot 1 + 2 \cdot n^2 \cdot 1 +$$

$$+6\left(n^3 + 3n^2 + 3n + 1\right) + 11\left(n^2 + 2n + 1\right) + 6n + 6 =$$

$$= n^4 + 4n^2 + 1 + 4n^3 + 4n + 2n^2 + 6n^3 + 18n^2 + 18n + 6 + 11n^2 + 22n + 11 + 6n + 6 = (\triangle\triangle)$$

Izdvojimo sve clanove sume koji se nalaze u izrazu $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$ na pocetak, te ostatak pozbrajam prema pravilu zbrajanja potencija, slijedi:

$$(\triangle\triangle) = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 4n^3 + 24n^2 + 44n + 24 = (\square)$$

Zbroj prva cetiri clana sume dijeljiva su s 24 po pretpostavci. Clanovi sume $24n^2$ i 24 su dijeljivi s 24 sami po sebi dok iz preostalih clanova sume izlucim 4, slijedi:

$$(\square) = \underbrace{n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n}_{24\cdot a} + 24n^2 + 24 + 4\left(n^3 + 11n\right) =$$

$$= 24a + 24n^2 + 24 + 4\left(n^3 + 11n\right) = (\square\square)$$

Da bi cijeli izraz bio dijeljiv s 24 izraz u zagradi, odnosno $n^3 + 11n$, treba biti dijeljiv s 6.

Dakle moram matematickom indukcijom dokazati da vrijedi:

$$6 \mid n^3 + 11n$$

Provodimo postupak dokazivanja matematickom indukcijom.

BAZA INDUKCIJE: Pokazimo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$. Uvrstavamo broj 1 u izraz $n^3 + 11n$, slijedi:

$$1^3 + 11 \cdot 1 = 1 + 11 = 12$$

Kako je 12 dijeljivo s 6, odnosno $6 \mid 12$, tvrdnja vrijedi za $n = 1$.

PRETPOSTAVKA INDUKCIJE: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Dakle da vrijedi:

$$6 \mid n^3 + 11n$$

Dakle mozemo pisati da vrijedi:

$$n^3 + 11n = 6 \cdot b \ ; \ \ b \in \mathbb{N}$$

KORAK INDUKCIJE: Uz pretpotavku pakazimo da tvrdnja vrijedi i za n+1.
Uvrstavamo $n + 1$ umjesto n u izraz $n^3 + 11n$, slijedi:

$$\underbrace{n}_{n+1}{}^3 + 11 \underbrace{n}_{n+1} = (n+1)^3 + 11\,(n+1) = (*)$$

Nadalje raspisujemo izraz prema izrazu za kub binoma, odnosno $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, slijedi:

$$(*) = n^3 + 3 \cdot n^2 \cdot 1 + 3 \cdot n \cdot 1 + 1^3 + 11n + 11 =$$

$$= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 11n + 11 = (**)$$

Izdvojimo sve clanove sume koji se nalaze u izrazu $n^3 + 11n$ na pocetak, te ostatak pozbrajam prema pravilu zbrajanja potencija, slijedi:

$$(**) = n^3 + 11n + 3n^2 + 3n + 12 = (***)$$

Zbroj prva dva clana sume dijeljiva su s 6 po pretpostavci. Clan sume 12 dijeljiv je s 6 sam po sebi dok iz preostalih clanova sume izlucim 3, slijedi:

$$(***) = \underbrace{n^3 + 11n}_{6 \cdot b} + 11 + 3\left(n^2 + n\right) =$$

$$= 6b + 12 + 3\left(n^2 + n\right) = (****)$$

Da bi cijeli izraz bio dijeljiv s 6 izraz u zagradi, odnosno $n^2 + n$, treba biti dijeljiv s 2.

Dakle moram matematickom indukcijom dokazati da vrijedi:

$$2 \mid n^2 + n$$

Provodimo postupak dokazivanja matematickom indukcijom.

BAZA INDUKCIJE: Pokazimo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$.
Uvrstavamo broj 1 u izraz $n^2 + n$, slijedi:

$$1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

Kako je 2 dijeljivo s 2, odnosno $2 \mid 2$, tvrdnja vrijedi za $n = 1$.

PRETPOSTAVKA INDUKCIJE: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Dakle da vrijedi:

$$2 \mid n^2 + n$$

Dakle mozemo pisati da vrijedi:

$$n^2 + n = 2 \cdot c\,; \quad c \in \mathbb{N}$$

KORAK INDUKCIJE: Uz pretpotavku pakazimo da tvrdnja vrijedi i za n+1.
Uvrstavamo $n + 1$ umjesto n u izraz $n^2 + n$, slijedi:

$$\underbrace{n}_{n+1}{}^2 + \underbrace{n}_{n+1} = (n+1)^2 + n + 1 = (\diamond)$$

Nadalje raspisujemo izraz prema izrazu za kvadrat binoma, odnosno $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, slijedi:

$$(\diamond) = n^2 + 2 \cdot n \cdot 1 + 1^2 + n + 1 =$$

$$= n^2 + 2n + 1 + n + 1 = (**)$$

Izdvojimo sve clanove sume koji se nalaze u izrazu $n^2 + n$ na pocetak, te ostatak pozbrajam prema pravilu zbrajanja potencija, slijedi:

$$(\diamond\diamond) = n^2 + n + 2n + 2 = (\diamond\diamond\diamond)$$

Zbroj prva dva clana sume dijeljiva su s 2 po pretpostavci. Clanovi sume $2n$ i 2 takodjer su dijeljivi s 2, slijedi:

$$(\diamond\diamond\diamond) = \underbrace{n^2 + n}_{2\cdot c} + 2n + 2 = 2c + 2n + 2$$

Kako su svi clanovi sume dijeljivi s 2 onda je i cijela suma dijeljiva s 2, dakle tvrdnja vrijedi za $n + 1$.

Prema PMI mozemo zakljuciti da vrijedi:

$$2 \mid n^2 + n \;;\;\; \text{za svaki } n \in \mathbb{N}$$

Dakle pokazali smo da je vrijedi:

$$2 \mid n^2 + n$$

Mozemo pisati da vrijedi:

$$n^2 + n = 2 \cdot d \;;\;\; d \in \mathbb{N}$$

Nadalje onda slijedi:

$$(****) = 6b + 12 + 3 \cdot 2 \cdot d = 6b + 12 + 6d$$

Kako su svi clanovi sume dijeljivi s 6 onda je i cijela suma dijeljiva s 6, dakle tvrdnja vrijedi za $n + 1$.

Prema PMI mozemo zakljuciti da vrijedi:

$$6 \mid n^3 + 11n \;;\;\; \text{za svaki } n \in \mathbb{N}$$

Dakle pokazali smo da je vrijedi:

$$6 \mid n^3 + 11n$$

Mozemo pisati da vrijedi:

$$n^3 + 11n = 6 \cdot e \;;\;\; e \in \mathbb{N}$$

Nadalje onda slijedi:

$$(\square\square) = 24a + 24n^2 + 24 + 4 \cdot 6 \cdot e = 24a + 24n^2 + 24 + 24e$$

Kako su svi clanovi sume dijeljivi s 24 onda je i cijela suma dijeljiva s 24, dakle tvrdnja vrijedi za $n+1$.

Prema PMI mozemo zakljuciti da vrijedi:

$$24 \mid n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n \ ; \ \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}$$

Time je zadatak rijesen.

☙ ✧ ❧

Zadatak 13: (str. 20) 6) Matematickom indukcijom dokazi da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$37 \mid 2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1}$$

Rjesenje: Provodimo postupak dokazivanja matematickom indukcijom.

BAZA INDUKCIJE: Pokazimo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$. Uvrstavamo broj 1 u izraz $2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1}$, slijedi:

$$2^{\overbrace{n}^{1}+5} \cdot 3^{4\overbrace{n}^{1}} + 5^{3\overbrace{n}^{1}+1} = 2^{1+5} \cdot 3^{4\cdot 1} + 5^{3\cdot 1+1} =$$

$$= 2^6 \cdot 3^4 + 5^{3+1} = 64 \cdot 81 + 5^4 = 5184 + 625 = 5809$$

Kako je 5809 dijeljivo s 37, odnosno $37 \mid 5809$, tvrdnja vrijedi za $n = 1$.

PRETPOSTAVKA INDUKCIJE: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Dakle da vrijedi:

$$37 \mid 2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1}$$

Dakle mozemo pisati da vrijedi:

$$2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1} = 37 \cdot a \ ; \ \ a \in \mathbb{N}$$

KORAK INDUKCIJE: Uz pretpotavku pakazimo da tvrdnja vrijedi i za n+1.
Uvrstavamo $n+1$ umjesto n u izraz $2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1}$, slijedi:

$$2^{\overbrace{n}^{n+1}+5} \cdot 3^{4\overbrace{n}^{n+1}} + 5^{3\overbrace{n}^{n+1}+1} = 2^{n+1+5} \cdot 3^{4(n+1)} + 5^{3(n+1)+1} =$$

$$= 2^{n+1+5} \cdot 3^{4n+4} + 5^{3n+3+1} = (\star)$$

Promijenimo malo poredak clanova sume u eksponentima, tako da novonastali brojevi usred uvrstavanja izraza $n+1$ budu na kraju, slijedi:

$$(\star) = 2^{n+5+1} \cdot 3^{4n+4} + 5^{3n+1+3} = (\star\star)$$

Imajuci na umu izraz za mnozenje potencija istih baza, osnosno $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$, racunamo:

$$(\star\star) = 2^{n+5} \cdot 2^1 \cdot 3^{4n} \cdot 3^4 + 5^{3n+1} \cdot 5^3 = 2^{n+5} \cdot 2 \cdot 3^{4n} \cdot 81 + 5^{3n+1} \cdot 125 = (\triangle)$$

Promjenim poredak clanovima svakog od produkta imajuci na umu komutativnost mnozenja realnih brojeva, slijedi:

$$(\triangle) = 2 \cdot 81 \cdot 2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 125 \cdot 5^{3n+1} = 162 \cdot 2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 125 \cdot 5^{3n+1} = (\triangle\triangle)$$

Nadalje ono sto sad zelimo dobiti jest oblik s pocetka zadatka, odnosno izraz iz pretpostavke, kako bi je mogli primjeniti. Kako drugi clan sume sadrzi broj 125 pokusat cemo i broj 162 (dio prvog clan sume) prikazati kao sumu broja 125 i nekog broja dijeljivog s 37. No to je dosta laki, naime vrijedi $162 = 125 + 37$. Imajuci to na umu slijedi:

$$\begin{aligned}(\triangle\triangle) = \overbrace{162}^{37+125} \cdot 2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 125 \cdot 5^{3n+1} = \\ = (37 + 125) \cdot 2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 125 \cdot 5^{3n+1} = \\ = 37 \cdot 2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 125 \cdot 2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 125 \cdot 5^{3n+1} = (\square)\end{aligned}$$

Napomena: Nakon sto smo rastavili broj 162 na dva diijela dobili smo broj 125 koji je bio potreban da izlucivanjem dodjemo do pocetnog izraza u zadataku i igrom slucaja broj 37 koji je dijeljiv s 37. Takva situacija cesto ce se dogadjati (gotovo uvijek u nasim slucajevima), odnosno jedan od koeficijenata u sumi koju dobijemo kod koraka indukcije rastavit cemo tako da mozemo nesto izluciti te da je ostatak onda dijeliv s brojem u pocetnom izrazu, u nasem slucaju to je bio broj 37.

Izlucimo 125 iz posljednja dva sumanda, slijedi:

$$(\square) = 37 \cdot 2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 125 \cdot \left(2^{n+5} \cdot 3^{4n} + \cdot 5^{3n+1}\right) = (\square\square)$$

Za izraz u zagradi prema pretpostavci vrijedi $2^{n+5} \cdot 3^{4n} + \cdot 5^{3n+1} = 37a$, slijedi:

$$\begin{aligned}(\square\square) = 37 \cdot 2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 125 \cdot \underbrace{\left(2^{n+5} \cdot 3^{4n} + \cdot 5^{3n+1}\right)}_{37a} = \\ = 37 \cdot 2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 125 \cdot 37a\end{aligned}$$

Promotrimo li malo dobiveni izraz mozemo uociti da su oba clana sume dijeljiva s 37 sto znaci i da je sama suma dijeljiva s 37 sto znaci da tvrdnja vrijedi za $n+1$.

Prema PMI mozemo zakljuciti da vrijedi:

$$37 \mid 2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1} \ ; \ \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}$$

Time je zadatak rijesen.

ൂ ✧ ൂ

✻ Zadatak 13: (str. 20) 8) Matematickom indukcijom dokazi da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$57 \mid 7^{n+2} + 8^{2n+1}$$

Rjesenje: Provodimo postupak dokazivanja matematickom indukcijom.

BAZA INDUKCIJE: Pokazimo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$. Uvrstavamo broj 1 u izraz $7^{n+2} + 8^{2n+1}$, slijedi:

$$7^{\overbrace{n}^{1}+2} + 8^{2\overbrace{n}^{1}+1} = 7^{1+2} + 8^{2\cdot 1+1} =$$

$$= 7^3 + 8^{2+1} = 343 + 8^3 = 343 + 512 = 855$$

Kako je 855 dijeljivo s 57, odnosno $57 \mid 855$, tvrdnja vrijedi za $n = 1$.

PRETPOSTAVKA INDUKCIJE: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Dakle da vrijedi:

$$57 \mid 7^{n+2} + 8^{2n+1}$$

Dakle mozemo pisati da vrijedi:

$$7^{n+2} + 8^{2n+1} = 57 \cdot a \; ; \;\; a \in \mathbb{N}$$

KORAK INDUKCIJE: Uz pretpotavku pakazimo da tvrdnja vrijedi i za n+1.
Uvrstavamo $n+1$ umjesto n u izraz $7^{n+2} + 8^{2n+1}$, slijedi:

$$7^{\overbrace{n}^{n+1}+2} + 8^{2\overbrace{n}^{n+1}+1} = 7^{n+1+2} + 8^{2(n+1)+1} =$$

$$= 7^{n+1+2} + 8^{2n+2+1} = (\star)$$

Promijenimo malo poredak clanova sume u eksponentima, tako da novonastali brojevi usred uvrstavanja izraza $n+1$ budu na kraju, slijedi:

$$(\star) = 7^{n+2+1} + 8^{2n+1+2} = (\star\star)$$

Imajuci na umu izraz za mnozenje potencija istih baza, osnosno $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$, racunamo:

$$(\star\star) = 7^{n+2} \cdot 7^1 + 8^{2n+1} \cdot 8^2 = 7^{n+2} \cdot 7 + 8^{2n+1} \cdot 64 = (\triangle)$$

Promjenim poredak clanovima svakog od produkta imajuci na umu komutativnost mnozenja realnih brojeva, slijedi:

$$(\triangle) = 7 \cdot 7^{n+2} + 64 \cdot 8^{2n+1} = (\triangle\triangle)$$

Nadalje ono sto sad zelimo dobiti jest oblik s pocetka zadatka, odnosno izraz iz pretpostavke, kako bi je mogli primjeniti. Kako prvi clan sume sadrzi broj 7 pokusat cemo i broj 64 (dio drugog clana sume) prikazati kao sumu broja 7 i nekog broja dijelivog s 57. No to je lako, naime vrijedi $64 = 7 + 57$. Imajuci to na umu slijedi:

$$(\triangle\triangle) = 7 \cdot 7^{n+2} + \overbrace{64}^{7+57} \cdot 8^{2n+1} = 7 \cdot 7^{n+2} + (7+57) \cdot 8^{2n+1} =$$
$$= 7 \cdot 7^{n+52} + 7 \cdot 8^{2n+1} + 57 \cdot 8^{2n+1} = (\square)$$

Izlucimo 7 iz prva dva sumanda, slijedi:

$$(\square) = 7 \cdot \left(7^{n+2} + 8^{2n+1}\right) + 57 \cdot 8^{2n+1} = (\square\square)$$

Za izraz u zagradi prema pretpostavci vrijedi $7^{n+2} + 8^{2n+1} = 57a$, slijedi:

$$(\square\square) = 7 \cdot \underbrace{\left(7^{n+2} + 8^{2n+1}\right)}_{57a} + 57 \cdot 8^{2n+1} =$$
$$= 7 \cdot 57a + 57 \cdot 8^{2n+1}$$

Promotrimo li malo dobiveni izraz mozemo uociti da su oba clana sume dijeljiva s 57 sto znaci i da je sama suma dijeljiva s 57 sto znaci da tvrdnja vrijedi za $n+1$.

Prema PMI mozemo zakljuciti da vrijedi:

$$57 \mid 7^{n+2} + 8^{2n+1} \; ; \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}$$

Time je zadatak rijesen.

Zadatak 17: (str. 20) Dokazi da za svaki prirodni broj n, $n > 1$, broj $2^{2^n} + 1$ zavrsava znamenkom 1.

Rjesenje: Provodimo postupak dokazivanja matematickom indukcijom.

BAZA INDUKCIJE: Pokazimo da tvrdnja vrijedi za $n = 2$ (jer tvrdnja vrijedi samo za $n > 1$). Uvrstavamo broj 2 u izraz $2^{2^n} + 1$, slijedi:

$$2^{2^{\overbrace{n}^{2}}} + 1 = 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 16 + 1 = 17$$

Broj 17 zaista zavrsava znamenkom 7, dakle tvrdnja vrijedi za $n = 2$.

PRETPOSTAVKA INDUKCIJE: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Dakle da vrijedi da broj $2^{2^n} + 1$ zavrsava znamenkom 7. To zapravo znaci da vrijedi:

$$2^{2^n} + 1 = 10x + 7 \; ; \text{ za neki } x \in \mathbb{N}$$

Napomena: Usredotocimo se sada na tvrdnju da broj kojem posljednja znamenka zavrsava s a, $a \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$ mora nuzno biti oblika $10x + a$ za neki $x \in \mathbb{N}$. U tu svrhu promotrimo broj 127. Taj broj mozemo zapisati kao:

$$127 = 120 + 7 = 12 \cdot 10 + 7$$

U ovom primjeru broj 12 ima ulogu x-a iz tvrdnje i taj broj je uvijek zapravo broj sastavljen od svih znamenaka danog broja osim posljednje znamenke, dok broj 7 ima ulogu od a iz tvrdnje.

KORAK INDUKCIJE: Uz pretpotavku pakazimo da tvrdnja vrijedi i za n+1.
Uvrstavamo $n + 1$ umjesto n u izraz $2^{2^n} + 1$, slijedi:

$$2^{2^{\overbrace{n}^{n+1}}} + 1 = 2^{2^{n+1}} + 1 = (\star)$$

Raspisemo eksponent potencije $2^{2^{n+1}}$ prema izrazu za mnozenje potencija isih baza, odnosno prema $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, slijedi:

$$(\star) = 2^{2^n \cdot 2^1} + 1 = 2^{2^n \cdot 2} + 1 = (\star\star)$$

Nadalje prisjetim se izraza za potenciranje potencija, odonsno izraza $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$. Imajuci tu jednakost na umu racunam:

$$(\star\star) = \left(2^{2^n}\right)^2 + 1 = (\star\star\star)$$

I u ovom trenutku stvari postaju zanimljive, da bih mogao primjeniti pretpostavku indukcije moram se dokopati izraza $2^{2^n} + 1$. To cemo uciniti tako da gornju sumu nadopunimo s $2 \cdot 2^{2^n}$ (to ce biti srednji clan u izrazu za kvadrat binoma, $(a + b)^2 = a^a + 2ab + b^2$), slijedi:

$$(\star\star\star) = \left(2^{2^n}\right)^2 + 2 \cdot 2^{2^n} + 1 - 2 \cdot 2^{2^n} = (\triangle)$$

Zapisem cijelu sumu malo drugacije te prepoznam da na prva tri clana sume mogu primejniti izraz za kvadrat binoma, odnosno izraz $(a + b)^2 = a^a + 2ab + b^2$, slijedi:

$$(\triangle) = \underbrace{\left(2^{2^n}\right)^2 + 2 \cdot 2^{2^n} \cdot 1 + 1^2}_{(2^{2^n}+1)^2} - 2 \cdot 2^{2^n} = \left(2^{2^n} + 1\right)^2 - 2 \cdot 2^{2^n} = (\triangle\triangle)$$

U ovom trenutku na izraz u zagradi pod kvadratom mozemo primjeniti pretpostavku indukcije, odnosno da vrijedi $2^{2^n} + 1 = 10x + 7$, za neki $x \in \mathbb{N}$. No to nije sve sto mozemo zakljuciti, naime kako prema pretpostavci vrijedi $2^{2^n} + 1 = 10x + 7$, racunamo:

$$2^{2^n} + 1 = 10x + 7$$

$$2^{2^n} = 10x + 6$$

Nakon ovih zakljucaka spremni smo se vratiti na glavni racun, slijedi:

$$(\triangle\triangle) = \underbrace{\left(2^{2^n} + 1\right)^2}_{10x+7} - 2 \cdot \underbrace{2^{2^n}}_{10x+6} = (10x+7)^2 + 2\,(10x+6) = (\square)$$

Prvi clan sume raspisemo po izrazu za kvadrat binoma, ondnosno prema $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, slijedi:

$$(\square) = (10x)^2 + 2 \cdot 10x \cdot 7 + 7^2 - 20x - 12 =$$

$$= 100x^2 + 140x + 49 - 20x - 12 =$$

$$= 100x^2 + 120x + 37$$

Promotrim li malo dobiveni izraz sa sigurnoscu mogu reci da prvi clan sume zavrsava znamenkama 00 (mnozenje sa 100 je zapravo "dodavanje dvije nule na kraju broja"), dok drugi clan sume zavrsava znamenokom 0 (mnozenje s 10 je zapravo "dodavanje jedne nule na kraju broja") sto znaci da njihovim zbaranjem dobijemo broj koji zavrsava znamenkom 0. No to zapravo znaci da jedinu ulogu u odredjivanju zadnje znamenke broja nakon sumiranja ima posljednji clan sume, tocnije njegova posljednja znamenka. No ta znamenka je upravo jednaka 7 sto znaci da ce i krajnja suma zavrsiti znamenkom 7. Dakle pokazali smo da tvrdnja vrijedi za $n + 1$.

Prema PMI zakljucujemo da pocetna tvrdnja zadatka vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. Time je zadatak rijesen.