# Logaritamske jednadzbe - prvi dio

Zadatak 29: Rijesi logaritamsku jednadzbu:

$$\log(3x-5)-\frac{1}{2}\log(x+1)=1-\log 5$$

Rjesenje:
Kako se radi o logaritamskoj jednadzbi, slicno kao i kod iracionlanih jednadzbi, prvo moram postaviti uvjete jer sve sto se nalazi ispod logaritma mora bit pozitivno. Imajuci to na umu mora vrijediti sljedece:

| Prvi uvjet: | Drugi uvjet: |
|---|---|
| $3x-5>0$ | $x+1>0$ |
| $3x>5\ /:3$ | $x>-1$ |
| $x>\frac{5}{3}$ | |
| $x\in\left\langle\frac{5}{3},+\infty\right\rangle$ | $x\in\langle-1,+\infty\rangle$ |

Dakle kad imamo uvjete znamo da se ukupna restrikcija na $x$ gleda kao presjek restrikcija dobivenih u pojedinom slucaju, dakle kod nas konacna restrikcija na $x$ jest $x\in\left\langle\frac{5}{3},+\infty\right\rangle$.
Uocimo nadalje da se ovdje radi o logaritmu po bazi 10. Nadalje za pocetak pomnozim jedandzbu s 2 da bih se rjesio $\frac{1}{2}$ ispred drugog logaritma:

$$\log(3x-5)-\frac{1}{2}\log(x+1)=1-\log 5\ /\cdot 2$$

$$2\log(3x-5)-\log(x+1)=2-2\log 5$$

Sada znam da prema pravilu $x\cdot\log_b a=\log_b a^x$ broj isped logaritma mogu staviti unutar logaritma kao eksponent:

$$\log\left[(3x-5)^2\right]-\log(x+1)=2-\log\left(5^2\right)$$

$$\log\left[(3x-5)^2\right]-\log(x+1)=2-\log 25$$

Nadalje zapisem brojku 2 kao logaritam po bazi 10 dakle vrijedi:

$$2=\log 10^2=\log 100$$

Vratim se s tim saznanjem u nasu logaritamsku jednadzbu:

$$\log\left[(3x-5)^2\right]-\log(x+1)=\log 100-\log 25$$

Sve ovo sam radio s namjerom da iskoristim sljedece pravilo
$\log_a x-\log_a y=\log_a\frac{x}{y}$. Kao sto vidim, nista se nesmije nalaziti ispred logaritma da bih mogao primjeniti to pravilo, zato smo i pomaknuli 2 u eksponente. Napisano pravilo primjenim na nasu logaritamsku jednadzbu, tada slijedi:

$$\log\frac{(3x-5)^2}{x+1}=\log\frac{100}{25}$$

$$\log \frac{(3x-5)^2}{x+1} = \log 4$$

Prema svojstvu logaritamske funkcije $\log_a x_1 = \log_a x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ slijedi:

$$\frac{(3x-5)^2}{x+1} = 4$$

Pomnozim dobivenu jednadzbu sa $x+1$. Ovdje napominjem da treba postaviti uvjet $x+1 \neq 0$. Dakle racunajuci se vidi da mora vrijediti $x \neq -1$ jer u protivnom bi imali dijeljenje s nulom. No ako malo bolje razmislimo to je vec obuhvaceno pocetnim uvjetima. Dakle racunam:

$$\frac{(3x-5)^2}{x+1} = 4 \ / \cdot (x+1)$$

$$(3x-5)^2 = 4(x+1)$$

$$(3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 5 + 5^2 = 4x + 4$$

$$9x^2 - 30x + 25 = 4x + 4$$

$$9x^2 - 30x + 25 - 4x - 4 = 0$$

$$9x^2 - 34x + 21 = 0$$

Ovo je kvadratna funkcija koju lako rjesim koristeci se formulom $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$:

$$x_1, x_2 = \frac{34 \pm \sqrt{(-34)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 21}}{2 \cdot 9}$$

$$x_1, x_2 = \frac{34 \pm \sqrt{1156 - 756}}{18}$$

$$x_1, x_2 = \frac{34 \pm \sqrt{400}}{18}$$

$$x_1, x_2 = \frac{34 \pm 20}{18}$$

Dakle rijesenja ove kvadratne jednadzbe su:

$$x_1 = \frac{14}{18} = \frac{7}{9} \text{ i } x_2 = \frac{54}{18} = 3$$

Ovdje uocimo da prvo rjesenje ne ispunjava uvjet $x \in \left\langle \frac{5}{3}, +\infty \right\rangle$ tako da imamo samo jedno rjesenje, a to je $x = 3$.

---

Zadatak 30: Rijesi logaritamsku jednadzbu:

$$\log(3x-2) - 2 = \frac{1}{2}\log(x+2) - \log 50$$

Rjesenje:
Kako se radi o logaritamskoj jednadzbi, slicno kao i kod iracionlanih jednadzbi, prvo moram postaviti uvjete jer sve sto se nalazi ispod logaritma mora bit pozitivno. Imajuci to na umu mora vrijediti sljedece:

| Prvi uvjet: | Drugi uvjet: |
|---|---|
| $3x-2>0$ | $x+2>0$ |
| $3x>2\ /:3$ | $x>-2$ |
| $x>\frac{2}{3}$ | |
| $x\in\left\langle\frac{2}{3},+\infty\right\rangle$ | $x\in\langle-2,+\infty\rangle$ |

Dakle kad imamo uvjete znamo da se ukupna restrikcija na $x$ gleda kao presjek restrikcija dobivenih u pojedinom slucaju, dakle kod nas konacna restrikcija na $x$ jest $x\in\left\langle\frac{2}{3},+\infty\right\rangle$.
Uocimo nadalje da se ovdje radi o logaritmu po bazi 10. Nadalje za pocetak pomnozim jedandzbu s 2 da bih se rjesio $\frac{1}{2}$ ispred drugog logaritma:

$$\log(3x-2)-2=\frac{1}{2}\log(x+2)-\log 50\ /\cdot 2$$

$$2\log(3x-2)-4=\log(x+2)-2\log 50$$

Sada znam da prema pravilu $x\cdot\log_b a=\log_b a^x$ broj isped logaritma mogu staviti unutar logaritma kao eksponent:

$$\log\left[(3x-2)^2\right]-4=\log(x+2)-\log(50^2)$$

$$\log\left[(3x-2)^2\right]-4=\log(x+2)-\log 2500$$

Nadalje zapisem brojku 4 kao logaritam po bazi 10 dakle vrijedi:

$$4=\log 10^4=\log 10000$$

Vratim se s tim saznanjem u nasu logaritamsku jednadzbu:

$$\log\left[(3x-2)^2\right]-\log 10000=\log(x+2)-\log 2500$$

Iskoristim sljedece pravilo, $\log_a x-\log_a y=\log_a\frac{x}{y}$, da bih malo sredio logaritamsku jednadzbu:

$$\log\frac{(3x-2)^2}{10000}=\log\frac{x+2}{2500}$$

Prema svojstvu logaritamske funkcije $\log_a x_1=\log_a x_2\Rightarrow x_1=x_2$ slijedi:

$$\frac{(3x-2)^2}{10000}=\frac{x+2}{2500}$$

Pomnozim dobivenu jednadnadzbu s 10000 te je sredim:

$$\frac{(3x-2)^2}{10000}=\frac{x+2}{2500}\ /\cdot 10000$$

$$(3x-2)^2 = 4(x+2)$$
$$(3x)^2 - 2\cdot 3x\cdot 2 + 2^2 = 4x+8$$
$$9x^2 - 12x + 4 = 4x + 8$$
$$9x^2 - 12x + 4 - 4x - 8 = 0$$
$$9x^2 - 16x - 4 = 0$$

Ovo je kvadratna funkcija koju lako rjesim koristeci se formulom $x_1, x_2 = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$:

$$x_1, x_2 = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4\cdot 9\cdot(-4)}}{2\cdot 9}$$
$$x_1, x_2 = \frac{16 \pm \sqrt{256+144}}{18}$$
$$x_1, x_2 = \frac{16 \pm \sqrt{400}}{18}$$
$$x_1, x_2 = \frac{16 \pm 20}{18}$$

Dakle rijesenja ove kvadratne jednadzbe su:

$$x_1 = \frac{-4}{18} = \frac{-2}{9} \text{ i } x_2 = \frac{36}{18} = 2$$

Ovdje uocimo da prvo rjesenje ne ispunjava uvjet $x \in \left\langle \frac{2}{3}, +\infty \right\rangle$ tako da imamo samo jedno rjesenje, a to je $x = 2$.

---

Zadatak 31: Rijesi logaritamsku jednadzbu:

$$\frac{1}{5 - 4\log x} + \frac{4}{1 + \log x} = 3$$

Rjesenje:
Kako se radi o logaritamskoj jednadzbi, slicno kao i kod iracionlanih jednadzbi, prvo moram postaviti uvjete jer sve sto se nalazi ispod logaritma mora bit pozitivno. Imajuci to na umu mora vrijediti sljedece:

| | |
|---|---|
| Prvi uvjet: | Drugi uvjet: |
| $x > 0$ | $x > 0$ |
| $x \in \langle 0, +\infty\rangle$ | $x \in \langle 0, +\infty\rangle$ |

Dakle kad imamo uvjete znamo da se ukupna restrikcija na $x$ gleda kao presjek restrikcija dobivenih u pojedinom slucaju, dakle kod nas konacna restrikcija na $x$ jest $x \in \langle 0, +\infty\rangle$.
Promotrimo li ovu jednadzbu vidimo da su svi logaritmi koji se pojavljuju identicni, uz cinjenicu da se nepoznanica pojavljuje samo unutar logaritama.

To nam daje ideju da uvedemo supstituciju $t = \log x$, pa se jednadzba svodi na sljdeci izraz:

$$\frac{1}{5-4t} + \frac{4}{1+t} = 3$$

Pomnozim jednadzbu s $(5-4t)(1+t)$. Pritome napominjem da sve restrikcije na varijablu $t$ su vec pokrivene pocetnim uvjetima. Racunamo:

$$\frac{1}{5-4t} + \frac{4}{1+t} = 3 \ / \cdot (5-4t)(1+t)$$

$$1(1+t) + 4(5-4t) = 3(5-4t)(1+t)$$

$$1 + t + 20 - 16t = 3(5 + 5t - 4t - 4t^2)$$

$$21 - 15t = 3(5 + t - 4t^2)$$

$$21 - 15t = 15 + 3t - 12t^2$$

$$21 - 15t - 15 - 3t + 12t^2 = 0$$

$$12t^2 - 18t + 6 = 0 \ / : 6$$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

Ovo je kvadratna funkcija koju lako rjesim koristeci se formulom $t_1, t_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$:

$$t_1, t_2 = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2}$$

$$t_1, t_2 = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4}$$

$$t_1, t_2 = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{4}$$

$$t_1, t_2 = \frac{3 \pm 1}{4}$$

Dakle rijesenja ove kvadratne jednadzbe su:

$$t_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ i } t_2 = \frac{4}{4} = 1$$

Sada kada smo izracunali cemu je jednak $t$ rijesimo jednadzbe $t_1 = \log x$ i $t_2 = \log x$:

$$\log x = \frac{1}{2}$$

$$\log x = 1$$

Rjesimo prvo prvu jednadzbu:

$$\log x = \frac{1}{2}$$

Zapisem razlomak $\frac{1}{2}$ kao logaritam po bazi 10, dakle vrijedi:

$$\frac{1}{2} = \log 10^{\frac{1}{2}}$$

Vratim se s tim saznanjem u jednadzbu:

$$\log x = \log 10^{\frac{1}{2}}$$

Prema svojstvu logaritamske funkcije $\log_a x_1 = \log_a x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ slijedi:

$$x = 10^{\frac{1}{2}}$$

Zapisem potenciju kao korijen prema pravilu $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ i dobijem:

$$x = \sqrt{10}$$

Rjesimo sada drugu jednadzbu:

$$\log x = 1$$

Zapisem broj 1 kao logaritam po bazi 10, dakle vrijedi:

$$1 = \log 10^1 = \log 10$$

Vratim se s tim saznanjem u jednadzbu:

$$\log x = \log 10$$

Prema svojstvu logaritamske funkcije $\log_a x_1 = \log_a x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ slijedi:

$$x = 10$$

Ovdje uocimo da oba dva rjesenja ispunjavaju uvjet $x \in \langle 0, +\infty \rangle$ tako da imamo dva rjesenja, a to su $x_1 = \sqrt{10}$ te $x_2 = 10$.

---

Zadatak 32: Rijesi logaritamsku jednadzbu:

$$\log^2 \frac{1}{x-1} + \log(x-1) = \log 100$$

Rjesenje:
Kako se radi o logaritamskoj jednadzbi, slicno kao i kod iracionlanih jednadzbi, prvo moram postaviti uvjete jer sve sto se nalazi ispod logaritma mora bit pozitivno. Imajuci to na umu mora vrijediti sljedece:

| Prvi uvjet: | Drugi uvjet: |
|---|---|
| $\frac{1}{x-1} > 0$ | $x - 1 > 0$ |
| Zbog $1 > 0$ mora vrijediti $x - 1 > 0$ | $x > 1$ |
| $x > 1$ | |
| $x \in \langle 1, +\infty \rangle$ | $x \in \langle 1, +\infty \rangle$ |

Dakle kad imamo uvjete znamo da se ukupna restrikcija na $x$ gleda kao presjek restrikcija dobivenih u pojedinom slucaju, dakle kod nas konacna restrikcija na $x$ jest $x \in \langle 1, +\infty \rangle$.
Vratimo se sada natrag jednadzbi, zapisimo prvi logaritam u alternativnom obliku:

$$\left(\log \frac{1}{x-1}\right)^2 + \log(x-1) = \log 100$$

Nadalje prvi logaritam raspisem prema pravilu: $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$. Dakle vrijedi sljedece:

$$(\log 1 - \log(x-1))^2 + \log(x-1) = \log 100$$

Izracunajmo cemu je jednak $\log 1$ i $\log 100$ naime vrijedi:

$$\log 1 = 0$$

$$\log 100 = 2$$

Vratim se sa tim saznanjima u nasu jedanadzbu i dobijem sljedeci izraz:

$$(0 - \log(x-1))^2 + \log(x-1) = 2$$

$$(-\log(x-1))^2 + \log(x-1) = 2$$

Promotrimo li dobiven izraz vidimo da su svi logaritmi koji se pojavljuju identicni, uz cinjenicu da se nepoznanica pojavljuje samo unutar logaritama. To nam daje ideju da uvedemo supstituciju $t = \log x - 1$, pa se jednadzba svodi na sljdeci izraz:

$$(-t)^2 + t = 2$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

Ovo je kvadratna funkcija koju lako rjesim koristeci se formulom $t_1, t_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$:

$$t_1, t_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$

$$t_1, t_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$t_1, t_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2}$$
$$t_1, t_2 = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

Dakle rijesenja ove kvadratne jednadzbe su:

$$t_1 = \frac{-4}{2} = -2 \text{ i } t_2 = \frac{2}{2} = 1$$

Sada kada smo izracunali cemu je jednak $t$ rijesimo jednadzbe $t_1 = \log(x-1)$ i $t_2 = \log(x-1)$:

$$\log(x-1) = -2$$
$$\log(x-1) = 1$$

Rjesimo prvo prvu jednadzbu:

$$\log(x-1) = -2$$

Zapisem razlomak $\frac{1}{2}$ kao logaritam po bazi 10, dakle vrijedi:

$$-2 = \log 10^{-2}$$

Vratim se s tim saznanjem u jednadzbu:

$$\log(x-1) = \log 10^{-2}$$

Prema svojstvu logaritamske funkcije $\log_a x_1 = \log_a x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ slijedi:

$$x - 1 = 10^{-2}$$

Zapisem potenciju kao razlomak prema prema pravilu za potencije s negativnim eksponentom
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ i dobijem:

$$x - 1 = \frac{1}{10^2}$$
$$x - 1 = \frac{1}{100}$$
$$x = \frac{1}{100} + 1$$
$$x = \frac{101}{100}$$

Rjesimo sada drugu jednadzbu:

$$\log(x-1) = 1$$

Zapisem broj 1 kao logaritam po bazi 10, dakle vrijedi:

$$1 = \log 10^1 = \log 10$$

Vratim se s tim saznanjem u jednadzbu:

$$\log(x-1) = \log 10$$

Prema svojstvu logaritamske funkcije $\log_a x_1 = \log_a x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ slijedi:

$$x - 1 = 10$$

$$x = 10 + 1$$

$$x = 11$$

Ovdje uocimo da oba dva rjesenja ispunjavaju uvjet $x \in \langle 1, +\infty \rangle$ tako da imamo dva rjesenja, a to su $x_1 = \frac{101}{100}$ te $x_2 = 11$.

---

Zadatak 33: Rijesi logaritamsku jednadzbu:

$$\log^4\left[(x-1)^2\right] + \log^2\left[(x-1)^3\right] = 25$$

Rjesenje: