Rjesenja nekih zadataka iz poglavlja 7.4 Linearna nezavisnost vektora

Zadatak 13: (str. 25) Ako su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ nekolinerani vektori, odredi realni broj x tako da vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$:

$$\vec{a} = (x-1)\,\vec{m} + \vec{n}$$

$$\vec{b} = 3\vec{m} + (x+1)\,\vec{n}$$

budu kolinerani.

Rjesenje: Prisjetimo se da za neke kolinearne vektore $\vec{u}$ i $\vec{v}$ vrijedi kriterij kolinearnosti, odnosno postoji $k \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi:

$$\vec{u} = k \cdot \vec{v}$$

Posto vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ moraju biti kolinerani za njih mora vrijditi kriterij kolinearnosti, odnosno mora postojati $k \in \mathbb{R}$, takav da vrijedi:

$$\overbrace{\vec{a}}^{(x-1)\vec{m}+\vec{n}} = k \cdot \overbrace{\vec{b}}^{3\vec{m}+(x+1)\vec{n}}$$

$$(x-1)\,\vec{m} + \vec{n} = k\,[\cdot 3\vec{m} + (x+1)\,\vec{n}]$$

Rijesimo se zagrade na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$(x-1)\,\vec{m} + \vec{n} = 3k \cdot \vec{m} + (x+1)\,k \cdot \vec{n}$$

Da bi ova dva vektora bila jednaka, koeficijenti koji stoje uz vektore $\vec{m}$ i $\vec{n}$ moraju biti jednaki (ta cinjenica proizlazi iz cinjenice da su vektori $\vec{m}$ i $\vec{n}$ nekolinearni). Time se dobije sljedeci sustav jednadzbi:

$$\begin{cases} x - 1 = 3k \\ 1 = (x+1)\,k \end{cases}$$

Prvu jenadzbu pomnozimo s brojem $\frac{1}{3}$, a drugu jednadzbu pomnizimo s $\frac{1}{x+1}$, slijedi:

$$\begin{cases} x - 1 = 3k \;/ \cdot \dfrac{1}{3} \\ 1 = (x+1)\,k \;/ \cdot \dfrac{1}{x+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1) \cdot \dfrac{1}{3} = 3k \cdot \dfrac{1}{3} \\ 1 \cdot \dfrac{1}{x+1} = (x+1)\,k \cdot \dfrac{1}{x+1} \end{cases}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade u obje jednadzbe slijedi:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{{}^{1}\cancel{3}k}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{3}_{1}} \\ \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{x+1} = \frac{{}^{1}\cancel{(x-1)}k}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{x+1}_{1}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{k}{1} \\ \frac{1}{x+1} = \frac{k}{1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{3} = k \\ \frac{1}{x+1} = k \end{cases}$$

Izjednacimo izraze na lijevim stranama u obje jednadzbe, slijedi:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{1}{x+1}$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $3\,(x+1)$, slijedi:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{1}{x+1} \; / \cdot 3\,(x+1)$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{x-1}{{}_{1}\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}^{1}\,(x+1)}{1} = \frac{1}{{}_{1}\cancel{x+1}} \cdot \frac{3\cancel{(x+1)}^{1}}{1}$$

$$\frac{(x-1)\,(x+1)}{1} = \frac{3}{1}$$

$$(x-1)\,(x+1) = 3$$

Izraz na lijevoj strani jednakosti prepoznajemo kao razliku kvadrata te ga sredimo prema izrazu $x^2 - y^2 = (x-y)\,(x+y)$, slijedi:

$$(x-1)\,(x+1) = 3$$

$$x^2 - 1^2 = 3$$

$$x^2 - 1 = 3$$

Prebacimo broj 1 s lijeve na desnu stranu jednakosti, slijedi:

$$x^2 = 4$$

Korijenujemo dobivenu jednakost, slijedi:

$$x^2 = 4 \; / \sqrt{}$$

$$x_{1,2} = \pm 2$$

Dakle za $x_1 = -2$ i $x_2 = 2$ vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ biti ce kolinearni. Time je zadatak rijesen.

☙ ✧ ❧

✽ Zadatak 16: (str. 25) Dana su tri vektora, $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, od kojih niti jedan nije nul-vektor i nikoja dva nisu kolinearna. Ako je $\vec{a}+\vec{b}$ kolinearan s $\vec{c}$, a $\vec{b}+\vec{c}$ kolinearan s $\vec{a}$, koliko je $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$?

Rjesenje: Prisjetimo se da za neke kolinearne vektore $\vec{u}$ i $\vec{v}$ vrijedi kriterij kolinearnosti, odnosno postoji $k \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi:

$$\vec{u} = k \cdot \vec{v}$$

Posto vektori $\vec{a}+\vec{b}$ i $\vec{c}$ te s druge strane vektori $\vec{b}+\vec{c}$ i $\vec{a}$ moraju biti kolinerani za njih mora vrijediti kriterij kolinearnosti, odnosno moraju postojati k i $l \in \mathbb{R}$, takavi da vrijedi:

$$\vec{a}+\vec{b} = k \cdot \vec{c}$$

$$\vec{b}+\vec{c} = l \cdot \vec{a}$$

Racunamo:

$$\underbrace{\vec{a}+\vec{b}}_{k\cdot\vec{c}}+\vec{c} = k \cdot \vec{c} + \vec{c} = (\star)$$

Izlucimo $\vec{c}$, slijedi:

$$(\star) = (k+1)\,\vec{c}$$

Dakle vrijedi $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = (k+1)\,\vec{c}$. S druge strane racunamo:

$$\vec{a}+\underbrace{\vec{b}+\vec{c}}_{l\cdot\vec{a}} = \vec{a} + l \cdot \vec{a} = (\star\star)$$

Izlucimo $\vec{a}$, slijedi:

$$(\star\star) = (1+l)\,\vec{a}$$

Dakle takodjer vrijedi $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = (1+l)\,\vec{a}$. Time dobijemo sustav:

$$\begin{cases} \vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = (k+1)\,\vec{c} \\ \vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = (1+l)\,\vec{a} \end{cases}$$

Izjednacimo izraze na desnim stranama obje jednakosti, slijedi:

$$(k+1)\,\vec{c} = (1+l)\,\vec{a}$$

Prebacimo izraz na desnoj stani jednakosti na lijevu stranu, slijedi:

$$(k+1)\,\vec{c} - (1+l)\,\vec{a} = 0$$

Prisjetimo se da za nekolinearne vektore $\vec{u}$ i $\vec{v}$ vrijedi da jednakost $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=0$ vrijedi ako i samo ako $\alpha=0$ i $\beta=0$. Kako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{c}$ nekolinerani iz jednakosti koju smo dobili mora vrijediti:

$$k+1=0$$

$$-(1+l)=0$$

Dovoljno je samo odrediti koliko iznosi k, no to je sasvim ocito, odnosno mora vrijediti:

$$k+1=0 \quad \Rightarrow \quad k=-1$$

Vratimo se na cinjenicu da vrijedi:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(k+1)\,\vec{c}$$

Primjenimo cinjenicu da vrijedi $k=-1$, slijedi:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\underbrace{k}_{-1}+1)\vec{c}$$

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(-1+1)\,\vec{c}$$

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0\cdot\vec{c}$$

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$$

Dakle zbroj danih vektora jest 0. Time je zadatak rijesen.