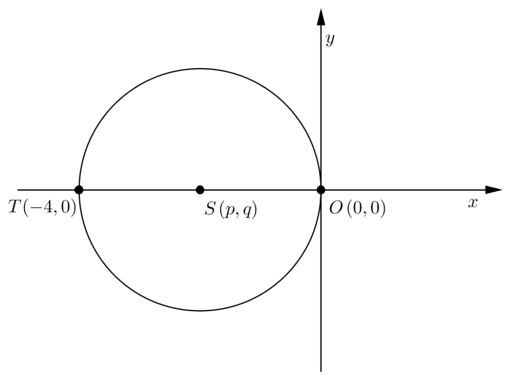
9.1 Jednadzba kruznice

Zadatak 11: (str. 78) Kruznica dira os ordinata u ishodistu i prolazi tockom $T(-4,0)$. Kako glasi jenadzba te kruznice?

Rjesenje: Prije samog racuna probajmo sa skice zakljuciti sto zapravo trebamo racunati:



Opcenito kruznica ima jednadzbu $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$, pri cemu je r radijus kruznice, a p i q su koordinate sredista $S(p,q)$. Dakle da bismo odredili jednadzbu kruznice moramo odrediti njen radijus i koordinate njezinog sredista.

Promatrajuci sliku mozemo doci do zakljucka da je dijametar kruznice ciju jednadzbu trazimo upavo jednak udaljenosti izmedju tocaka T i ishodista. Nadalje takodjer mozemo zakljuciti da se srediste trazene kruznice nalazi tocno na polovistu duzine $\overline{TO}$. Sto zapravo znaci da moramo odrediti udaljenost izmedju tockle T i ishodista te poloviste duzine $\overline{TO}$.

Usredostocimo se prvo na odredjivanje udaljenosti izmedju tocke T i ishodista. Prisjetimo se da udaljenost izmedju tocaka $T_1(x_1,y_1)$ i $T_2(x_2,y_2)$ racunamo prema izrazu $|T_1T_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. Racunam:

$$\left.\begin{array}{l} T(\overbrace{-4}^{x_T},\overbrace{0}^{y_T}) \\ O(\overbrace{0}^{x_O},\overbrace{0}^{y_O}) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad |TO|=\sqrt{(x_O-x_T)^2+(y_O-y_T)^2}$$

$$|TO|=\sqrt{(0-(-4))^2+(0-0)^2}$$

$$|TO|=\sqrt{(0+4)^2+0^2}$$

$$|TO|=\sqrt{4^2+0}$$

$$|TO|=\sqrt{4^2}$$

$$|TO| = 4 \text{ jedinicne duzine}$$

Dakle dijametar trazene kruznice jest 4 jedinicne duzine, sto znaci da je njen radiju dvostruko manji, dakle vrijedi $r = 2$ jednicne duzine. Preostaje jos odrediti koordinate sredista trazene kruznice.

Prisjetimo se da poloviste P duzine cije su krajnje tocke $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$ racuna prema izrazu $P(x_P, y_P) = P\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$. Racunam:

$$\left.\begin{array}{l} T(\overbrace{-4}^{x_T}, \overbrace{0}^{y_T}) \\ O(\overbrace{0}^{x_O}, \overbrace{0}^{y_O}) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad P(x_P, y_P) = P\left(\frac{x_T + x_O}{2}, \frac{y_T + y_O}{2}\right)$$

$$x_P = \frac{\overbrace{x_T}^{-4} + \overbrace{x_O}^{0}}{2} \quad \text{i} \quad y_P = \frac{\overbrace{y_T}^{0} + \overbrace{y_O}^{0}}{2}$$

$$x_P = \frac{-4 + 0}{2} \quad \text{i} \quad y_P = \frac{0 + 0}{2}$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$x_P = \frac{{}^{-2}\cancel{-4}}{\cancel{2}_1} \quad \text{i} \quad y_P = \frac{0}{2}$$

$$x_P = -2 \quad \text{i} \quad y_P = 0$$

Dakle srediste trazene kruznice ima koordinate $S(-2, 0)$. Preostaje jos samo napisati jednadzbu kruznice opisane uvjetima zadatka, racunam:

$$\left.\begin{array}{l} S(\overbrace{-2}^{p}, \overbrace{0}^{q}) \\ r = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

$$(x - \overbrace{p}^{-2})^2 + (y - \overbrace{q}^{0})^2 = \overbrace{r}^{2}{}^2$$

$$(x - (-2))^2 + (y - 0)^2 = 2^2$$

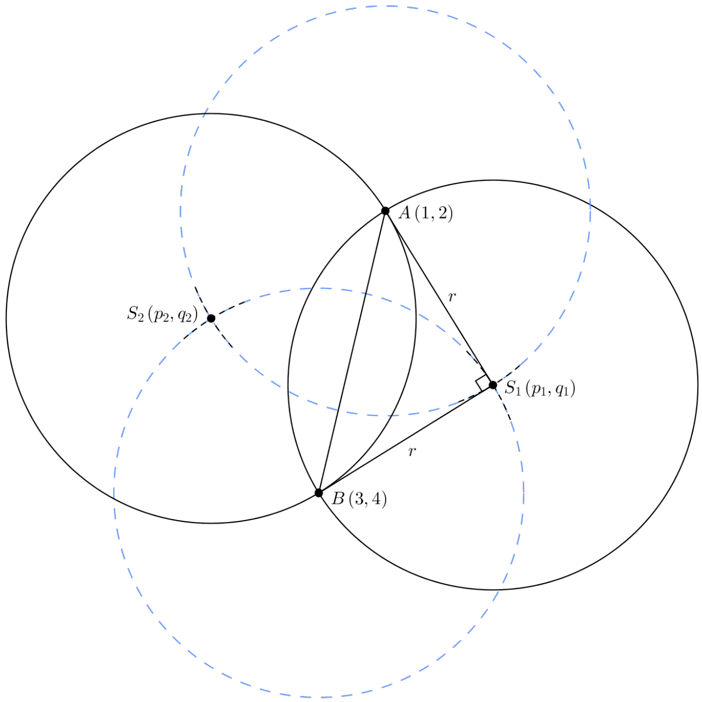
$$(x + 2)^2 + y^2 = 4$$

Dakle jednadzba trazene kruznice jest $(x + 2)^2 + y^2 = 4$ i time je zadatak rijesen.

⋆

Zadatak 15: (str. 78) Tocke $A(1, 2)$ i $B(3, 4)$ krajnje su tocke tetive kruznice. Toj tetivi pripada sredisnji kut od $90°$. Kako glasi jednadzba kruznice?

Rjesenje: Prije samog racuna probajmo sa skice zakljuciti sto zapravo trebamo racunati:



Dakle ideja je sljedeca, promotrimo li sliku uvidjamo da je trokut ΔABS_1 jednakostranican pravokutan sto znaci da mogu odrediti radijus kruznice koristeci pitagorin poucak. Tada preostaje samo odrediti srediste kruzince definirane uvjetima zadataka, ideja je da sredista pronadjem kao sjeciste kruznica cija su sredista tocke A i B, a radijusi su im jednaki radijusu trazene kruznice.

Odredimo prvo radijus kruznice. Da bismo to napravili moramo prvo odrediti duljinu tetive $\overline{AB}$ trazene kruznice. Prisjetimo se izraza za racunanje udaljenosti izmedju dviju tocaka $T_1\,(x_1,y_1)$, $T_2\,(x_2,y_2)$ koji je jednak $|T_1,T_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. Racunam:

$$\left.\begin{array}{l} A(\overbrace{1}^{x_A},\overbrace{2}^{y_A}) \\ B(\overbrace{3}^{x_B},\overbrace{4}^{y_B}) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(3-1)^2+(4-2)^2}$$

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{2^2+2^2}$$

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{4+4}$$

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{8}$$

$$\left|\overline{AB}\right| = 2\sqrt{2} \text{ jedinicnih duzina}$$

Kako je trokut ΔABC sa slike pravokutan za njega vrijedi pitgorin poucak, odnosno:

$$r^2 + r^2 = \left|\overline{AB}\right|^2$$

$$2r^2 = |\underbrace{\overline{AB}}_{2\sqrt{2}}|^2$$

$$2r^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$$

$$2r^2 = 2^2\left(\sqrt{2}\right)^2$$

$$2r^2 = 4 \cdot 2 = 8$$

Pomnozim izraz s $\frac{1}{2}$, slijedi:

$$2r^2 = 8 \ / \cdot \frac{1}{2}$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$\frac{{}^{1}\cancel{2}r^2}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1} = \frac{{}^{4}\cancel{8}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1}$$

$$r^2 = 4 \ /\sqrt{\ }$$

$$r = 2 \text{ jedinicnih duljina}$$

Sljedeci korak je napisati jednadzbe kruznica cija su sredista tocka A odnosno tocka B, a radijusi su im jednaki 2 jedinicne duzine.

$$\left.\begin{array}{l} A(\overbrace{1}^{p}, \overbrace{2}^{q}) \\ r = 2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$$

$$(x - \overbrace{p}^{1})^2 + (y - \overbrace{q}^{2})^2 = \overbrace{r}^{2}{}^2$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 2^2$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

Kruznica sa sredistem u tocki A radijusa 2 jedinicne duzine ima jednadzbu $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$. Nadalje odredimo jednadzbu kruznice cije je srediste tocka B, a radijus takodjer 2 jedinicne duzine, racunam:

$$\left.\begin{array}{l} B(\overbrace{3}^{p}, \overbrace{4}^{q}) \\ r = 2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$$

$$(x-\overbrace{p}^{3})^2+(y-\overbrace{q}^{4})^2=\overbrace{r}^{2}{}^2$$

$$(x-3)^2+(y-4)^2=2^2$$

$$(x-3)^2+(y-4)^2=4$$

Kruznica sa sredistem u tocki B radijusa 2 jedinicne duzine ima jednadzbu $(x-3)^2+(y-4)^2=4$. Da bih dobio sredista kruznica koje zadovoljavaju uvjete zadatka moram pronaci sjecista kruznice cije sam jednadzbe upravo odredio, drugim rijecima moram rijesiti sustav jednadzbi sastavljen od njihovih jednadzbi:

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=4\\(x-3)^2+(y-4)^2=4\end{cases}$$

Da bismo rijesili ovaj sustav jednadzbi prvo raspisemo lijeve strane obiju jednadzbi prema identitetu za kvadrat razlike ($(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$), slijedi:

$$\begin{cases}x^2-2\cdot x\cdot 1+1^2+y^2-2\cdot y\cdot 2+2^2=4\\x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2+y^2-2\cdot y\cdot 4+4^2=4\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2-2x+1+y^2-4y+4=4\\x^2-6x+9+y^2-8y+16=4\end{cases}$$

Oduzmem dobivene jednadzbe, slijedi:

$$x^2-2x+1+y^2-4y+4-\left(x^2-6x+9+y^2-8y+16\right)=4-4$$

$$\cancel{x^2}-2x+1+\cancel{y^2}-4y+4\cancel{-x^2}+6x-9\cancel{-y^2}+8y-16=0$$

$$4x+4y-20=0$$

$$4x=20-4y$$

Pomnozim cijelu jednadzbu s $\frac{1}{4}$, slijedi:

$$4x=20-4y\ /\cdot\frac{1}{4}$$

$$\frac{{}^{1}\cancel{4}x}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{4}_1}=\frac{{}^{1}\cancel{4}y}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{4}_1}-\frac{{}^{5}\cancel{20}}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{4}_1}$$

$$x=5-y$$

Uvrstim dobiveni izraz u prvo jednadzbu (mozemo i u drugu ali prva ima brojeve manje velicne), slijedi:

$$(\overbrace{x}^{5-y}-1)^2+(y-2)^2=4$$

$$(5-y-1)^2+(y-2)^2=4$$

$$(4-y)^2+(y-2)^2=4$$

Raspisemo lijevu stranu jednadzbe prema identitetu za kvadrat razlike $((a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2)$, slijedi:

$$4^2 - 2 \cdot 4 \cdot y + y^2 + y^2 - 2 \cdot y \cdot 2 + 2^2 = 4$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$16 - 8y + y^2 + y^2 - 4y + \cancel{4} = \cancel{4}$$

$$2y^2 - 12y + 16 = 0$$

Pomnozimo cijelu jednadzbu s $\frac{1}{2}$, slijedi:

$$2y^2 - 12y + 16 = 0 \; / \cdot \frac{1}{2}$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$\frac{{}^{1}\cancel{2}y^2}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1} - \frac{{}^{6}\cancel{12}y}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1} + \frac{{}^{8}\cancel{16}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1} = 0$$

$$y^2 - 6y + 8 = 0$$

Rijesimo kvadratnu jednadzbu prema izrazu za rjesenja kvadratne jednadzbe:

$$y_1, y_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y_1, y_2 = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1}$$

$$y_1, y_2 = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2}$$

$$y_1, y_2 = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$y_1, y_2 = \frac{6 \pm 2}{2}$$

Dakle rjesenja su oblika:

$$y_1 = \frac{6-2}{2} = \frac{{}^{2}\cancel{4}}{\cancel{2}_1} \quad \text{i} \quad y_2 = \frac{6+2}{2} = \frac{{}^{4}\cancel{8}}{\cancel{2}_1}$$

$$y_1 = 2 \quad \text{i} \quad y_2 = 4$$

Kako vrijedi $x = 5 - y$ tada dalje slijedi:

$$x_1 = 5 - \overbrace{y_1}^{2} \quad \text{i} \quad x_2 = 5 - \overbrace{y_2}^{4}$$

$$x_1 = 5 - 2 \quad \text{i} \quad x_2 = 5 - 4$$

$$x_1 = 3 \quad \text{i} \quad x_2 = 1$$

Dakle dobili smo sredista kruznica koje zadovoljavaju uvjete zadataka $S_1\,(3,2)$ i $S_2\,(1,4)$. Preostaje jos samo odrediti njihove jednadzbe ako imamo na umu da im radijusi moraju biti jednaki 2 jedinicne duljine.

Prvo odredjujem jednadzbu kruznice cije je srediste tocka $S_1\,(3,2)$, dok joj je radijus jednak 2 jedinicne duzine, racunam:

$$\left.\begin{array}{l} S_1(\overbrace{\ 3\ }^{p}, \overbrace{\ 2\ }^{q}) \\ r = 2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$$

$$(x - \overbrace{\ p\ }^{3})^2 + (y - \overbrace{\ q\ }^{2})^2 = \overbrace{\ r\ }^{2}{}^2$$
$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 2^2$$
$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$$

Jedno rjesenje jest kruznica cija je jednadzba jednaka $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$. Nadalje odredjujem jednadzbu kruznice cije je srediste tocka $S_2\,(1,4)$, dok joj je radijus jednak 2 jedinicne duzine, racunam:

$$\left.\begin{array}{l} S_2(\overbrace{\ 1\ }^{p}, \overbrace{\ 4\ }^{q}) \\ r = 2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$$

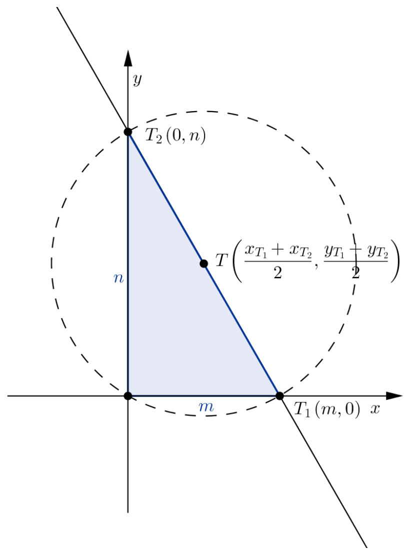
$$(x - \overbrace{\ p\ }^{1})^2 + (y - \overbrace{\ q\ }^{4})^2 = \overbrace{\ r\ }^{2}{}^2$$
$$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 2^2$$
$$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 4$$

Time smo odredili i jednadzbu druge kruznice koja je jednaka $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 4$. Dakle postoje dvije kruznice koje zadovojavaju uvjete zadatka i njihove jednadzbe su jednake $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$ i $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 4$. Time je zadatak rijesen.

⋆

Zadatak 18: (str. 78) Napisi jednadzbu kruznice opisane trokutu sto ga s koordinatnim osima zatvara pravac $2x + 3y + 12 = 0$.

Rjesenje: Prije samog racuna probajmo sa skice zakljuciti sto zapravo trebamo racunati. Bez smanjenja opcenitosti mozemo zakljuciti da graf danog pravca sijece obje osi na pozitivnom dijelu:



Prije svega primjetiom da je plavo bojan trokut pravokutan, nadalje prisjetimo se da zbog euklidovog poucka srediste kruznice opisane pravokutnom trokutu mora biti u polovistu hipotenuze (kut nad dijametrom kruznice je uvijek pravi). Imajuci to na umu zakljucujemo da je zapravo potrebno odrediti duljinu duzine $\overline{T_1T_2}$ koja predstavlj dijametar te dakako poloviste te iste duzine koje predstavlja srediste trazene kruznice.

Odredimo prvo duljinu duzine $\overline{T_1T_2}$. No da bismo to mogli napraviti prvo moramo danu jednadzbu pravca pretvoriti u segmentni oblik kako bi lako mogli procitati kolike odsjecke dani pravac odsjeca na kkordinatnim osima, a samim time i koordinate tocaka T_1, T_2. Prisjetim se da ako je jednadzba pravca u segmnetnom obliku jednaka $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$, tada pravac sijece koordinatne osi u tockama s koordinatama $T_1\,(m,0)$ i $T_2\,(0.n)$. Racunam:

$$2x+3y+12=0$$

Prebacim 12 na desnu stranu te pomnozim cijelu jednadzbu s $\frac{1}{-12}$, slijedi:

$$2x+3y=-12\;/\cdot\frac{1}{-12}$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$\frac{{}^{1}\cancel{2}x}{1}\,\frac{1}{\cancel{-12}_{-6}}+\frac{{}^{1}\cancel{3}y}{1}\,\frac{1}{\cancel{-12}_{-4}}=\frac{{}^{1}\cancel{-12}}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{-12}}$$

$$\underbrace{\frac{x}{-6}}_{m}+\underbrace{\frac{y}{-4}}_{n}=1$$

Zakljucujemo da su koordinate trazenih tocka jednake $T_1\left(-6,0\right)$ i $T_2\left(0.-4\right)$. Prisjetimo se da udaljenost izmedju tocaka $T_1\left(x_1,y_1\right)$ i $T_2\left(x_2,y_2\right)$ racunamo prema izrazu $|T_1T_2|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$. Racunam:

$$\left.\begin{array}{l} T_1(\overbrace{-6}^{x_{T_2}},\overbrace{0}^{y_{T_1}}) \\ T_2(\overbrace{0}^{x_{T_2}},\overbrace{-4}^{y_{T_1}}) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad |T_1T_2|=\sqrt{\left(x_{T_2}-x_{T_1}\right)^2+\left(y_{T_2}-y_{T_1}\right)^2}$$

$$|T_1T_2|=\sqrt{\left(0-(-6)\right)^2+\left(-4-0\right)^2}$$

$$|T_1T_2|=\sqrt{\left(0+6\right)^2+\left(-4\right)^2}$$

$$|T_1T_2|=\sqrt{6^2+4^2}$$

$$|T_1T_2|=\sqrt{36+16}$$

$$|T_1T_2|=\sqrt{52}$$

$$|T_1T_2|=2\sqrt{13}\text{ jedinicnih duzina}$$

Dakle dijametar trazene kruznice jest $2\sqrt{13}$ jedinicnih duzina, sto znaci da je njen radiju dvostruko manji, dakle vrijedi $r=\sqrt{13}$ jednicnih duzina. Preostaje jos odrediti koordinate sredista trazene kruznice. Prisjetimo se da smo rekli da je srediste trazene kruznice zapravo poloviste duzine $\overline{T_1T_2}$. To cemo uciniti prema izrazu za odredjivanje polovista duzine $\overline{T_1T_2}$ kojoj su poznate koordinate krajnjih tocka $T_1\left(x_1,y_1\right)$ i $T_2\left(x_2,y_2\right)$ oblika $P\left(x_P,y_P\right)=P\left(\frac{x_{T_1}+x_{T_2}}{2},\frac{y_{T_1}+y_{T_2}}{2}\right)$, racunam:

$$\left.\begin{array}{l} T_1(\overbrace{-6}^{x_{T_1}},\overbrace{0}^{y_{T_1}}) \\ T_2(\overbrace{0}^{x_{T_2}},\overbrace{-4}^{y_{T_2}}) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \left(P\left(x_P,y_P\right)=P\left(\frac{x_{T_1}+x_{T_2}}{2},\frac{y_{T_1}+y_{T_2}}{2}\right)\right.$$

$$x_P=\frac{\overbrace{x_{T_1}}^{-6}+\overbrace{x_{T_2}}^{0}}{2}\quad\text{i}\quad y_P=\frac{\overbrace{y_{T_1}}^{0}+\overbrace{y_{T_2}}^{-4}}{2}$$

$$x_P=\frac{-6+0}{2}\quad\text{i}\quad y_P=\frac{0+(-4)}{2}$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$x_P=\frac{\overset{-3}{\cancel{-6}}}{\cancel{2}_1}\quad\text{i}\quad y_P=\frac{\overset{-2}{\cancel{-4}}}{\cancel{2}_1}$$

$$x_P=-3\quad\text{i}\quad y_P=-2$$

Dakle koordinate tocke P su $P\left(-3,-2\right)$. Preostaje jos samo odrediti jednadzbu kruznice cije je srediste tocka $P\left(-3,-2\right)$, dok joj je radijus jednak $\sqrt{13}$ jedinicnih duzina, racunam:

$$\left.\begin{array}{l} P(\overbrace{3}^{p},\overbrace{2}^{q}) \\ r=\sqrt{13} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left(x-p\right)^2+\left(y-q\right)^2=r^2$$

$$(x-\overbrace{p}^{-3})^2+(y-\overbrace{q}^{-2})^2=\overbrace{r}^{\sqrt{13}}{}^2$$

$$\left(x-\left(-3\right)\right)^2+\left(y-\left(-2\right)\right)^2=\left(\sqrt{13}\right)^2$$

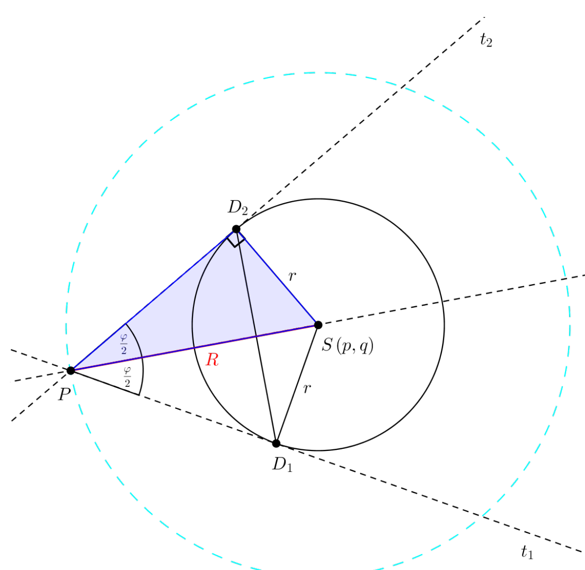
$$\left(x+3\right)^2+\left(y+2\right)^2=13$$

Dakle jedndazba kruznice odredjenje uvjetima zadatka jest $\left(x+3\right)^2+\left(y+2\right)^2=13$ i time je problem rijesen.

$\star$

Zadatak 23: (str. 79) Odredi skup tocaka ravnine iz kojih se kruznica $x^2+\left(y-3\right)^2=9$ vidi pod kutom od $60°$.

Rjesenje: Dakle ovaj zadatak se zapravo svodi na zadatke iz prethodnog razreda kada je trebalo odrediti pod kojim kutem se vidi kruznica iz neke tocke izvan kruznice. Prije samog rjesavanja zadatka promotrimo sljedecu skicu:



Neka je tocka P tocka s koje se kruznica vidi pod $60°$. Razmislim li malo takvih tocaka ima beskonacno mnogo i sve one leze na istoj udaljenost od sredista S dane kruznice (zapravo leze na svijetlo plavo obojanoj kruznici na skici). Dakle moj zadatak kad ga malo pogledam zapravo zahtijeva odredjivaje koncentricne kruznice danoj kruznici, dakle pocetna kruznica i kruznica koju trazim imaju ista sredista.

Nadalje daljnjim promatranjem zakljucujem da je kut pod kojim se vidi kruznica iz neke tocke P zapravo kut izmedju tangenti iz te tocke na kruznicu. Te tangente dodiruju kruznicu, svaka u jednoj tocki, neka su to tocke D_1 i D_2. Tockama P , D_1, S i D_2 odredjen je cetverkout kojeg pravac (PS) dijeli na dva sukladna pravokutna trokuta ΔPD_1S i ΔPD_2S (oni su sukladni jer imaju jednu zajednicku stranicu (hipotenuzu), oba trokuta imaju kao jednu strancu radijus r zadane kruznice, te su oba pravokutna jer radijus s tangentom uvijek zatvara pravi kut).

Iz gornjeg pravokutnog trokuta ΔPD_2S upotrebom trigonometrije pravokutnog trokuta mozemo doci do velicine njegove hipotenuze odnosno do duljine radijusa R koncentricne kruznice. Uocim da je kut $\frac{\varphi}{2}$ tog trokuta jednak:

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{{}^{30°}\cancel{60°}}{\cancel{2}_1} = 30°$$

Dakle vrijedi da je $\frac{\varphi}{2} = 30°$. Nadalje duljinu katete r iscitamo iz jednadzbe kruznice $x^2 + (y-3)^2 = 9$. Naime promatrajuci opcenitu jednadzbu kruznice $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ dolazimo do zakljucka da mora vrijediti:

$$r^2 = 9$$

Kad se to korijenuje dobijemo:

$$r^2 = 9 \;/\sqrt{\;}$$

$$r = 3 \text{ jedinicne duzine}$$

I naposlijetku poromatrajuci trokut ΔPD_2S uocavamo da mora vrijediti:

$$\sin \overbrace{\frac{\varphi}{2}}^{30°} = \overbrace{\frac{r}{R}}^{3}$$

$$\sin 30° = \frac{3}{R}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{R}$$

Pomnozim cijelu jednadzbu s $2R$, slijedi:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{R} \;/\cdot 2R$$

Pokratim sto se pokratiti dade:

$$\frac{1}{{}_1\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}^1 R}{1} = \frac{3}{{}_1\cancel{R}} \cdot \frac{2\cancel{R}^1}{1}$$

$$R = 6 \text{ jedinicnih duljina}$$

Dakle nakons sto smo doredili radijus svjetlo plavo obojane kruznice sa skice potrebno je jos samo odrediti njenu jednadzbu no znamo da joj je srediste jednako sredistu pocetne kruznice sto znaci da ce i lijeve strane jednadzbi biti identicne posto lijeva strana jednadzbe kruznice ovisi iskljucivo o njenom sredistu, racunam:

$$x^2 + (y-3)^2 = \overbrace{R}^{6}{}^2$$

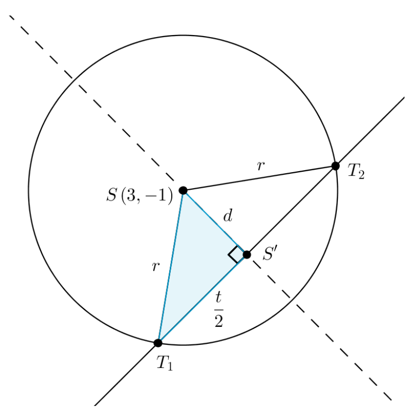
$$x^2 + (y-3)^2 = 36$$

Dakle skup tocaka iz kojeg se dana kruznica vidi pod kutem od 60° jest kruznica cija je jednadzba jednaka $x^2 + (y-3)^2 = 36$ i time je zadatak rijesen.

⋆

Zadatak 28: (str. 79) Srediste kruznice je tocka $S(3, -1)$. Kruznica na pravcu $y = 3x + 10$ odsijeca tetivu duljine 6 jedinicnih duljina. Koliki je polumjer kruznice?

Rjesenje: Prije samog rjesavanja zadatka promotrimo sljedecu skicu:



Dakle ono sto smo napravili jest polozili smo okomicu korz tocku S, na pravac dan u zadatku. Srediste kruznice S, sjeciste okomice i pravca S' i sjecista pravca T_1 i T_2 s kruznicom, definiraju dva pravokutna trokuta $\Delta T_1 S' S$ i $\Delta S' T_2 S$ (zajednicka kateta d koja predstavlja udaljenost tocke S od pravca danog u zadatku, hipotenuze istih duljina (radijus r) kruznice) te pravi kut).

Kako su trokuti sukladni znamo da je duljina duzine $\overline{T_1S'}$ jednaka polovici odsjecka sto ga kruznica odsjeca na pravcu, dakle vrijedi:

$$\left|\overline{T_1S'}\right| = \frac{|\overbrace{\overline{T_1T_2}}^{6}|}{2}$$

$$\left|\overline{T_1S'}\right| = \frac{{}^{3}\cancel{6}}{\cancel{2}_1}$$

$$\left|\overline{T_1S'}\right| = 3 \text{ jedinicne duzine}$$

Iz plavo obojanog trokuta, $\Delta T_1S'S$, slijedi da cemo radijus kruzince r odrediti upotrebom pitagorinog poucka jer mora vrijediti $r^2 = \left|\overline{T_1S'}\right|^2 + \left|\overline{SS'}\right|^2$. Dakle preostaje jos odrediti duljinu duzine $\overline{SS'}$ sto je zapravo udaljenost tocke S do pravca danog u zadatku.

Prisjetim se da udaljenost tocke $T(x_0, y_0)$ od pravca p ... $Ax + By + C = 0$ racuna se prema izrazu $d(T,p) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Prije sto krenem racunati moramo pretvoriti jednadzbu pravca danog u zadataku, oznacimo ga s p, iz eksplicitnog u implicitni oblik, racunam:

$$y = 3x + 10$$

$$p \text{ ... } 3x - y + 10 = 0$$

Nadalje racunam udaljenost tocke S od pravca p, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} \overbrace{3}^{A}x\overbrace{-1}^{B}y\overbrace{+10}^{C} = 0 \\ S(\overbrace{3}^{x_S}, \overbrace{-1}^{y_S}) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left|\overline{SS'}\right| = d(S,p) = \frac{|Ax_S + By_S + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\left|\overline{SS'}\right| = \frac{|3 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) + 10|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}}$$

$$\left|\overline{SS'}\right| = \frac{|9 + 1 + 10|}{\sqrt{9 + 1}}$$

$$\left|\overline{SS'}\right| = \frac{|20|}{\sqrt{10}}$$

Racinaliziram dobiveni izraz mnozenjem brojnika i nazivnika s $\sqrt{10}$, slijedi:

$$\left|\overline{SS'}\right| = \frac{20}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}$$

$$\left|\overline{SS'}\right| = \frac{20\sqrt{10}}{\left(\sqrt{10}\right)^2}$$

Pokratim sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\left|\overline{SS'}\right| = \frac{{}^{2}\cancel{20}\sqrt{10}}{\cancel{10}_{1}}$$

$$\left|\overline{SS'}\right| = 2\sqrt{10} \text{ jedinicnih duzina}$$

Dakle preostaje dobivene velicine vratiti u izraz dobiven upotrebom pitagorinog poucka $r^2 = \left|\overline{T_1S'}\right|^2 + \left|\overline{SS'}\right|^2$. Racunam:

$$r^2 = \overbrace{\left|\overline{T_1S'}\right|}^{3}{}^2 + \overbrace{\left|\overline{SS'}\right|}^{2\sqrt{10}}{}^2$$

$$r^2 = 3^2 + \left(2\sqrt{10}\right)^2$$

$$r^2 = 9 + 2^2\left(\sqrt{10}\right)^2$$

$$r^2 = 9 + 4 \cdot 10 = 9 + 40$$

Korijenujemo dobiveni izraz, slijedi:

$$r^2 = 49 \; /\sqrt{}$$

$$r = 7 \text{ jedinicnih duzina}$$

Dakle odredili smo radijus kruznice koja zadovoljava uvjete zadataka, $r = 7$ jedinicnih duljina i time je zadatak rijesen.

⋆

Zadatak 33: (str. 79) Napisi jednadzbu kruznice kojoj srediste lezi na pravcu $x + 3y - 18 = 0$, kojoj je polumjer jednak 5 jedinicnih duzina i koja prolazi tockom $A\,(6, 9)$.

Rjesenje: Promotrimo li skicu mozemo uociti da ono sto zapravo trazimo su tocke S_1 i S_2 koje se nalaze na pravcu p, a od tocke A su udaljene upravo za 5 jedinicnih duzina sto je upravo radijus trazene kruznice.

Ali zadatak cemo rijesiti malo drugacije, prvo cemo odrediti jednadzbu kruznice kojoj je srediste tocka A, a radijus jednak 5 jednicnih duzina, a onda pogledati u kojim tockama ta kruznica sijece pravac p dan u zadatku.

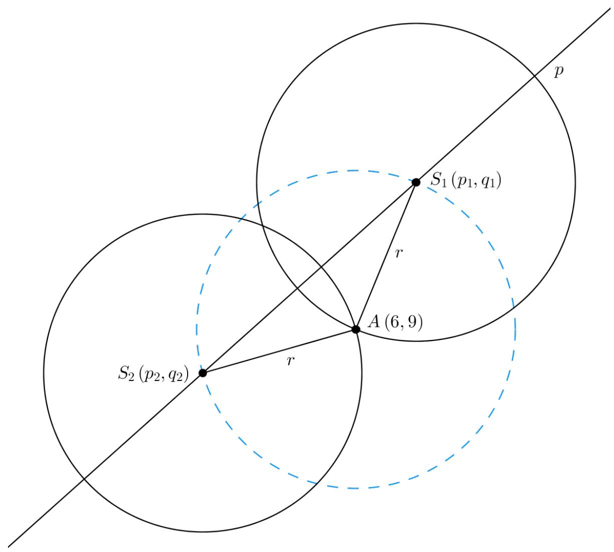
Dakle odredimo prvo jednadzbu kruznice kojoj je srediste tocka A, a radijus joj je jednak 5 jedinicnih duzina, racunam:

$$\left.\begin{array}{l} A(\overbrace{6}^{p}, \overbrace{9}^{q}) \\ r = 5 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$$

$$(x - \overbrace{p}^{6})^2 + (y - \overbrace{q}^{9})^2 = \overbrace{r}^{5}{}^2$$

$$(x-6)^2 + (y-9)^2 = 5^2$$

$$(x-6)^2 + (y-9)^2 = 25$$



Dakle ono sto smo dobili jest jednadzba plavo obojane kruznice sa skice koje je jednaka $(x-6)^2+(y-9)^2 = 25$. Nadaljde odredjujemo tocke presjeka pravca p i kruznice ciju smo jednadzbu odredili malo prije. U tu svrhu rijesavam sljedeci sustav jednadzbu:

$$\begin{cases} (x-6)^2 + (y-9)^2 = 25 \\ x + 3y - 18 = 0 \end{cases}$$

Iz druge jednadzbe vidim da vrijedi:

$$x + 3y - 18 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 18 - 3y$$

Taj izraz uvrstimo u prvu jednadzbu, slijedi:

$$(\overbrace{x}^{18-3y} - 6)^2 + (y-9)^2 = 25$$

$$(18 - 3y - 6)^2 + (y-9)^2 = 25$$

$$(12 - 3y)^2 + (y-9)^2 = 25$$

Rapisem lijevu stranu jednadzbe po indentitetu za kvadrat razlike $((a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, slijedi:

$$12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 3y + (3y)^2 + y^2 - 2 \cdot y \cdot 9 + 9^2 = 25$$

$$144 - 72y + 9y^2 + y^2 - 18y + 81 = 25$$
$$10y^2 - 90y^2 + 200 = 0$$

Pomnozim cijelu jednadzbu s $\frac{1}{10}$, slijedi:

$$10y^2 - 90y + 200 = 0 \;/\cdot \frac{1}{10}$$
$$\frac{{}^{1}\cancel{10}y^2}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{10}_1} - \frac{{}^{9}\cancel{90}y}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{10}_1} + \frac{{}^{20}\cancel{200}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{10}_1} = 0$$
$$y^2 - 9y + 20 = 0$$

Rijesimo kvadratnu jednadzbu prema izrazu za rjesenja kvadratne jednadzbe:

$$y_1, y_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$y_1, y_2 = \frac{-\left(-9\right) \pm \sqrt{\left(-9\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20}}{2 \cdot 1}$$
$$y_1, y_2 = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 80}}{2}$$
$$y_1, y_2 = \frac{9 \pm \sqrt{1}}{2}$$
$$y_1, y_2 = \frac{9 \pm 1}{2}$$

Dakle rjesenja su oblika:

$$y_1 = \frac{9-1}{2} = \frac{{}^{4}\cancel{8}}{\cancel{2}_1} \quad \text{i} \quad y_2 = \frac{9+1}{2} = \frac{{}^{5}\cancel{10}}{\cancel{2}_1}$$
$$y_1 = 4 \quad \text{i} \quad y_2 = 5$$

Kako vrijedi $x = 18 - 3y$ tada dalje slijedi:

$$x_1 = 18 - 3\overbrace{y}^{4} \quad \text{i} \quad x_2 = 18 - 3\overbrace{y}^{5}$$
$$x_1 = 18 - 3 \cdot 4 \quad \text{i} \quad x_2 = 18 - 3 \cdot 5$$
$$x_1 = 18 - 12 \quad \text{i} \quad x_2 = 18 - 15$$
$$x_1 = 6 \quad \text{i} \quad x_2 = 3$$

Dakle dobili smo sredista kruznica koje zadovoljavaju uvjete zadataka $S_1\left(6, 4\right)$ i $S_2\left(3, 5\right)$. Preostaje jos samo odrediti njihove jednadzbe ako imamo na umu da im radijusi moraju biti jednaki 5 jedinicne duljine.

Prvo odredjujem jednadzbu kruznice cije je srediste tocka $S_1\,(6,4)$, dok joj je radijus jednak 5 jedinicne duzine, racunam:

$$\left.\begin{array}{l} S_1(\overbrace{\ 6\ }^{p},\overbrace{\ 4\ }^{q}) \\ r=5 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad (x-p)^2+(y-q)^2=r^2$$

$$(x-\overbrace{\ p\ }^{6})^2+(y-\overbrace{\ q\ }^{4})^2=\overbrace{\ r\ }^{5}{}^2$$
$$(x-6)^2+(y-4)^2=5^2$$
$$(x-6)^2+(y-4)^2=25$$

Jedno rjesenje jest kruznica cija je jednadzba jednaka $(x-6)^2+(y-4)^2=25$. Nadalje odredjujem jednadzbu kruznice cije je srediste tocka $S_2\,(3,5)$, dok joj je radijus jednak 5 jedinicne duzine, racunam:

$$\left.\begin{array}{l} S_2(\overbrace{\ 3\ }^{p},\overbrace{\ 5\ }^{q}) \\ r=5 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad (x-p)^2+(y-q)^2=r^2$$

$$(x-\overbrace{\ p\ }^{3})^2+(y-\overbrace{\ q\ }^{5})^2=\overbrace{\ r\ }^{5}{}^2$$
$$(x-3)^2+(y-5)^2=4^2$$
$$(x-3)^2+(y-5)^2=25$$

Time smo odredili i jednadzbu druge kruznice koja je jednaka $(x-3)^2+(y-5)^2=25$. Dakle postoje dvije kruznice koje zadovojavaju uvjete zadatka i njihove jednadzbe su jednake $(x-6)^2+(y-4)^2=25$ i $(x-3)^2+(y-5)^2=25$. Time je zadatak rijesen.

⋆

Zadatak 38: (str. 79) Kruznica prolazi tockama $A\,(4,1)$ i $B\,(0,5)$, a srediste joj je na pravcu $x+y+3=0$. Odredi jednadzbu kruznice.

Rjesenje: Dakle opcenito jednadzba kruznice ima oblik $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$. Nadalje ako tocka lezi na kruznici onda ona mora zadovoljavati njenu jednadzbu. Dakle mora vrijediti:

$$A(\overbrace{\ 4\ }^{x_A},\overbrace{\ 1\ }^{y_A}) \quad \Rightarrow \quad (x_A-p)^2+(y_A-q)^2=r^2$$

$$(\overbrace{x_A}^{4}-p)^2+(\overbrace{y_A}^{1}-q)^2=r^2$$
$$(4-p)^2+(1-q)^2=r^2$$

$$B(\overbrace{0}^{x_B}, \overbrace{5}^{y_B}) \quad \Rightarrow \quad (x_B - p)^2 + (y_B - q)^2 = r^2$$

$$(\overbrace{x_B}^{0} - p)^2 + (\overbrace{y_B}^{5} - q)^2 = r^2$$

$$(0 - p)^2 + (5 - q)^2 = r^2$$

$$(-p)^2 + (5 - q)^2 = r^2$$

$$p^2 + (5 - q)^2 = r^2$$

Dakle dobili smo sustav jednadzbi:

$$\begin{cases} (4 - p)^2 + (1 - q)^2 = r^2 \\ p^2 + (5 - q)^2 = r^2 \end{cases}$$

No taj sustav sadrzi tri nepoznanice, a samo dvije jednadzbe sto znaci da ga u ovom obliku ne mozemo jednoznacno rijesiti. No prisjetimo se da srediste kruznice S lezi na pravcu $x + y + 3 = 0$, sto znaci da koordinate tocke S moraju zadovoljavati danu jednadzbu pravca, slijedi:

$$S(\overbrace{p}^{x}, \overbrace{q}^{y}) \quad \Rightarrow \quad x + y + 3 = 0$$

$$\overbrace{x}^{p} + \overbrace{y}^{q} + 3 = 0$$

$$p + q + 3 = 0$$

Izrazimo recimom koordinatu p sredista trazene kruznice pomcu koordinate q, slijedi:

$$p = -q - 3$$

Na taj smo se nacin zapravo sveli na samo dvije nepoznanice, sto prijasji sustav cini rijesivim. Primjenimo cinjenice do kojim smo stigli na sustav jednadzbi, slijedi:

$$\begin{cases} (4 - \overbrace{p}^{-q-3})^2 + (1 - q)^2 = r^2 \\ \overbrace{p}^{-q-3}{}^2 + (5 - q)^2 = r^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (4 - (-q - 3))^2 + (1 - q)^2 = r^2 \\ (-q - 3)^2 + (5 - q)^2 = r^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (4 + q + 3)^2 + (1 - q)^2 = r^2 \\ ((-1)\, q + 3)^2 + (5 - q)^2 = r^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (7 + q)^2 + (1 - q)^2 = r^2 \\ (-1)^2\, (q + 3)^2 + (5 - q)^2 = r^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (7 + q)^2 + (1 - q)^2 = r^2 \\ (q + 3)^2 + (5 - q)^2 = r^2 \end{cases}$$

Rapisem lijeve strane jednadzbi po indentitetu za kvadrat zbroja/razlike $\left((a \pm b)\right)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, slijedi:

$$\begin{cases} 7^2 + 2 \cdot 7 \cdot q + q^2 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot q + q^2 = r^2 \\ q^2 + 2 \cdot q \cdot 3 + 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot q + q^2 = r^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 49 + 14q + q^2 + 1 - 2q + q^2 = r^2 \\ q^2 + 6q + 9 + 25 - 10q + q^2 = r^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2q^2 + 12q + 50 = r^2 \\ 2q^2 - 4q + 34 = r^2 \end{cases}$$

Oduzmemo jednadzbe, slijedi:

$$2q^2 + 12q + 50 - \left(2q^2 - 4q + 34\right) = r^2 - r^2$$

$$\cancel{2q^2} + 12q + 50 \cancel{-2q^2} + 4q - 34 = \cancel{r^2} \cancel{-r^2}$$

$$16q + 16 = 0$$

$$16q = -16$$

Pomnozimo cijelu jednadzbu s $\frac{1}{16}$, slijedi:

$$16q = -16 \;/ \cdot \frac{1}{16}$$

Skratimo sto se skratiti dade:

$$\frac{{}^{1}\cancel{16}q}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{16}_1} = \frac{{}^{-1}\cancel{-16}q}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{16}_1}$$

$$q = -1$$

Dakle odredili smo da q koordinata sredista kruznice mora biti jednaka -1. Kako znamo da vrijedi $p = -q - 3$, mozemo lako odrediti kako izgleda p koordinata sredista kruznice. Racunam:

$$p = -\overbrace{q}^{-1} - 3$$

$$p = -(-1) - 3$$

$$p = 1 - 3$$

$$p = -2$$

Dakle koordinate sredista S trazene kruznice su $S(-2, -1)$. Preostaje jos samo odrediti radijus trazene kruznice, to cemo uciniti koristeci se drugom jednadzbom sustava $2q^2 - 4q + 34 = r^2$, slijedi:

$$2\overbrace{q}^{-1}{}^2 - 4\overbrace{q}^{-1} + 34 = r^2$$

$$2\,(-1) - 4\,(-1) + 34 = 0$$
$$-2 + 4 + 34 = r^2$$
$$r^2 = 36$$

Korijenujem dobiveni izraz, slijedi:

$$r^2 = 36 \;/\sqrt{\ }$$
$$r = 6 \text{ jedinicnih duzina}$$

Na kraju preostaje jos odrediti jednadzbu kruznice kojoj je radijus jednak $S\,(-2,-1)$ te radijusa 6 jedinicnih duljina. Racunam:

$$\left.\begin{array}{l} S(\overbrace{-2}^{p}, \overbrace{-1}^{q}) \\ r = 6 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$$

$$(x - \overbrace{p}^{-2})^2 + (y - \overbrace{q}^{-1})^2 = \overbrace{r}^{6}{}^2$$
$$(x-(-2))^2 + (y-(-1))^2 = 6^2$$
$$(x+2)^2 + (y+1)^2 = 36$$

Dakle kruznica koja zadovoljava uvjete zadatka ima jednadzbu oblika $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 36$ i time je problem rijesen.

⋆