Kompleksno konjugiranje

(svojstva)

Tvrdnja I: Vrijedi:

$$\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}$$

Dokaz: Neka je:

$$z=x_z+y_zi \quad \text{i} \quad w=x_w+y_wi$$

Raspisimo lijevu stranu jednakosti koristeci te izraze, slijedi:

$$\overline{\underbrace{z}_{x_z+y_zi}\cdot\underbrace{w}_{x_w+y_wi}}=\overline{(x_z+y_zi)\cdot(x_w+y_wi)}=(\text{🏷})$$

Rijesimo se zagrade, slijedi:

$$(\text{🏷})=\overline{x_z\cdot x_w+x_z\cdot y_wi+y_zi\cdot x_w+y_zi\cdot y_wi}=$$

$$=\overline{x_zx_w+x_zy_wi+y_zx_wi+y_zy_wi^2}=\left(\text{🏷}^2\right)$$

Nadalje primjenimo cinjenicu da vrijedi $i^2=-1$, slijedi:

$$\left(\text{🏷}^2\right)=\overline{x_zx_w+x_zy_wi+y_zx_wi+y_zy_w\overset{-1}{\boxed{i^2}}}=$$

$$=\overline{x_zx_w+x_zy_wi+y_zx_wi+y_zy_w\cdot(-1)}=$$

$$=\overline{x_zx_w+x_zy_wi+y_zx_wi-y_zy_w}=\left(\text{🏷}^3\right)$$

Poredamo clanove sume tako da su na prvom mjestu oni koji ne sadrze broj i, a nakon toga oni koji sadrze, slijedi:

$$\left(\text{🏷}^3\right)=\overline{x_zx_w-y_zy_w+x_zy_wi+y_zx_wi}=\left(\text{🏷}^4\right)$$

Izlucimo broj i iz posljednja dva sumanda, slijedi:

$$\left(\text{🏷}^4\right)=\overline{x_zx_w-y_zy_w+(x_zy_w+y_zx_w)\,i}=\left(\text{🏷}^5\right)$$

Kako kompleksna konjugacija nije nista drugo nego promjena predznaka imaginarnog dijela, konacno vrijedi:

$$\left(\text{🏷}^5\right)=x_zx_w-y_zy_w-(x_zy_w+y_zx_w)\,i$$

Nadalje raspisujemo i desnu stranu tvrdnje, slijedi:

$$\underbrace{\overline{z}}_{x_z + y_z i} \cdot \underbrace{\overline{w}}_{x_w + y_w i} = \overline{(x_z + y_z i)} \cdot \overline{(x_w + y_w i)} = (\text{✎})$$

Provedemo kompleksno konjugiranje, slijedi:

$$(\text{✎}) = (x_z - y_z i) \cdot (x_w - y_w i) = \left(\text{✎}^{2}\right)$$

Rijesimo se zagrade, slijedi:

$$\left(\text{✎}^{2}\right) = x_z \cdot x_w + x_z \cdot (-y_w i) + (-y_z i) \cdot x_w + (-y_z i) \cdot (-y_w) =$$

$$= x_z x_w - x_z y_w i - y_z x_w i + y_z y_w i^2 = \left(\text{✎}^{3}\right)$$

Nadalje primjenimo cinjenicu da vrijedi $i^2 = -1$, slijedi:

$$\begin{aligned} \left(\text{✎}^{3}\right) &= x_z x_w - x_z y_w i - y_z x_w i + y_z y_w \overset{-1}{\boxed{i^2}} = \\ &= x_z x_w - x_z y_w i - y_z x_w i + y_z y_w \cdot (-1) = \\ &= x_z x_w - x_z y_w i - y_z x_w i - y_z y_w = \left(\text{✎}^{4}\right) \end{aligned}$$

Poredamo clanove sume tako da su na prvom mjestu oni koji ne sadrze broj i, a nakon toga oni koji sadrze, slijedi:

$$\left(\text{✎}^{4}\right) = x_z x_w - y_z y_w - x_z y_w i - y_z x_w i = \left(\text{✎}^{5}\right)$$

Izlucimo broj i iz posljednja dva sumanda, slijedi:

$$\left(\text{✎}^{5}\right) = x_z x_w - y_z y_w - (x_z y_w + y_z x_w)\, i$$

Dakle vrijedi:

$$\left.\begin{aligned} \overline{z \cdot w} &= x_z x_w - y_z y_w - (x_z y_w + y_z x_w)\, i \\ \overline{z} \cdot \overline{w} &= x_z x_w - y_z y_w - (x_z y_w + y_z x_w)\, i \end{aligned}\right\} = \quad \Rightarrow \quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

Time je tvrdnja pokazana!

Tvrdnja II: Vrijedi:

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$$

Dokaz: Neka je:

$$z = x_z + y_z i \quad \text{i} \quad w = x_w + y_w i$$

Raspisimo lijevu stranu jednakosti koristeci te izraze, slijedi:

$$\overline{\left(\frac{\overset{x_z + y_z i}{z}}{\underset{x_w + y_w i}{w}}\right)} = \overline{\left(\frac{x_z + y_z i}{x_w + y_w i}\right)} = (\maltese)$$

Dijelimo kompleksne brojeve tako da mnozimo razlomkom koji sadrzi kompleksnu konjugaciju broja kojim dijelimo i u brojniku i u nazivniku, slijedi:

$$(\maltese) = \overline{\left(\frac{x_z + y_z i}{x_w + y_w i} \cdot \frac{\overline{x_w + y_w i}}{\overline{x_w + y_w i}}\right)} = (\maltese^2)$$

Provedemo kompleksno konjugiranje brojnika i nazivnika drugog razlomka u produktu, slijedi:

$$(\maltese^2) = \overline{\left(\frac{x_z + y_z i}{x_w + y_w i} \cdot \frac{x_w - y_w i}{x_w - y_w i}\right)} = \overline{\left[\frac{(x_z + y_z i) \cdot (x_w - y_w i)}{(x_w + y_w i) \cdot (x_w - y_w i)}\right]} = (\maltese^3)$$

Rijesimo se unutranjih zagrada, slijedi:

$$(\maltese^3) = \overline{\left[\frac{x_z \cdot x_w + x_z \cdot (-y_w i) + y_z i \cdot x_w + y_z i \cdot (-y_w i)}{x_w \cdot x_w + x_w \cdot (-y_w i) + y_w i \cdot x_w + y_w i \cdot (-y_w i)}\right]} =$$

$$= \overline{\left[\frac{x_z x_w - x_z y_w i + y_z x_w i - y_z y_w i^2}{x_w^2 - x_w y_w i + y_w x_w i - y_w^2 i^2}\right]} = (\maltese^4)$$

Nadalje primjenimo cinjenicu da vrijedi $i^2 = -1$, slijedi:

$$(\maltese^4) = \overline{\left[\frac{x_z x_w - x_z y_w i + y_z x_w i - y_z y_w \overset{-1}{\boxed{i^2}}}{x_w^2 - x_w y_w i + y_w x_w i - y_w^2 \underset{-1}{\boxed{i^2}}}\right]} =$$

$$= \overline{\left[\frac{x_z x_w - x_z y_w i + y_z x_w i - y_z y_w \cdot (-1)}{x_w^2 - x_w y_w i + y_w x_w i - y_w^2 \cdot (-1)}\right]} =$$

$$= \overline{\left(\frac{x_z x_w - x_z y_w i + y_z x_w i + y_z y_w}{x_w^2 - x_w y_w i + y_w x_w i + y_w^2}\right)} = (\maltese^5)$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$(\circledast^5) = \overline{\left(\frac{x_z x_w - x_z y_w i + y_z x_w i + y_z y_w}{x_w^2 \cancel{- x_w y_w i} + \cancel{y_w x_w i} + y_w^2}\right)} =$$

$$= \overline{\left(\frac{x_z x_w - x_z y_w i + y_z x_w i + y_z y_w}{x_w^2 + y_w^2}\right)} = (\circledast^6)$$

Poredamo clanove sume u brojniku ralomka tako da su na prvom mjestu oni koji ne sadrze broj i, a nakon toga oni koji sadrze, slijedi:

$$(\circledast^6) = \overline{\left(\frac{x_z x_w + y_z y_w - x_z y_w i + y_z x_w i}{x_w^2 + y_w^2}\right)} = (\circledast^7)$$

Izlucimo broj i iz posljednja dva sumanda u brojniku razlomka, slijedi:

$$(\circledast^7) = \overline{\left[\frac{x_z x_w + y_z y_w - (x_z y_w - y_z x_w)\, i}{x_w^2 + y_w^2}\right]} = (\circledast^8)$$

Dobiveni izraz zapisimo kao sumu dvaju razlomaka, slijedi:

$$(\circledast^8) = \overline{\left[\frac{x_z x_w + y_z y_w}{x_w^2 + y_w^2} - \frac{(x_z y_w - y_z x_w)\, i}{x_w^2 + y_w^2}\right]} = (\circledast^9)$$

Kako kompleksna konjugacija nije nista drugo nego promjena predznaka imaginarnog dijela, konacno vrijedi:

$$(\circledast^9) = \frac{x_z x_w + y_z y_w}{x_w^2 + y_w^2} + \frac{(x_z y_w - y_z x_w)\, i}{x_w^2 + y_w^2}$$

Nadalje raspisujemo i desnu stranu tvrdnje, slijedi:

$$x_z + y_z i$$

$$\frac{\overline{z}}{\overline{w}} = \frac{\overline{x_z + y_z i}}{\overline{x_w + y_w i}} = (\divideontimes)$$

$$x_w + y_w i$$

Provedemo kompleksno konjugiranje brojnika i nazivnika, slijedi:

$$(\divideontimes) = \frac{x_z - y_z i}{x_w - y_w i} = (\divideontimes^2)$$

Dijelimo kompleksne brojeve tako da mnozimo razlomkom koji sadrzi kompleksnu konjugaciju broja kojim dijelimo i u brojniku i u nazivniku, slijedi:

$$(\divideontimes^2) = \frac{x_z - y_z i}{x_w - y_w i} \cdot \frac{\overline{x_w - y_w i}}{\overline{x_w - y_w i}} = (\divideontimes^3)$$

Provedemo kompleksno konjugiranje brojnika i nazivnika drugog razlomka u produktu, slijedi:

$$(\text{☼}^{3}) = \frac{x_z - y_z i}{x_w - y_w i} \cdot \frac{x_w + y_w i}{x_w + y_w i} = \frac{(x_z - y_z i) \cdot (x_w + y_w i)}{(x_w - y_w i) \cdot (x_w + y_w i)} = (\text{☼}^{4})$$

Rijesimo se zagrada, slijedi:

$$(\text{☼}^{4}) = \frac{x_z \cdot x_w + x_z \cdot y_w i + (-y_z i) \cdot x_w + (-y_z i) \cdot y_w i}{x_w \cdot x_w + x_w \cdot y_w i + (-y_w i) \cdot x_w + (-y_w i) \cdot y_w i} =$$

$$= \frac{x_z x_w + x_z y_w i - y_z x_w i - y_z y_w i^2}{x_w^2 + x_w y_w i - y_w x_w i - y_w^2 i^2} = (\text{☼}^{5})$$

Nadalje primjenimo cinjenicu da vrijedi $i^2 = -1$, slijedi:

$$(\text{☼}^{5}) = \frac{x_z x_w + x_z y_w i - y_z x_w i - y_z y_w \overset{\overset{-1}{\uparrow}}{\boxed{i^2}}}{x_w^2 + x_w y_w i - y_w x_w i - y_w^2 \underset{\underset{-1}{\downarrow}}{\boxed{i^2}}} =$$

$$= \frac{x_z x_w + x_z y_w i - y_z x_w i - y_z y_w \cdot (-1)}{x_w^2 + x_w y_w i - y_w x_w i - y_w^2 \cdot (-1)} =$$

$$= \frac{x_z x_w + x_z y_w i - y_z x_w i + y_z y_w}{x_w^2 + x_w y_w i - y_w x_w i + y_w^2} = (\text{☼}^{6})$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$(\text{☼}^{6}) = \frac{x_z x_w + x_z y_w i - y_z x_w i + y_z y_w}{x_w^2 + \cancel{x_w y_w i} \cancel{- y_w x_w i} + y_w^2} =$$

$$= \frac{x_z x_w + x_z y_w i - y_z x_w i + y_z y_w}{x_w^2 + y_w^2} = (\text{☼}^{7})$$

Poredamo clanove sume u brojniku ralomka tako da su na prvom mjestu oni koji ne sadrze broj i, a nakon toga oni koji sadrze, slijedi:

$$(\text{☼}^{7}) = \frac{x_z x_w + y_z y_w + x_z y_w i - y_z x_w i}{x_w^2 + y_w^2} = (\text{☼}^{8})$$

Izlucimo broj i iz posljednja dva sumanda u brojniku razlomka, slijedi:

$$(\text{☼}^{8}) = \frac{x_z x_w + y_z y_w + (x_z y_w - y_z x_w)\, i}{x_w^2 + y_w^2} = (\text{☼}^{9})$$

Dobiveni izraz zapisimo kao sumu dvaju razlomaka, slijedi:

$$(\text{☼}^{9}) = \frac{x_z x_w + y_z y_w}{x_w^2 + y_w^2} + \frac{(x_z y_w - y_z x_w)\, i}{x_w^2 + y_w^2}$$

Dakle vrijedi:

$$
\left.\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} &= \frac{x_z x_w + y_z y_w}{x_w^2 + y_w^2} + \frac{\left(x_z y_w - y_z x_w\right) i}{x_w^2 + y_w^2} \\
\frac{\overline{z}}{\overline{w}} &= \frac{x_z x_w + y_z y_w}{x_w^2 + y_w^2} + \frac{\left(x_z y_w - y_z x_w\right) i}{x_w^2 + y_w^2}
\end{aligned}\right\} = \quad \Rightarrow \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}
$$

Time je tvrdnja pokazana!