Zbrajanje i mnozenje kompleksnih brojeva

(rjesenja nekih zadataka)

Zadatak 10: (str. 11) Rijesi sustav jednadzbi

$$\begin{cases} (1-i)\,z - iw = 5-4i \\ (1+i)\,z - (1-2i)\,w = 8-i \end{cases}$$

Rjesenje: Zadatak cemo rijesiti na dva nacina.

Prvi nacin:

Ideja se svodi na metodu suprotnih koeficijenata koja se koristi kod rijesavanja klasicnog sustava dvije jednadzbe s dvije nepoznanice u skupu realnih brojeva. Nadalje koristit ce se jos sljedeca ideja, odnosno da vrijedi:

$$(x+yi)\cdot(x-yi) = x^2+y^2 \in \mathbb{R}$$

Da bismo prvu od tih ideja proveli prvu jednadzbu pomnozimo s $1-i$, a drugu s $1+i$. Na taj cemo se nacin u nastavku rijesiti nepoznanice z. Racunamo:

$$\begin{cases} (1-i)\cdot z - i\cdot w = 5-4i \;/\cdot(1+i) \\ (1+i)\cdot z - (1-2i)\cdot w = 8-i \;/\cdot(1-i) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-i)\cdot z\cdot(1+i) - i\cdot w\cdot(1+i) = (5-4i)\cdot(1+i) \\ (1+i)\cdot z\cdot(1-i) - (1-2i)\cdot w\cdot(1-i) = (8-i)\cdot(1-i) \end{cases}$$

Primjenom malo komutativnosti slijedi:

$$\begin{cases} (1-i)\cdot(1+i)\cdot z - i\cdot(1+i)\cdot w = (5-4i)\cdot(1+i) \\ (1+i)\cdot(1-i)\cdot z - (1-2i)\cdot(1-i)\cdot w = (8-i)\cdot(1-i) \end{cases}$$

Rijesimo se zagrada:

$$\begin{cases} [1\cdot 1 + 1\cdot i + (-i)\cdot 1 + (-i)\cdot i]\cdot z - (i\cdot 1 + i\cdot i)\cdot w = \\ \qquad = 5\cdot 1 + 5\cdot i + (-4i)\cdot 1 + (-4i)\cdot i \\ [1\cdot 1 + 1\cdot(-i) + i\cdot 1 + i\cdot(-i)]\cdot z - [1\cdot 1 + 1\cdot(-i) + (-2i)\cdot 1 + (-2i)\cdot(-i)]\cdot w = \\ \qquad = 8\cdot 1 + 8\cdot(-i) + (-i)\cdot 1 + (-i)\cdot(-i) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(1+i-i-i^2\right)\cdot z - \left(i+i^2\right)\cdot w = 5+5i-4i-4i^2 \\ \left(1-i+i-i^2\right)\cdot z - \left(1-i-2i+2i^2\right)\cdot w = 8-8i-i+i^2 \end{cases}$$

Zbrojimo sto se zbrojiti dade, slijedi:

$$\begin{cases} \left(1 + \cancel{i} \cancel{- i} - i^2\right) \cdot z - \left(i + i^2\right) \cdot w = 5 + i - 4i^2 \\ \left(1 \cancel{- i} + \cancel{i} - i^2\right) \cdot z - \left(1 - 3i + 2i^2\right) \cdot w = 8 - 9i + i^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(1 - i^2\right) \cdot z - \left(i + i^2\right) \cdot w = 5 + i - 4i^2 \\ \left(1 - i^2\right) \cdot z - \left(1 - 3i + 2i^2\right) \cdot w = 8 - 9i + i^2 \end{cases}$$

Nadalje primjenimo cinjenicu da vrijedi $i^2 = -1$, slijedi:

$$\begin{cases} \left(1 - \overset{-1}{\boxed{i^2}}\right) \cdot z - \left(i + \overset{-1}{\boxed{i^2}}\right) \cdot w = 5 + i - 4\overset{-1}{\boxed{i^2}} \\ \left(1 - \underset{-1}{\boxed{i^2}}\right) \cdot z - \left(1 - 3i + 2\underset{-1}{\boxed{i^2}}\right) \cdot w = 8 - 9i + \underset{-1}{\boxed{i^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} [1 - (-1)] \cdot z - [i + (-1)] \cdot w = 5 + i - 4 \cdot (-1) \\ [1 - (-1)] \cdot z - [1 - 3i + 2 \cdot (-1)] \cdot w = 8 - 9i + (-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1 + 1) \cdot z - (i - 1) \cdot w = 5 + i + 4 \\ (1 + 1) \cdot z - (1 - 3i - 2) \cdot w = 8 - 9i - 1 \end{cases}$$

Zbrojimo sto se zbrojiti dade, slijedi:

$$\begin{cases} 2 \cdot z - (i - 1) \cdot w = 9 + i \\ 2 \cdot z - (-1 - 3i) \cdot w = 7 - 9i \end{cases}$$

Oduzmemo drugu jednadzbu od prve da se rijesimo nepoznanice z, slijedi:

$$\begin{cases} 2 \cdot z - (i - 1) \cdot w = 9 + i \\ 2 \cdot z - (-1 - 3i) \cdot w = 7 - 9i \end{cases} \Big/ -$$

$$2 \cdot z - (i - 1) \cdot w - [2 \cdot z - (-1 - 3i) \cdot w] = 9 + i - (7 - 9i)$$

Rijesimo se uglate zagrade na lijevoj strani jednakosti i jedine zagrade na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$2 \cdot z - (i - 1) \cdot w - 2 \cdot z + (-1 - 3i) \cdot w = 9 + i - 7 + 9i$$

Zbrojimo sto se zbrojiti dade, slijedi:

$$\cancel{2 \cdot z} - (i - 1) \cdot w \cancel{- 2 \cdot z} + (-1 - 3i) \cdot w = 2 + 10i$$

$$-(i-1)\cdot w+(-1-3i)\cdot w=2+10i$$

Izlucimo w na lijevoj strani jednakosti, slijedi:

$$[-(i-1)+(-1-3i)]\cdot w=2+10i$$

Rijesimo se unutarnjih zagrada na lijevoj strani jednakosti, slijedi:

$$(-i+1-1-3i)\cdot w=2+10i$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\left(-i+\cancel{1}\cancel{-1}-3i\right)\cdot w=2+10i$$

$$(-i-3i)\cdot w=2+10i$$

Zbrojimo sto se zbrojiti dade, slijedi:

$$-4i\cdot w=2+10i$$

Pomnozimo cijelu jednakost s i da se rijesimo kompleksnog broja na lijevoj strani jednakosti, slijedi:

$$-4i\cdot w=2+10i\ /\cdot i$$

$$-4i\cdot w\cdot i=2\cdot i+10i\cdot i$$

Uz malo komutativnosti slijedi:

$$-4i\cdot i\cdot w=2i+10i^2$$

$$-4i^2\cdot w=2i+10i^2$$

Nadalje primjenimo cinjenicu da vrijedi $i^2=-1$, slijedi:

$$-4\underbrace{\boxed{i^2}}_{-1}\cdot w=2i+10\underbrace{\boxed{i^2}}_{-1}$$

$$-4\cdot(-1)\cdot w=2i+10\cdot(-1)$$

$$4\cdot w=2i-10$$

Uz malo komutativnosti slijedi:

$$4\cdot w=-10+2i$$

Pomnozimo cijelu jednakost sa $\frac{1}{4}$, slijedi:

$$4\cdot w=-10+2i\ \Big/\cdot\frac{1}{4}$$

$$4\cdot w\cdot\frac{1}{4}=-10\cdot\frac{1}{4}+2i\cdot\frac{1}{4}$$

$$\frac{4\cdot w}{4}=\frac{-10}{4}+\frac{2i}{4}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{4}\cdot w}{\cancel{4}_{1}}=\frac{{}^{-5}\cancel{-10}}{\cancel{4}_{2}}+\frac{{}^{1}\cancel{2}i}{\cancel{4}_{2}}$$

$$\frac{1\cdot w}{1}=\frac{-5}{2}+\frac{1\cdot i}{2}$$

$$\frac{w}{1}=\frac{-5}{2}+\frac{i}{2}$$

$$w=-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i$$

Preostaje jos odrediti cemu je jedak z. Uvrstimo w u prvu jednadzbu, slijedi:

$$(1-i)\cdot z-i\cdot \overset{\underbrace{-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i}\ \downarrow}{w}=5-4i$$

$$(1-i)\cdot z-i\cdot\left(-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i\right)=5-4i$$

Rijesimo se druge zagrade, slijedi:

$$(1-i)\cdot z-i\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)-i\cdot\frac{1}{2}i=5-4i$$

$$(1-i)\cdot z+\frac{5}{2}i-\frac{1}{2}i^2=5-4i$$

Nadalje primjenimo cinjenicu da vrijedi $i^2=-1$, slijedi:

$$(1-i)\cdot z+\frac{5}{2}i-\frac{1}{2}\underset{\downarrow\atop -1}{\boxed{i^2}}=5-4i$$

$$(1-i)\cdot z+\frac{5}{2}i-\frac{1}{2}\cdot(-1)=5-4i$$

$$(1-i)\cdot z+\frac{5}{2}i+\frac{1}{2}=5-4i$$

"Prebacimo" posljednja dva sumanda na lijevoj strani jednakosti na desnu, slijedi:

$$(1-i)\cdot z+\boxed{\frac{5}{2}i}+\boxed{\frac{1}{2}}=5-4i$$

$$(1-i)\cdot z = 5-4i-\frac{5}{2}i-\frac{1}{2}$$

Pomnozimo cijelu jednakost sa 2, slijedi:

$$(1-i)\cdot z = 5-4i-\frac{5}{2}i-\frac{1}{2}\ \Big/\cdot 2$$

$$(1-i)\cdot z\cdot 2 = 5\cdot 2-4i\cdot 2-\frac{5}{2}i\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot 2$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$2\cdot(1-i)\,z = 10-8i-\frac{5}{{}_1\cancel{2}}i\cdot\frac{\cancel{2}^1}{1}-\frac{1}{{}_1\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}^1}{1}$$

$$2\cdot(1-i)\cdot z = 10-8i-\frac{5\cdot 1}{1\cdot 1}i-\frac{1\cdot 1}{1\cdot 1}$$

$$2\cdot(1-i)\cdot z = 10-8i-\frac{5}{1}i-\frac{1}{1}$$

$$2\cdot(1-i)\cdot z = 10-8i-5i-1$$

Zbrojimo sto se zbrojiti dade, slijedi:

$$2\cdot(1-i)\cdot z = 9-13i$$

Pomnozimo cijelu jednakost sa $1+i$, slijedi:

$$2\cdot(1-i)\cdot z = 9-13i\ \ /\cdot(1+i)$$

$$2\cdot(1-i)\cdot z\cdot(1+i) = (9-13i)\cdot(1+i)$$

Uz malo komutativnosti slijedi:

$$2\cdot(1-i)\cdot(1+i)\cdot z = (9-13i)\cdot(1+i)$$

Rijesimo se obje zagrade, slijedi:

$$2\cdot[1\cdot 1+1\cdot i+(-i)\cdot 1+(-i)\cdot i]\cdot z = [9\cdot 1+9\cdot i+(-13i)\cdot 1+(-13i)\cdot i]$$

$$2\cdot\left(1+i-i-i^2\right)\cdot z = 9+9i-13i-13i^2$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$2\cdot\left(1+\cancel{i-i}-i^2\right)\cdot z = 9+9i-13i-13i^2$$

$$2\cdot\left(1-i^2\right)\cdot z = 9+9i-13i-13i^2$$

Zbrojimo sto se zbrojiti dade, slijedi:

$$2\cdot\left(1-i^2\right)\cdot z = 9-4i-13i^2$$

$$2 \cdot \left(1 - \underset{\overset{\downarrow}{-1}}{\boxed{i^2}}\right) \cdot z = 9 - 4i - 13\underset{\overset{\downarrow}{-1}}{\boxed{i^2}}$$

$$2 \cdot [1 - (-1)] \cdot z = 9 - 4i - 13 \cdot (-1)$$
$$2 \cdot (1 + 1) \cdot z = 9 - 4i + 13$$

Zbrojimo sto se zbrojiti dade, slijedi:

$$2 \cdot 2 \cdot z = 22 - 4i$$
$$4 \cdot z = 22 - 4i$$

Pomnozimo cijelu jednakost sa $\frac{1}{4}$, slijedi:

$$4 \cdot z = 22 - 4i \quad \Big/ \cdot \frac{1}{4}$$
$$4 \cdot z \cdot \frac{1}{4} = 22 \cdot \frac{1}{4} - 4i \cdot \frac{1}{4}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{4} \cdot z}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{4}_2} = \frac{{}^{11}\cancel{22}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{4}_1} - \frac{{}^{1}\cancel{4}i}{\cdot} \frac{1}{\cancel{4}_1}$$
$$\frac{1 \cdot z \cdot 1}{1 \cdot 1} = \frac{11 \cdot 1}{1 \cdot 2} - \frac{1 \cdot i \cdot 1}{1 \cdot 1}$$
$$\frac{z}{1} = \frac{11}{2} - \frac{i}{1}$$
$$z = \frac{11}{2} - i$$

Dakle rjesenja sustava su:

$$z = \frac{11}{2} - i \quad \text{i} \quad w = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}i$$

!! **Drugi nacin**:

Neka je:

$$z = x_z + y_z i \quad \text{i} \quad w = x_w + y_w i$$

Primjenimo to na sustav jednadzbi, slijedi:

$$\begin{cases} (1 - i) \cdot \overset{x_z + y_z i}{\overset{\downarrow}{z}} - i \cdot \overset{x_w + y_w i}{\overset{\downarrow}{w}} = 5 - 4i \\ (1 + i) \cdot \underset{x_z + y_z i}{\underset{\uparrow}{z}} - (1 - 2i) \cdot \underset{x_w + y_w i}{\underset{\uparrow}{w}} = 8 - i \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-i)\cdot(x_z+y_zi)-i\cdot(x_w+y_wi)=5-4i \\ (1+i)\cdot(x_z+y_zi)-(1-2i)\cdot(x_w+y_wi)=8-i \end{cases}$$

Rijesimo se svih zagrada, slijedi:

$$\begin{cases} 1\cdot x_z+1\cdot y_zi+(-i)\cdot x_z+(-i)\cdot y_zi-(i\cdot x_w+i\cdot y_wi)=5-4i \\ 1\cdot x_z+1\cdot y_zi+i\cdot x_z+i\cdot y_zi-[1\cdot x_w+1\cdot y_wi+(-2i)\cdot x_w+(-2i)\cdot y_wi]=8-i \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_z+y_zi-x_zi-y_zi^2-\left(x_wi+y_wi^2\right)=5-4i \\ x_z+y_zi+x_zi+y_zi^2-\left(x_w+y_wi-2x_wi-2y_wi^2\right)=8-i \end{cases}$$

Rijesimo se preostalih zagrada, slijedi:

$$\begin{cases} x_z+y_zi-x_zi-y_zi^2-x_wi-y_wi^2=5-4i \\ x_z+y_zi+x_zi+y_zi^2-x_w-y_wi+2x_wi+2y_wi^2=8-i \end{cases}$$

Nadalje primjenimo cinjenicu da vrijedi $i^2=-1$, slijedi:

$$\begin{cases} x_z+y_zi-x_zi-y_z\overset{\overset{-1}{\uparrow}}{\boxed{i^2}}-x_wi-y_w\overset{\overset{-1}{\uparrow}}{\boxed{i^2}}=5-4i \\ x_z+y_zi+x_zi+y_z\underset{\underset{-1}{\downarrow}}{\boxed{i^2}}-x_w-y_wi+2x_wi+2y_w\underset{\underset{-1}{\downarrow}}{\boxed{i^2}}=8-i \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_z+y_zi-x_zi-y_z\cdot(-1)-x_wi-y_w\cdot(-1)=5-4i \\ x_z+y_zi+x_zi+y_z\cdot(-1)-x_w-y_wi+2x_wi+2y_w\cdot(-1)=8-i \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_z+y_zi-x_zi+y_z-x_wi+y_w=5-4i \\ x_z+y_zi+x_zi-y_z-x_w-y_wi+2x_wi-2y_w=8-i \end{cases}$$

Grupirajmo na obje lijeve strane jednakosti prvo one clanove sume koji ne sadrze i, a nakon toga one koje sadrze, slijedi:

$$\begin{cases} x_z+y_z+y_w+y_zi-x_zi-x_wi=5-4i \\ x_z-y_z-x_w-2y_w+y_zi+x_zi-y_wi+2x_wi=8-i \end{cases}$$

Izlucimo i iz svih clanova sume na desnoj strani jednakosti koji ih sadrze, slijedi:

$$\begin{cases} x_z+y_z+y_w+(y_z-x_z-x_w)\,i=5-4i \\ x_z-y_z-x_w-2y_w+(y_z+x_z-y_w+2x_w)\,i=8-i \end{cases}$$

Prisjetimo se da su dva kompleksna broj s i r jednaka onda i samo onda kada su im realni, odnosno imaginarni dijelovi jednaki, ili simbolicki zapisano:

$$s = r \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re} s = \operatorname{Re} r \text{ i } \operatorname{Im} s = \operatorname{Im} r$$

U nasem slucaju to znaci da mora vrijediti:

$$\begin{cases} x_z + y_z + y_w = 5 \\ y_z - x_z - x_w = -4 \\ x_z - y_z - x_w - 2y_w = 8 \\ y_z + x_z - y_w + 2x_w = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{x_z + y_z + y_w} + (\boxed{y_z - x_z - x_w})\, i = \boxed{5}\boxed{-4}i \\ \boxed{x_z - y_z - x_w - 2y_w} + (\boxed{y_z + x_z - y_w + 2x_w})\, i = \boxed{8}\boxed{-}i \end{cases}$$

Time smo dobili sustav od cetiri jednadzbe s cetiri nepoznanice. Uocimo da iza prve dvije jednadzbe x_w i y_w mozemo izraziti pomocu x_z i y_z, dakle vrijedi:

$$\begin{cases} x_z + y_z + y_w = 5 \quad \Rightarrow \quad y_w = 5 - x_z - y_z \\ y_z - x_z - x_w = -4 \quad \Rightarrow \quad x_w = 4 + y_z - x_z \\ x_z - y_z - x_w - 2y_w = 8 \\ y_z + x_z - y_w + 2x_w = -1 \end{cases}$$

Uz ove jednakosti, druge dvije jednadzbe sustava mozemo svesti na jednadzbe koje imaju samo nepoznanice x_z i y_z pa cemo to dakako i uciniti, slijedi:

$x_w = 4 + y_z - x_z$ $\qquad$ $y_w = 5 - x_z - y_z$

$$\begin{cases} x_z - y_z - x_w - 2y_w = 8 \\ y_z + x_z - y_w + 2x_w = -1 \end{cases}$$

$y_w = 5 - x_z - y_z$ $\qquad$ $x_w = 4 + y_z - x_z$

$$\begin{cases} x_z - y_z - (4 + y_z - x_z) - 2 \cdot (5 - x_z - y_z) = 8 \\ y_z + x_z - (5 - x_z - y_z) + 2 \cdot (4 + y_z - x_z) = -1 \end{cases}$$

Rijesimo se zagrada, slijedi:

$$\begin{cases} x_z - y_z - 4 - y_z + x_z - 10 + 2x_z + 2y_z = 8 \\ y_z + x_z - 5 + x_z + y_z + 8 + 2y_z - 2x_z = -1 \end{cases}$$

Zbrojimo sto se zbrojiti dade, slijedi:

$$\begin{cases} 4x_z - 14 = 8 \\ 4y_z + 3 = -1 \end{cases}$$

"Prebacimo" brojeve s lijeve na desnu stranu jednakosti, slijedi:

$$\begin{cases} 4x_z \boxed{-14} = 8 \\ 4y_z + \boxed{3} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_z = 8 + 14 \\ 4y_z = -1 - 3 \end{cases}$$

Zbrojimo sto se zbrojiti dade, slijedi:

$$\begin{cases} 4x_z = 22 \\ 4y_z = -4 \end{cases}$$

Obadvije jednadzbe pomnozimo s $\frac{1}{4}$, slijedi:

$$\begin{cases} 4x_z = 22 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{4} \\ 4y_z = -4 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_z \cdot \frac{1}{4} = 22 \cdot \frac{1}{4} \\ 4y_z \cdot \frac{1}{4} = -4 \cdot \frac{1}{4} \end{cases}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\begin{cases} \frac{{}^{1}\cancel{4}x_z}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{4}_1} = \frac{{}^{11}\cancel{22}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{4}_2} \\ \frac{{}^{1}\cancel{4}y_z}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{4}_1} = \frac{{}^{-1}\cancel{-4}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{4}_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1 \cdot x_z \cdot 1}{1 \cdot 1} = \dfrac{11 \cdot 1}{1 \cdot 2} \\ \dfrac{1 \cdot y_z \cdot 1}{1 \cdot 1} = \dfrac{-1 \cdot 1}{1 \cdot 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x_z}{1} = \dfrac{11}{2} \\ \dfrac{y_z}{1} = \dfrac{-1}{1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_z = \dfrac{11}{2} \\ y_z = -1 \end{cases}$$

Dakle vrijedi:

$$x_z = \frac{11}{2} \quad \text{i} \quad y_z = -1$$

Preostaje jos odrediti vrijednosti za x_w i y_w, prisjetimo se da smo te nepoznanice vec izrazili preko x_z i y_z, odnosno da vrijedi:

$$\begin{cases} y_w = 5 - x_z - y_z \\ x_w = 4 + y_z - x_z \end{cases}$$

Uvrstimo poznate vrijednosti, slijedi:

$$\begin{cases} y_w = 5 - \overset{\frac{11}{2}}{x_z} - \overset{-1}{y_z} \\ x_w = 4 + \underset{-1}{y_z} - \underset{\frac{11}{2}}{x_z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_w = 5 - \dfrac{11}{2} - (-1) \\ x_w = 4 + (-1) - \dfrac{11}{2} \end{cases}$$

Zbrojimo sto se zbrojiti dade, slijedi:

$$\begin{cases} y_w = \dfrac{1}{2} \\ x_w = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Dakle vrijedi:

$$x_w = -\frac{5}{2} \quad \text{i} \quad y_w = \frac{1}{2}$$

Odnosno trazeni kompleksni brojevi su:

$$\begin{aligned} z &= \overbrace{x_z}^{\frac{11}{2}} + \overbrace{y_z}^{-1} i \\ w &= \underbrace{x_w}_{-\frac{5}{2}} - \underbrace{y_w}_{\frac{1}{2}} i \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} z &= \frac{11}{2} - i \\ w &= -\frac{5}{2} + \frac{1}{2} i \end{aligned}$$

Time je zadatak rijesen na dva nacina!

Zadatak 27: (str. 11) pod 2) Izracunaj:

$$i \cdot i^4 \cdot i^7 \cdot ... \cdot i^{103}$$

Rjesenje: Prisjetimo se prije svega kako odredjujemo potenciju broja i, naime vrijedi:

$$i^n = \begin{cases} i^0 = 1 \text{ ako } n \text{ pri dijeljenju sa 4 daje ostatak 0} \\ i^1 = i \text{ ako } n \text{ pri dijeljenju sa 4 daje ostatak 1} \\ i^2 = -1 \text{ ako } n \text{ pri dijeljenju sa 4 daje ostatak 2} \\ i^3 = -i \text{ ako } n \text{ pri dijeljenju sa 4 daje ostatak 3} \end{cases}$$

Drugim rijecima potencije broj i se ciklicki ponavljaju. Primetimo da se u nasem zadatku eksponent kod svakog sljedeceg clana produkta uveca za tri. Dakle kako se eksponenti povecavaju pravilno pretpostavka je da se brojevi koji se pojavljuju u tom produktu ciklicki ponavljaju.

Uvjerimo se u to, odredimo vrijednosti nekoliko prvih clanova donjeg produkta, vrijedi:

$$i^1 = i^1 = i \text{ jer 1 podijeljeno sa 4 je 0 i ostatak 1}$$
$$i^4 = i^0 = 1 \text{ jer 4 podijeljeno sa 4 je 1 i ostatak 0}$$
$$i^7 = i^3 = -i \text{ jer 7 podijeljeno sa 4 je 1 i ostatak 3}$$
$$i^{10} = i^2 = -1 \text{ jer 10 podijeljeno sa 4 je 2 i ostatak 2}$$
$$i^{13} = i^1 = i \text{ jer 13 podijeljeno sa 4 je 3 i ostatak 1}$$
$$...$$

Dakle uocavamo da se i ovdje vrijednosti nakon svake cetvrte potencije pocinju ponavljati (to **ne mora** uvijek biti slucaj, nekad ce se to dogoditi nakon nekog drugog broja potencija).

Odredimo koliki je umnozak prve cetiri potencije, racunamo:

$$i \cdot i^4 \cdot i^7 \cdot i^{10} = (\text{☞})$$

Primjenimo sto znamo, slijedi:

$$(\text{☞}) = i \cdot \underbrace{\boxed{i^4}}_{i^0 = 1} \cdot \underbrace{\boxed{i^7}}_{i^3 = -i} \cdot \underbrace{\boxed{i^{10}}}_{i^2 = -1} = i \cdot 1 \cdot (-i) \cdot (-1) = i^2 = (\text{☞☞})$$

Nadalje primjenimo cinjenicu da vrijedi $i^2 = -1$, slijedi:

$$(\text{☞☞}) = \underbrace{\boxed{i^2}}_{-1} = -1$$

Dakle umnozak prva cetiri clana danog produkta jednak je -1, no kako se vrijednosti potencija koje se nalaze u produktu ponavlja nakon svake cetvrte to ce umnozak i narednih cetiri takodjer biti jednak -1 i tako dalje.

Nas glavni zadatak u ovom trenutku postaje odrediti koliko ima sveukupno clanova danog produkta da bismo znali odrediti koliko skupina po cetri uzastopne potencije mozemo sloziti. To odredjujemo prema sljedecem izrazu kojeg necemo dokazati:

$$N = \frac{\text{eksponent}_{\text{posljednja}} - \text{eksponent}_{\text{prva}}}{\text{eksponent}_{\text{druga}} - \text{eksponent}_{\text{prva}}} + 1$$

U nasem je to slucaju ovako:

$$N = \frac{\overbrace{\text{eksponent}_{\text{posljednja}}}^{103} - \overbrace{\text{eksponent}_{\text{prva}}}^{1}}{\underbrace{\text{eksponent}_{\text{druga}}}_{4} - \underbrace{\text{eksponent}_{\text{prva}}}_{1}} + 1$$

$$N = \frac{103 - 1}{3} + 1 = \frac{{}^{34}\cancel{102}}{\cancel{3}_1} + 1 = \frac{34}{1} + 1 = 34 + 1 = 35$$

Dakle ukupno je 35 clanova produkta. Kako 35 podijeljeno sa 4 daje 8 i ostatak 3, sve clanove produkta mozemo strpati u 8 grupa i pritom ostaju 3 clana bez grupe. Prisjetimo se da svaka grupa koja cini cetiri uzastopne potencije kao u danom produktu daje -1 u umnosku. Vrijedi:

$$\underbrace{\underbrace{i\cdot i^4\cdot i^7\cdot i^{13}}_{-1}\cdot\underbrace{i^{16}\cdot i^{19}\cdot i^{22}\cdot i^{25}}_{-1}\cdot\ldots\cdot\underbrace{i^{85}\cdot i^{88}\cdot i^{91}\cdot i^{94}}_{-1}}_{\text{8 grupa ciji umnozak je jednak }-1}\cdot\underbrace{i^{97}\cdot i^{100}\cdot i^{103}}_{\text{ostatak}} = (\text{✎})$$

$$(\text{✎}) = (-1)^8\cdot i^{97}\cdot i^{100}\cdot i^{103} = 1\cdot i^{97}\cdot i^{100}\cdot i^{103} = i^{97}\cdot i^{100}\cdot i^{103} = (\text{✎✎})$$

Primjetimo da vrijedi:

$$i^{97} = i^1 = i \ \text{ jer 97 podijeljeno sa 4 je 24 i ostatak 1}$$

$$i^{100} = i^0 = 1 \ \text{ jer 100 podijeljeno sa 4 je 25 i ostatak 0}$$

$$i^{103} = i^3 = -i \ \text{ jer 103 podijeljeno sa 4 je 25 i ostatak 3}$$

Dakle slijedi:

$$(\text{✎✎}) = \underbrace{\boxed{i^{97}}}_{i^1=i}\cdot\underbrace{\boxed{i^{100}}}_{i^0=1}\cdot\underbrace{\boxed{i^{103}}}_{i^3=-i} = i\cdot 1\cdot(-i) = -i^2 = (\text{✎✎✎})$$

Nadalje primjenimo cinjenicu da vrijedi $i^2 = -1$, slijedi:

$$(\text{✎✎✎}) = -\underbrace{\boxed{i^2}}_{-1} = -(-1) = 1$$

Dakle dani produkt jednak je 1. Time je zadatak gotov.

– !!! –

Dodatak ("zanimljiva" tvdnja koja proizlazi iz posljednjeg zadatka):

Tvrdnja: Umnozak cetiri uzastopne potencije broja i ciji se eksponenti povecavaju za neparan broj $2k-1, k\in\mathbb{N}$ jednak je -1 , odnosno vrijedi:

$$i^n\cdot i^{n+2k-1}\cdot i^{n+2\cdot(2k-1)}\cdot i^{n+3\cdot(2k-1)} = -1 \text{ za neki } n\in\mathbb{N}$$

Dokaz: Primjetimo da se radi o umnosku potencija istih baza, a takve potencije mnozim prema pravilu $a^n\cdot a^m = a^{n+m}$, slijedi:

$$i^n\cdot i^{n+2k-1}\cdot i^{n+2\cdot(2k-1)}\cdot i^{n+3\cdot(2k-1)} = i^{n+n+2k-1+n+2\cdot(2k-1)+n+3\cdot(2k-1)} = (\text{⬡})$$

Rijesimo se zagrada, slijedi:

$$(\text{⬡}) = i^{n+n+2k-1+n+4k-2+n+6k-3} = (\text{⬡}^2)$$

Zbrojimo sto se zbrojiti dade, slijedi:

$$(\text{⬡}^2) = i^{4n+12k-6} = (\text{⬡}^3)$$

Nadalje prikazat cemo -6 kao $-8+2$, slijedi:

$$\left(\square^{3}\right) = i^{4n+12k\overset{-8+2}{\boxed{-6}}} = i^{4n+12k-8+2} = \left(\square^{4}\right)$$

Izlucimo 4 iz prva tri clana sume u eksponentu potencije, slijedi:

$$\left(\square^{4}\right) = i^{4\cdot(n+3k-2)+2} = \left(\square^{5}\right)$$

No sada mozemo zakljuciti da broj u eksponentu pri djeljenju sa 4 daje ostatak 2 sto znaci da vrijedi:

$$\left(\square^{5}\right) = i^{2} = -1$$

Time je tvrdnja dokazana!