Rjeseni neki zadaci vezani uz kompleksne brojeve

Zadatak 9: (knjiga str. 15 pod 2)) Izracunaj:

$$\mathrm{Re}\,\frac{1}{z^2+iz} \quad \text{ako je } z=\frac{\sqrt{2}-i}{3}$$

Rjesenje: Dakle moj zadatak je srediti kompleksan broj $\frac{1}{z^2+iz}$ do te mjere da je lako procitati koliko mu iznosi realan a koliko kompleksan dio. U tu svrhu za pocetak bilo bi dobro odrediti cemu je jednak z^2 i iz. Prvo racunam cemu je jednak z^2:

$$z^2=\left(\frac{\sqrt{2}-i}{3}\right)^2$$

Prema pravilu za dijeljenje potencija razlicitih baza, a istih eksponenata, odnosno $\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$ mozemo pisati:

$$z^2=\frac{(\sqrt{2}-i)^2}{3^2}$$

Nadalje brojnik raspisujem po formuli za kvadrat binoma:

$$z^2=\frac{(\sqrt{2}-i)^2}{3^2}=\frac{(\sqrt{2})^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot i+i^2}{9}$$

Prisjetim se da je $i^2=-1$ pa dalje racunam:

$$z^2=\frac{(\sqrt{2}-i)^2}{3^2}=\frac{(\sqrt{2})^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot i+i^2}{9}=\frac{2-2\sqrt{2}\cdot i+(-1)}{9}$$

$$z^2=\frac{1-2\sqrt{2}\cdot i}{9}$$

Nadalje odredimo jos cemu je jednako $z\cdot i$. Racunam

$$i\cdot z=i\cdot\frac{\sqrt{2}-i}{3}=\frac{i\cdot(\sqrt{2}-i)}{3}=\frac{\sqrt{2}\cdot i-i^2}{3}$$

Imajuci na umu da je $i^2=-1$ dalje racunam:

$$i\cdot z=i\cdot\frac{\sqrt{2}-i}{3}=\frac{i\cdot(\sqrt{2}-i)}{3}=\frac{\sqrt{2}\cdot i-i^2}{3}=\frac{\sqrt{2}\cdot i-(-1)}{3}$$

Kad to malo sredim vidim da vrijedi:

$$i\cdot z=\frac{1+\sqrt{2}\cdot i}{3}$$

Nadalje sada kada sam odredio cemu je jednako z^2 i $i \cdot z$ racunam cemu je jedanko $z^2 + i \cdot z$:

$$z^2 + i \cdot z = \frac{1 - 2\sqrt{2} \cdot i}{9} + \frac{1 + \sqrt{2} \cdot i}{3}$$

Svedem na zajednicki nazivnik, dakle to je 9:

$$z^2 + i \cdot z = \frac{1 - 2\sqrt{2} \cdot i}{9} + \frac{3 \cdot (1 + \sqrt{2} \cdot i)}{9} = \frac{1 - 2\sqrt{2} \cdot i + 3 + 3\sqrt{2} \cdot i}{9}$$

Kad se to sredi dobije se:

$$z^2 + i \cdot z = \frac{4 + \sqrt{2} \cdot i}{9}$$

Kada sam to odredio zadatak mi je odrediti cemu je jednako $\frac{1}{z^2 + iz}$. Kako sam nazivnik vec odredio samo ga uvrstim, dakle racunam:

$$\frac{1}{z^2 + iz} = \frac{1}{\frac{4 + \sqrt{2} \cdot i}{9}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{4 + \sqrt{2} \cdot i}{9}} = \frac{9}{4 + \sqrt{2} \cdot i}$$

Dakle vidim da moram provesti dijeljenje kompleksnih brojeva, a to cinim tako da brojnik i nazivnik pomnozim sa kompleksnom konjugacijom nazivnika, u nasem slucaju to je $4 - \sqrt{2} \cdot i$. Racunam:

$$\frac{1}{z^2 + iz} = \frac{9}{4 + \sqrt{2} \cdot i} \cdot \frac{4 - \sqrt{2} \cdot i}{4 - \sqrt{2} \cdot i} = \frac{9 \cdot (4 + \sqrt{2} \cdot i)}{(4 + \sqrt{2} \cdot i) \cdot (4 - \sqrt{2} \cdot i)}$$

U nazivniku prepoznajem razliku kvadata, dakle slijedi:

$$\frac{1}{z^2 + iz} = \frac{9 \cdot (4 + \sqrt{2} \cdot i)}{(4 + \sqrt{2} \cdot i) \cdot (4 - \sqrt{2} \cdot i)} = \frac{36 + 9\sqrt{2} \cdot i}{4^2 - (\sqrt{2} \cdot i)^2} = \frac{36 + 9\sqrt{2} \cdot i}{16 - 2i^2}$$

Imajuci na umu da je $i^2 = -1$ dalje racunam:

$$\frac{1}{z^2 + iz} = \frac{36 + 9\sqrt{2} \cdot i}{16 - 2i^2} = \frac{36 + 9\sqrt{2} \cdot i}{16 - 2 \cdot (-1)} = \frac{36 + 9\sqrt{2} \cdot i}{16 + 2} = \frac{36 + 9\sqrt{2} \cdot i}{18}$$

Dakle sada smo konacno dobili o kojem se kompleksnom broju zapravo radi, zapisimo ga u malo drugacijem obliku tako da se jasno vide realan i kompleksni dio:

$$\frac{1}{z^2 + iz} = \frac{36 + 9\sqrt{2} \cdot i}{18} = \frac{36}{18} + \frac{9\sqrt{2} \cdot i}{18}$$

Na kraju jos napisem ono sto se u zadatku zapravo trazi:

$$Re \frac{1}{z^2 + iz} = Re \left(\frac{36}{18} + \frac{9\sqrt{2} \cdot i}{18} \right) = \frac{\cancel{36}^{2}}{\cancel{18}_{1}} = \frac{2}{1} = 2$$

Dakle realni dio danog izraza jest 2.

$$-\star-$$

Zadatak 11: (knjiga str. 15) Ako je $z = 5 - 2i$, $w = 1 - 4i$, izracunaj:

$$\frac{z \cdot \overline{w} + w \cdot \overline{z}}{\overline{z} - \overline{w}}$$

Rjesenje: Dakle zadatak nam je izracunati vrijednost danog izraza za dane kompleksne brojeve z i w. No umjesto da uvrstimo sve brojeve odjednom, rastavimo dani izraz na manje dijelove. Probajmo prvo racunati cemu je jednako $z \cdot \overline{w}$, $w \cdot \overline{z}$ i $\overline{z} - \overline{w}$. Racunam cemu je jednako $z \cdot \overline{w}$:

$$z \cdot \overline{w} = (5 - 2i) \cdot (\overline{1 - 4i})$$

Prisjetim se da se komplesno konjugiranje kompleksnog broja $z = x + yi$ izvrsi na nacin da se promijeni predznak ispred kompleksnog dijela, dakle $\overline{z} = x - yi$. Imajuci to na umu racunam dalje:

$$z \cdot \overline{w} = (5 - 2i) \cdot (\overline{1 - 4i}) = (5 - 2i) \cdot (1 + 4i)$$

Mnozenje se odvija po principu svaki sa svakim. Racunam dalje:

$$z \cdot \overline{w} = (5 - 2i) \cdot (1 + 4i) = 5 \cdot 1 + 5 \cdot 4i + (-2i) \cdot 1 + (-2i) \cdot (4i)$$

Sredim dani izraz:

$$z \cdot \overline{w} = 5 + 20i - 2i - 8i^2 = 5 + 18i - 8i^2$$

Imajuci na umu da je $i^2 = -1$ dalje racunam:

$$z \cdot \overline{w} = 5 + 18i - 8i^2 = 5 + 18i - 8 \cdot (-1) = 5 + 18i + 8$$

Dakle kad sve sredim dobijem:

$$z \cdot \overline{w} = 13 + 18i$$

Nadalje racunam cemu je jednako $w \cdot \overline{z}$:

$$w \cdot \overline{z} = (1 - 4i) \cdot (\overline{5 - 2i})$$

Prisjetim se da se komplesno konjugiranje kompleksnog broja $z = x + yi$ izvrsi na nacin da se promijeni predznak ispred kompleksnog dijela, dakle $\overline{z} = x - yi$. Imajuci to na umu racunam dalje:

$$w \cdot \overline{z} = (1 - 4i) \cdot (\overline{5 - 2i}) = (1 - 4i) \cdot (5 + 2i)$$

Mnozenje se odvija po principu svaki sa svakim. Racunam dalje:

$$w \cdot \overline{z} = (1 - 4i) \cdot (5 + 2i) = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2i + (-4i) \cdot 5 + (-4i) \cdot (2i)$$

Sredim dani izraz:

$$w \cdot \overline{z} = 5 + 2i - 20i - 8i^2 = 5 - 18i - 8i^2$$

Imajuci na umu da je $i^2 = -1$ dalje racunam:

$$w \cdot \overline{z} = 5 - 18i - 8i^2 = 5 - 18i - 8 \cdot (-1) = 5 - 18i + 8$$

Dakle kad sve sredim dobijem:

$$w \cdot \overline{z} = 13 - 18i$$

Nadalje racunam cemu je jednako $\overline{z} - \overline{w}$:

$$\overline{z} - \overline{w} = \overline{5 - 2i} - (\overline{1 - 4i})$$

Prisjetim se da se komplesno konjugiranje kompleksnog broja $z = x + yi$ izvrsi na nacin da se promijeni predznak ispred kompleksnog dijela, dakle $\overline{z} = x - yi$. Imajuci to na umu racunam dalje:

$$\overline{z} - \overline{w} = \overline{5 - 2i} - (\overline{1 - 4i}) = 5 + 2i - (1 + 4i)$$

$$\overline{z} - \overline{w} = 5 + 2i - (1 + 4i) = 5 + 2i - 1 - 4i = 4 - 2i$$

Dakle kad sve sredim dobijem:

$$\overline{z} - \overline{w} = 4 - 2i$$

Sad kad smo izracunali pojedine dijelove pocetnog izraza vratimo se na taj izraz te pojedine dijelove zamijenimo sa izrazunatim vrijednostima. Dakle racunam:

$$\frac{z \cdot \overline{w} + w \cdot \overline{z}}{\overline{z} - \overline{w}} = \frac{13 + 18i + (13 - 18i)}{4 - 2i} = \frac{13 + \cancel{18i} + 13 - \cancel{18i}}{4 - 2i}$$

$$\frac{z \cdot \overline{w} + w \cdot \overline{z}}{\overline{z} - \overline{w}} = \frac{26}{4 - 2i}$$

Dakle vidim da moram provesti dijeljenje kompleksnih brojeva, a to cinim tako da brojnik i nazivnik pomnozim sa kompleksnom konjugacijom nazivnika, u nasem slucaju to je $4 + 2i$. Racunam:

$$\frac{z \cdot \overline{w} + w \cdot \overline{z}}{\overline{z} - \overline{w}} = \frac{26}{4 - 2i} \cdot \frac{4 + 2i}{4 + 2i} = \frac{26 \cdot (4 + 2i)}{(4 - 2i) \cdot (4 + 2i)}$$

U nazivniku prepoznajem razliku kvadata, dakle slijedi:

$$\frac{z \cdot \overline{w} + w \cdot \overline{z}}{\overline{z} - \overline{w}} = \frac{26 \cdot (4 + 2i)}{(4 - 2i) \cdot (4 + 2i)} = \frac{26 \cdot (4 + 2i)}{4^2 - (2i)^2} = \frac{26 \cdot (4 + 2i)}{16 - 4i^2}$$

Imajuci na umu da je $i^2 = -1$ dalje racunam:

$$\frac{z \cdot \overline{w} + w \cdot \overline{z}}{\overline{z} - \overline{w}} = \frac{26 \cdot (4 + 2i)}{16 - 4i^2} = \frac{26 \cdot (4 + 2i)}{16 - 4 \cdot (-1)} = \frac{26 \cdot (4 + 2i)}{16 + 4} = \frac{26 \cdot (4 + 2i)}{20}$$

Kad se krajnji izraz jos malo sredi dobije se:

$$\frac{z \cdot \overline{w} + w \cdot \overline{z}}{\overline{z} - \overline{w}} = \frac{26 \cdot (4 + 2i)}{20} = \frac{104 + 52i}{20} = \frac{104}{20} + \frac{52}{20}i$$

Kad se pokrate razlomci dobije se konacan rezultat:

$$\frac{z \cdot \overline{w} + w \cdot \overline{z}}{\overline{z} - \overline{w}} = \frac{\cancel{104}^{26}}{\cancel{20}_5} + \frac{\cancel{52}^{13}}{\cancel{20}_5}i = \frac{26}{5} + \frac{13}{5}i$$

Dakle konacno rjesenje jest:

$$\frac{z \cdot \overline{w} + w \cdot \overline{z}}{\overline{z} - \overline{w}} = \frac{26}{5} + \frac{13}{5}i$$

$- \star -$

Zadatak 5: (knjiga str. 26 pod 3)) Rijesi u skupu $\mathbb{C}$ sljedecu jednadzbu:

$$|z + 1| + z + i = 0$$

Rjesenje: Rjedavati jednadzbe direktno u skupu $\mathbb{C}$, dakle koristenjem operacija nad skupom $\mathbb{C}$, ne znamo, ali znamo da z mozemo zapisati u obliku $z = x + yi$. Zamijenimo sada svaki z u danoj jednadzbi s $x + yi$ te dobijemo:

$$|x + yi + 1| + x + yi + i = 0$$

Gruirajmo sada realne i imaginarne dijelove unutar zagrade i izvan nje:

$$|x + 1 + yi| + x + yi + i = 0$$

Uocim da mogi izluciti iz zadnja dva clana izvan zagrade u jednadzbi:

$$|x + 1 + yi| + x + (y + 1)i = 0$$

Oznacim si kompleksan broj unutar zagrade s w:

$$|\underbrace{x + 1 + yi}_{\text{w}}| + x + (y + 1)i = 0$$

Prisjetim se na koji nacin racuma modul kompleksnog broja w oblika $w = x + yi$. Dakle izraz za racunanje modula jest $|w| = \sqrt{(\operatorname{Re} w)^2 + (\operatorname{Im} w)^2}$. Dakle trebam zakljuciti cemu je jendak $\operatorname{Re} w$ i $\operatorname{Im} w$ ako je $w = x + 1 + yi$. Vrijedi sljedece:

$$\operatorname{Re} w = x + 1$$

$$\operatorname{Im} w = y$$

Tada je dakle $|w|$ jednako:

$$|w| = \sqrt{(\operatorname{Re} w)^2 + (\operatorname{Im} w)^2} = \sqrt{(x + 1)^2 + y^2}$$

Imajuci to na umu pocetna jednadzba poprima sljedeci oblik:

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}+x+(y+1)i=0$$

Ovo se sada svodi na jednakost kompleksnih brojeva, oznacim kompleksan broj s lijeve strane s u, a kompleksan broj s desne strane s v:

$$\underbrace{\sqrt{(x+1)^2+y^2}+x+(y+1)i}_{\text{u}}=\underbrace{0}_{\text{v}}$$

Znamo da ce ta dva kompleksna broja biti jednaka ako su im realni odnosno kompleksni dijelovi jednaki sto drugim rijecima znaci da moram odrediti realne i kompleksne dijelove kompleksnih brojeva u i v. Vrijedi sljedece:

$$\operatorname{Re} u=\sqrt{(x+1)^2+y^2}+x$$

$$\operatorname{Im} u=y+1$$

$$\operatorname{Re} v=0$$

$$\operatorname{Im} v=0$$

Dakle kako mora vrijediti $\operatorname{Re} u=\operatorname{Re} v$ i $\operatorname{Im} u=\operatorname{Im} v$ dobijam sljedeci sustav jednadzbi:

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}+x=0$$

$$y+1=0$$

Druga jednadzba se lako rijesi:

$$y+1=0$$

$$y=-1$$

Uvrstimo sada to u prvu jednadzbu:

$$\sqrt{(x+1)^2+(-1)^2}+x=0$$

$$\sqrt{(x+1)^2+1}+x=0$$

Prebacim x na lijevu stranu tako da korijen ostane sam na lijevoj strani:

$$\sqrt{(x+1)^2+1}=-x$$

Dobiveni izraz kvadriram:

$$\sqrt{(x+1)^2+1}=-x\ /^2$$

$$\left(\sqrt{(x+1)^2+1}\right)^2=(-x)^2$$

Posto je izraz pod korijenom uvijek pozitivan, ne moram pisati nikakve uvjete. Dakle korijen na desnoj strani mogu eliminirati, pa slijedi:

$$(x+1)^2 + 1 = x^2$$

Raspisem zagradu na desnoj strani po pravilu za kvadrat binoma, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, te dobijem:

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 + 1 = x^2$$

$$x^2 + 2x + 1 + 1 = x^2$$

$$\cancel{x^2} + 2x + 2 = \cancel{x^2}$$

Pokratim x^2 s obje strane sto rezultira linearnom jednadzbom koju znam rjesiti, pa racunam dalje:

$$2x + 2 = 0$$

$$2x = -2 \;/ : 2$$

$$x = -1$$

Dakle izracunali smo da mora vrijediti $x = -1$ i $y = -1$. No kako smo na pocetku pretpostavili da je $z = x + yi$ krajnje rjesenje je zapravo:

$$z = x + yi$$

$$z = -1 + (-1) \cdot i = -1 - i$$

Trazeni kompleksan broj jest $z = -1 - i$.

$- \star -$