Eksponencijalne jednadzbe - drugi dio

Zadatak 20: Rijesi eksponencijalnu jednadzbu:

$$4^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} = 3$$

Rjesenje:
Promotrim li jednadzbu uocavam da bazu 4 mogu prikazati u obliku potencije s bazom 2:

$$(2^2)^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} = 3$$

Sredim lijevu stranu jednadzbu prema pravilu za potenciranje potencija $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$:

$$2^{2 \cdot \left(\frac{1}{x}-1\right)} - 2^{\frac{1}{x}-2} = 3$$

$$2^{2 \cdot \frac{1}{x}-2} - 2^{\frac{1}{x}-2} = 3$$

Rastavim potencije u jednadzbi prema pravilu za mnozenje potencija istih baza $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$:

$$2^{2 \cdot \frac{1}{x}} \cdot 2^{-2} - 2^{\frac{1}{x}} \cdot 2^{-2} = 3$$

Sredim jednadzbu prema pravilu za potencije s negativnim eksponentom $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$:

$$2^{2 \cdot \frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{2^2} - 2^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{2^2} = 3$$

$$2^{2 \cdot \frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{4} - 2^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{4} = 3$$

Sredim malo jednadzbu mnozeci je sa 4:

$$2^{2 \cdot \frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{4} - 2^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{4} = 3 \ / \cdot 4$$

$$2^{2 \cdot \frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x}} = 12$$

Zapisem malo drugacije potenciju $2^{2 \cdot \frac{1}{x}}$ prema pravilu za potenciranje potencija $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$, dakle vrijedi:

$$2^{2 \cdot \frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{x} \cdot 2} = \left(2^{\frac{1}{x}}\right)^2$$

Vratimo se sada s tim saznanjem u eksponencijalnu jednadzbu:

$$\left(2^{\frac{1}{x}}\right)^2 - 2^{\frac{1}{x}} = 12$$

Uocim da mogu uvesti supstituciju $t = 2^{\frac{1}{x}}$ pa jednadzba prelazi u sljedeci oblik:

$$t^2 - t = 12$$

$$t^2 - t - 12 = 0$$

Ovo je kvadratna funkcija koju lako rjesim koristeci se formulom $t_1, t_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$:

$$t_1, t_2 = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1}$$

$$t_1, t_2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2}$$

$$t_1, t_2 = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$t_1, t_2 = \frac{1 \pm 7}{2}$$

Dakle rijesenja ove kvadratne jednadzbe su:

$$t_1 = \frac{-6}{2} = -3 \text{ i } t_2 = \frac{8}{2} = 4$$

Sada kada smo izracunali cemu je jednak t rijesimo jednadzbe $t_1 = 2^{\frac{1}{x}}$ i $t_2 = 2^{\frac{1}{x}}$:

$$2^{\frac{1}{x}} = -3$$

$$2^{\frac{1}{x}} = 4$$

Promotrimo prvo prvu jednadzbu, kako vrijednosti eksponencijalne funkcije ne mogu biti negativne, mogu odmah zakljuciti da prva jednadzba nema rjesenje. Usredotocimo se onda na drugu jednadzbu:

$$2^{\frac{1}{x}} = 4$$

Uocavam da 4 na desnoj stani jednadzbe mogu prikazati kao potenciju baze 2:

$$2^{\frac{1}{x}} = 2^2$$

Prema svojstvu eksponencijalne funkcije $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$ slijedi:

$$\frac{1}{x} = 2 \ / \cdot x$$

$$1 = 2x \ / : 2$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Dakle jedino rjesenje pocetne jednadzbe jest $x = \frac{1}{2}$.

Zadatak 21: Rijesi eksponencijalnu jednadzbu:

$$12 \cdot 3^{\frac{1}{2x}} - 3^{\frac{1}{x}} = 27$$

Rjesenje:
Promatranjem jednadzbe dolazim do jedne kljucne cinjenice, a to je da vrijedi sljedece:

$$\frac{1}{x} = 2 \cdot \frac{1}{2x}$$

Nakon sto sam ovo uocio potenciju $3^{\frac{1}{x}}$ mogu zapisati kao:

$$3^{\frac{1}{x}} = 3^{2 \cdot \frac{1}{2x}}$$

Dakle vartim li se u pocetnu jednadzbu onda sada poprima sljedeci oblik:

$$12 \cdot 3^{\frac{1}{2x}} - 3^{2 \cdot \frac{1}{2x}} = 27$$

Zapisem malo drugacije potenciju $3^{2 \cdot \frac{1}{2x}}$ prema pravilu za potenciranje potencija $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$, dakle vrijedi:

$$3^{2 \cdot \frac{1}{2x}} = 3^{\frac{1}{2x} \cdot 2} = \left(3^{\frac{1}{2x}}\right)^2$$

Vratimo se sada s tim saznanjem u eksponencijalnu jednadzbu:

$$12 \cdot 3^{\frac{1}{2x}} - \left(3^{\frac{1}{2x}}\right)^2 = 27$$

Uocim da mogu uvesti supstituciju $t = 3^{\frac{1}{2x}}$ pa jednadzba prelazi u sljedeci oblik:

$$12t - t^2 = 27$$

$$-t^2 + 12t - 27 = 0 \; / \cdot (-1)$$

$$t^2 - 12t + 27 = 0$$

Ovo je kvadratna funkcija koju lako rjesim koristeci se formulom $t_1, t_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$:

$$t_1, t_2 = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 27}}{2 \cdot 1}$$

$$t_1, t_2 = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 108}}{2}$$

$$t_1, t_2 = \frac{12 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$t_1, t_2 = \frac{12 \pm 6}{2}$$

Dakle rijesenja ove kvadratne jednadzbe su:

$$t_1 = \frac{6}{2} = 3 \text{ i } t_2 = \frac{18}{2} = 9$$

Sada kada smo izracunali cemu je jednak t rijesimo jednadzbe $t_1 = 3^{\frac{1}{2x}}$ i $t_2 = 3^{\frac{1}{2x}}$:

$$3^{\frac{1}{2x}} = 3$$
$$3^{\frac{1}{2x}} = 9$$

Rjesimo prvo prvu jednadzbu:

$$3^{\frac{1}{2x}} = 3$$
$$3^{\frac{1}{2x}} = 3^1$$

Prema svojstvu eksponencijalne funkcije $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$ slijedi:

$$\frac{1}{2x} = 1 \ / \cdot 2x$$
$$1 = 2x \ / : 2$$
$$x = \frac{1}{2}$$

Rjesimo sada drugu jednadzbu:

$$3^{\frac{1}{2x}} = 9$$

Uocimo da mozemo 9 prikazati kao potenciju baze 3:

$$3^{\frac{1}{2x}} = 3^2$$

Prema svojstvu eksponencijalne funkcije $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$ slijedi:

$$\frac{1}{2x} = 2 \ / \cdot 2x$$
$$1 = 4x \ / : 4$$
$$x = \frac{1}{4}$$

Dakle rjesenja dane eksponencijalne jednadzbe su $x_1 = \frac{1}{2}$ i $x_2 = \frac{1}{4}$.

Zadatak 22: Rijesi eksponencijalnu jednadzbu:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{x}} = \frac{16}{9}$$

Rjesenje:
Promatranjem jednadzbe mogu uociti da se brojevi s desne strane, dakle broj 16 moze prikazati kao potencija baze 4, dok se broj 9 mzoe prikazati kao potencija baze 3:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{x}} = \frac{4^2}{3^2}$$

Prema pravilu za dijeljenje potencija istih eksponenata $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ sredim desnu stranu jednadzbu:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{x}} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

Uocimo da su baze drugih dviju potencija, $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{x}}$ i $\left(\frac{4}{3}\right)^2$ jednake. Nadalje uocavam da je baza prve potencije, $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}$, reciprocna u odnosu na baze drugih dviju potencija, no tada vrijedi:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{4}$$

Vratim se sa tim saznanjem u pocetnu jednadzbu:

$$\left(\left(\frac{4}{3}\right)^{-1}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{x}} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

Sredim jednadzbu prema pravilu za potencije s negativnim eksponentom $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{(-1)(x-1)} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{x}} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{-x+1} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{x}} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

Sredim lijevu stranu jednadzbe prema pravilu za mnozenje potencija istih baza $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{-x+1+\frac{2}{x}} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

Prema svojstvu eksponencijalne funkcije $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$ slijedi:

$$-x + 1 + \frac{2}{x} = 2$$

$$-x + 1 + \frac{2}{x} = 2 \; / \cdot x$$

$$-x^2 + x + 2 = 2x$$

$$-x^2 + x - 2x + 2 = 0$$

$$-x^2 - x + 2 = 0 \; / \cdot (-1)$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

Ovo je kvadratna funkcija koju lako rjesim koristeci se formulom $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$:

$$x_1, x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$
$$x_1, x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2}$$
$$x_1, x_2 = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

Dakle rijesenja ove kvadratne jednadzbe su:

$$x_1 = \frac{-4}{2} = -2 \text{ i } x_2 = \frac{2}{2} = 1$$

No to su ujedno i rjesenja pocetne eksponencijalne jednadzbe.

Zadatak 23: Rijesi eksponencijalnu jednadzbu:

$$\frac{1}{4} \cdot 2^{x+\frac{1}{x}} = 8^{1-x}$$

Rjesenje:
Uocimo prvo da broj 4 s lijeve strane mozemo prikazati u obliku potencije s bazom 2 isto kao sto mozemo i bazu potencije 8^{1-x} prikazati kao potenciju baze 2:

$$\frac{1}{2^2} \cdot 2^{x+\frac{1}{x}} = (2^3)^{1-x}$$

Sredim lijevu stranu jednadzbe prema pravilu za potencije s negativnim eksponentom
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$:

$$2^{-2} \cdot 2^{x+\frac{1}{x}} = (2^3)^{1-x}$$

Sredim lijevu stranu jednadzbe prema pravilu za mnozenje potencija istih baza $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$:

$$2^{-2+x+\frac{1}{x}} = (2^3)^{1-x}$$

Sredim desnu stranu jednadzbe prema pravilu za potenciranje potencija
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$:

$$2^{-2+x+\frac{1}{x}} = 2^{3(1-x)}$$
$$2^{-2+x+\frac{1}{x}} = 2^{3-3x}$$

Prema svojstvu eksponencijalne funkcije $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$ slijedi:

$$-2 + x + \frac{1}{x} = 3 - 3x$$

$$-2 + x + \frac{1}{x} = 3 - 3x \ / \cdot x$$

$$-2x + x^2 + 1 = 3x - 3x^2$$

$$-2x + x^2 + 1 - 3x + 3x^2 = 0$$

$$4x^2 - 5x + 1 = 0$$

Ovo je kvadratna funkcija koju lako rjesim koristeci se formulom $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$:

$$x_1, x_2 = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4}$$

$$x_1, x_2 = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{8}$$

$$x_1, x_2 = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{8}$$

$$x_1, x_2 = \frac{5 \pm 3}{8}$$

Dakle rijesenja ove kvadratne jednadzbe su:

$$x_1 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \text{ i } x_2 = \frac{8}{8} = 1$$

No to su ujedno i rjesenja pocetne eksponencijalne jednadzbe.

Zadatak 24: Rijesi eksponencijalnu jednadzbu:

$$9 \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 5 \cdot 6^{\frac{1}{x}} = 4 \cdot 9^{\frac{1}{x}}$$

Rjesenje:
Promatrajuci danu jednadzbu vidim da sve tri potencije imaju razlicite baze, ali iste potencije. Pokusajmo rastaviti dane baze na faktore, vrijedi sljedece:

$$4 = 2 \cdot 2$$

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$9 = 3 \cdot 3$$

Dakle ono sto mogu uociti jest da baza 6 sadrzi faktore preostale dvije baze. To mi daje ideju da probam podijeliti pocetnu jednadzbu s potencijom $6^{\frac{1}{x}}$:

$$9 \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 5 \cdot 6^{\frac{1}{x}} = 4 \cdot 9^{\frac{1}{x}} \; / : 6^{\frac{1}{x}}$$

$$9 \cdot \frac{4^{\frac{1}{x}}}{6^{\frac{1}{x}}} + 5 \cdot \frac{6^{\frac{1}{x}}}{6^{\frac{1}{x}}} = 4 \cdot \frac{9^{\frac{1}{x}}}{6^{\frac{1}{x}}}$$

Sredim malo dobivenu jednadzbu:

$$9 \cdot \frac{4^{\frac{1}{x}}}{6^{\frac{1}{x}}} + 5 = 4 \cdot \frac{9^{\frac{1}{x}}}{6^{\frac{1}{x}}}$$

Prema pravilu za dijeljenje potencija istih eksponenata $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ sredim jednadzbu:

$$9 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^{\frac{1}{x}} + 5 = 4 \cdot \left(\frac{9}{6}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Pokratimo dobivene razlomke:

$$9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}} + 5 = 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Uocim da su baze potencija $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ i $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ reciprocne odnosno da vrijedi:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{3}$$

Vratim se sa tim saznanjem u jednadzbu:

$$9 \cdot \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{x}} + 5 = 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Prema pravilu za potenciranje potencija $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ vrijedi sljedece:

$$\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{(-1)\cdot\frac{1}{x}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}\cdot(-1)} = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\right)^{-1}$$

Vratim se s time u pocetnu jednadzbu i dobijem izraz oblika:

$$9 \cdot \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\right)^{-1} + 5 = 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

No sada uocim da mogu uvesti supstituciju $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ te moja jednadzbe prijedje u sljedeci oblik:

$$9t^{-1} + 5 = 4t$$

Sredim lijevu stranu jednadzbe prema pravilu za potencije s negativnim eksponentom
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$:

$$9 \cdot \frac{1}{t} + 5 = 4t$$

$$9 \cdot \frac{1}{t} + 5 = 4t \ / \cdot t$$

$$9 + 5t = 4t^2$$

$$-4t^2 + 5t + 9 = 0 \ / \cdot (-1)$$

$$4t^2 - 5t - 9 = 0$$

Daljnjim sredjivanjem vidim da sam dobio kvadratnu jednadzbu koju lako rjesim koristeci se formulom $t_1, t_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$:

$$t_1, t_2 = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-9)}}{2 \cdot 4}$$

$$t_1, t_2 = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{8}$$

$$t_1, t_2 = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{8}$$

$$t_1, t_2 = \frac{5 \pm 13}{8}$$

Dakle rijesenja ove kvadratne jednadzbe su:

$$t_1 = \frac{-8}{8} = -1 \text{ i } t_2 = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$$

Sada kada smo izracunali cemu je jednak t rijesimo jednadzbe $t_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ i $t_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = -1$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{9}{4}$$

Promotrimo prvo prvu jednadzbu, kako vrijednosti eksponencijalne funkcije ne mogu biti negativne, mogu odmah zakljuciti da prva jednadzba nema rjesenje. Usredotocimo se onda na drugu jednadzbu:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{9}{4}$$

Uocimo da broj 9 mozemo zapisati kao potenciju s bazom 3, dok 4 mozemo zapisati kao potenciju s bazom 2:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{3^2}{2^2}$$

Prema pravilu za dijeljenje potencija istih eksponenata $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ sredim jednadzbu:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

Prema svojstvu eksponencijalne funkcije $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$ slijedi:

$$\frac{1}{x} = 2$$

$$\frac{1}{x} = 2 \;/\cdot x$$
$$1 = 2x \;/\; 2$$
$$x = \frac{1}{2}$$

Dakle jedino rjesenje pocetne jednadzbe jest $x = \frac{1}{2}$.

Zadatak 25: Rijesi eksponencijalnu jednadzbu:

$$9 \cdot 2^{x+1} + 4 \cdot 3^{x+1} = 35 \cdot \sqrt{6^x}$$

Rjesenje:
Rastavim potencije na lijevoj strani jednadzbe prema pravilu za mnozenje potencija istih baza $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$:

$$9 \cdot 2^x \cdot 2^1 + 4 \cdot 3^x \cdot 3^1 = 35 \cdot \sqrt{6^x}$$
$$9 \cdot 2 \cdot 2^x + 4 \cdot 3 \cdot 3^x = 35 \cdot \sqrt{6^x}$$
$$18 \cdot 2^x + 12 \cdot 3^x = 35 \cdot \sqrt{6^x}$$

Nadalje znam da n-ti korijen iz nekog broja mogu zapisati kao potenciju prema sljedecem pravilu: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, dakle tada mogu desnu stranu jednadzbe zapisati u sljedecem obliku:

$$18 \cdot 2^x + 12 \cdot 3^x = 35 \cdot (6^x)^{\frac{1}{2}}$$

Sredim desnu stranu jednadzbe prema pravilu za potenciranje potencija $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$:

$$18 \cdot 2^x + 12 \cdot 3^x = 35 \cdot 6^{\frac{1}{2} \cdot x}$$

Promotrim jednadzu u trenutnom obliku i uocim da je umnozak baza potencija na lijevoj strani upravo jednak bazi potencije na desnoj strani. To mi daje ideju da jednadzbu podijelim s potencijom na desnoj stani odnosno s $6^{\frac{1}{2} \cdot x}$:

$$18 \cdot 2^x + 12 \cdot 3^x = 35 \cdot 6^{\frac{1}{2} \cdot x} \;/ : 6^{\frac{1}{2} \cdot x}$$

$$\frac{18 \cdot 2^x}{6^{\frac{1}{2} \cdot x}} + \frac{12 \cdot 3^x}{6^{\frac{1}{2} \cdot x}} = \frac{35 \cdot 6^{\frac{1}{2} \cdot x}}{6^{\frac{1}{2} \cdot x}}$$

Sredjivanjem se dobije sljdeci izraz:

$$18 \cdot \frac{2^x}{6^{\frac{1}{2} \cdot x}} + 12 \cdot \frac{3^x}{6^{\frac{1}{2} \cdot x}} = 35$$

Ako malo promotrimo lijevu stranu, tocnije kvocijente potencija an lijevoj strani, vidimo da se u tim kvocijentima nalaze potencije razlicitih baza i eksponenata pa ih ne mozemo nikako podijeliti. Sjetimo se s druge strane da vrijedi $\sqrt{4} = 2$ te $\sqrt{9} = 3$. Vratimo se sa tim saznanjem u nasu jednadzbu:

$$18 \cdot \frac{(\sqrt{4})^x}{6^{\frac{1}{2} \cdot x}} + 12 \cdot \frac{(\sqrt{9})^x}{6^{\frac{1}{2} \cdot x}} = 35$$

Zapisem korijene kao potencije prema pravilu $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ i dobijem:

$$18 \cdot \frac{(4^{\frac{1}{2}})^x}{6^{\frac{1}{2} \cdot x}} + 12 \cdot \frac{(9^{\frac{1}{2}})^x}{6^{\frac{1}{2} \cdot x}} = 35$$

Sredim lijevu stranu jednadzbe prema pravilu za potenciranje potencija $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$:

$$18 \cdot \frac{4^{\frac{1}{2} \cdot x}}{6^{\frac{1}{2} \cdot x}} + 12 \cdot \frac{9^{\frac{1}{2} \cdot x}}{6^{\frac{1}{2} \cdot x}} = 35$$

Prema pravilu za dijeljenje potencija istih eksponenata $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ sredim lijevu stranu jednadzbu:

$$18 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^{\frac{1}{2} \cdot x} + 12 \cdot \left(\frac{9}{6}\right)^{\frac{1}{2} \cdot x} = 35$$

$$18 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2} \cdot x} + 12 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2} \cdot x} = 35$$

Uocim da su baze potencija $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2} \cdot x}$ i $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2} \cdot x}$ reciprocne odnosno da vrijedi:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{3}$$

Vratim se s tim saznanjem u jednadzbu:

$$18 \cdot \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2} \cdot x} + 12 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2} \cdot x} = 35$$

Prema pravilu za potenciranje potencija $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ vrijedi sljedece:

$$\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2} \cdot x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{(-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2} \cdot x \cdot (-1)} = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2} \cdot x}\right)^{-1}$$

Vratim se s time u pocetnu jednadzbu i dobijem izraz oblika:

$$18 \cdot \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2} \cdot x}\right)^{-1} + 12 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2} \cdot x} = 35$$

No sada uocim da mogu uvesti supstituciju $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2} \cdot x}$ te moja jednadzbe prijedje u sljedeci oblik:

$$18t^{-1} + 12t = 35$$

Sredim lijevu stranu jednadzbe prema pravilu za potencije s negativnim eksponentom
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$:

$$18 \cdot \frac{1}{t} + 12t = 35$$

$$18 \cdot \frac{1}{t} + 12t = 35 \ / \cdot t$$

$$18 + 12t^2 = 35t$$

$$12t^2 - 35t + 18 = 35t$$

Daljnjim sredjivanjem vidim da sam dobio kvadratnu jednadzbu koju lako rjesim koristeci se formulom $t_1, t_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$:

$$t_1, t_2 = \frac{35 \pm \sqrt{(-35)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 18}}{2 \cdot 12}$$

$$t_1, t_2 = \frac{35 \pm \sqrt{1225 - 864}}{24}$$

$$t_1, t_2 = \frac{35 \pm \sqrt{361}}{24}$$

$$t_1, t_2 = \frac{35 \pm 19}{24}$$

Dakle rijesenja ove kvadratne jednadzbe su:

$$t_1 = \frac{54}{24} = \frac{9}{4} \text{ i } t_2 = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

Sada kada smo izracunali cemu je jednak t rijesimo jednadzbe $t_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2} \cdot x}$ i $t_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2} \cdot x}$:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2} \cdot x} = \frac{9}{4}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2} \cdot x} = \frac{2}{3}$$

Rjesimo prvo prvu jednadzbu, uocimo da broj 9 mozemo zapisati kao potenciju s bazom 3, dok 4 mozemo zapisati kao potenciju s bazom 2:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2} \cdot x} = \frac{3^2}{2^2}$$

Prema pravilu za dijeljenje potencija istih eksponenata $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ sredim jednadzbu:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2} \cdot x} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

Prema svojstvu eksponencijalne funkcije $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$ slijedi:

$$\frac{1}{2} \cdot x = 2 \ / \cdot 2$$

$$x = 4$$

Rjesimo sada drugu jednadzbu:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}\cdot x} = \frac{2}{3}$$

Uocim da su baze potencija $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}\cdot x}$ i $\frac{2}{3}$ reciprocne odnosno da vrijedi:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{3}$$

Vratim se sa tim saznanjem u jednadzbu:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}\cdot x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$$

Prema svojstvu eksponencijalne funkcije $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$ slijedi:

$$\frac{1}{2} \cdot x = -1 \ / \cdot 2$$

$$x = -2$$

Dakle rjesenja pocetne eksponencijalne jednadzbe su $x_1 = 4$ i $x_2 = -2$.

Zadatak 26: Rijesi eksponencijalnu jednadzbu:

$$5^{-\frac{1}{2}\cdot x} = 25 \cdot 0.2^{|2-x|}$$

Rjesenje:
Za pocetak zapisem 25 kao potenciju baze 5, te pretvorim 0.2 u razlomak:

$$5^{-\frac{1}{2}\cdot x} = 5^2 \cdot \left(\frac{2}{10}\right)^{|2-x|}$$

$$5^{-\frac{1}{2}\cdot x} = 5^2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{|2-x|}$$

Sredim desnu stranu jednadzbe prema pravilu za potencije s negativnim eksponentom
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$:

$$5^{-\frac{1}{2}\cdot x} = 5^2 \cdot \left(5^{-1}\right)^{|2-x|}$$

Sredim desnu stranu jednadzbe prema pravilu za potenciranje potencija $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$:

$$5^{-\frac{1}{2} \cdot x} = 5^2 \cdot 5^{(-1)|2-x|}$$

Sredim desnu stranu jednadzbe prema pravilu za mnozenje potencija istih baza $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$:

$$5^{-\frac{1}{2} \cdot x} = 5^{2-|2-x|}$$

Prema svojstvu eksponencijalne funkcije $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$ slijedi:

$$-\frac{1}{2} \cdot x = 2 - |2 - x|$$

Dakle dobio sam jednadzbu s apsolutnim vrijednostima. Prvo racunam:

$$2 - x = 0$$

$$x = 2$$

Dakle imam sljedeca dva slucaja:

Prvi slucaj:	Drugi slucaj:
$x \in \langle -\infty, 2 \rangle$	$x \in [2, +\infty\rangle$
$-\frac{1}{2} \cdot x = 2 - (2 - x)$	$-\frac{1}{2} \cdot x = 2 - (-(2 - x))$
$-\frac{1}{2} \cdot x = 2 - 2 + x$	$-\frac{1}{2} \cdot x = 2 + 2 - x$
$-\frac{1}{2} \cdot x = x$	$-\frac{1}{2} \cdot x = 4 - x$
$-\frac{1}{2} \cdot x - x = 0$	$-\frac{1}{2} \cdot x + x = 4$
$-\frac{3}{2} \cdot x = 0 \;/ : \left(-\frac{3}{2}\right)$	$\frac{1}{2} \cdot x = 4 \;/ \cdot 2$
$x_1 = 0$	$x_2 = 8$
x_1 zadovoljava uvjet $x \in \langle -\infty, 2 \rangle$	x_2 zadovoljava uvjet $x \in [2, +\infty\rangle$

Dakle rjesenja pocetne eksponencijalne jednadzbe su $x_1 = 0$ i $x_2 = 8$.

Zadatak 27: Rijesi eksponencijalnu jednadzbu:

$$3 \cdot 27^{|1-2x|} = 9^x$$

Rjesenje:

Uocimo prvo da bazu 27 potencije $27^{|1-2x|}$ s lijeve strane kao i bazu 9 potencije 9^x mozemo prikazati kao potencije baze 3:

$$3 \cdot (3^3)^{|1-2x|} = (3^2)^x$$

Sredim jednadzbu prema pravilu za potenciranje potencija $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$:

$$3 \cdot 3^{3 \cdot |1-2x|} = 3^{2x}$$

$$3^1 \cdot 3^{3\cdot|1-2x|} = 3^{2x}$$

Sredim desnu stranu jednadzbe prema pravilu za mnozenje potencija istih baza $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$:

$$3^{1+3\cdot|1-2x|} = 3^{2x}$$

Prema svojstvu eksponencijalne funkcije $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$ slijedi:

$$1 + 3 \cdot |1-2x| = 2x$$

Dakle dobio sam jednadzbu s apsolutnim vrijednostima. Prvo racunam:

$$1 - 2x = 0$$

$$-2x = -1 \;/ : (-2)$$

$$x = \frac{-1}{-2}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Dakle imam sljedeca dva slucaja:

Prvi slucaj:	Drugi slucaj:
$x \in \left\langle -\infty, \frac{1}{2} \right\rangle$	$x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty \right\rangle$
$1 + 3 \cdot (1-2x) = 2x$	$1 + 3 \cdot (-(1-2x)) = 2x$
$1 + 3 - 6x = 2x$	$1 + 3(-1+2x) = 2x$
$-6x - 2x = -3 - 1$	$1 - 3 + 6x = 2x$
$-8x = -4 \;/ : (-8)$	$6x - 2x = 3 - 1$
$x = \frac{-4}{-8}$	$4x = 2 \;/ : 4$
$x_1 = \frac{1}{2}$	$x_2 = \frac{1}{2}$
x_1 ne zadovoljava uvjet $x \in \left\langle -\infty, \frac{1}{2} \right\rangle$	x_2 zadovoljava uvjet $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty \right\rangle$

Dakle rjesenja pocetne eksponencijalne jednadzbe su $x = \frac{1}{2}$.

<u>Zadatak 28</u>: Rijesi eksponencijalnu jednadzbu:

$$(0.4)^{\left|2x^2-3\right|} = 2.5^x$$

<u>Rjesenje:</u>
Pretvorimo na pocetku baze danih potencija iz decimalnog zapisa u razlomke:

$$\left(\frac{4}{10}\right)^{\left|2x^2-3\right|} = \left(\frac{25}{10}\right)^x$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\left|2x^2-3\right|}=\left(\frac{5}{2}\right)^{x}$$

Uocim da su baze potencija $\left(\frac{2}{5}\right)^{\left|2x^2-3\right|}$ i $\left(\frac{5}{2}\right)^{x}$ reciprocne odnosno da vrijedi:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}=\frac{5}{2}$$

Vratim se sa tim saznanjem u jednadzbu:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\left|2x^2-3\right|}=\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}\right)^{x}$$

Sredim lijevu stranu jednadzbe prema pravilu za potenciranje potencija $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\left|2x^2-3\right|}=\left(\frac{2}{5}\right)^{(-1)\cdot x}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\left|2x^2-3\right|}=\left(\frac{2}{5}\right)^{-x}$$

Prema svojstvu eksponencijalne funkcije $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$ slijedi:

$$\left|2x^2-3\right|=-x$$

Dakle dobio sam jednadzbu s apsolutnim vrijednostima. Prvo racunam:

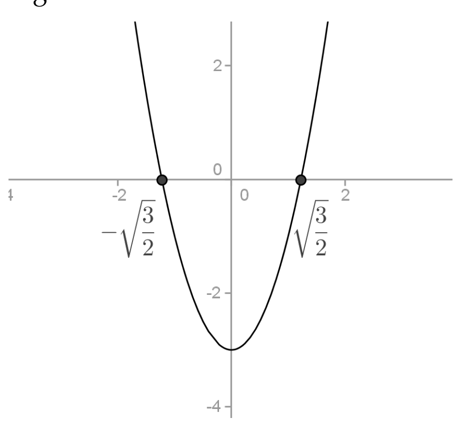
$$2x^2-3=0$$

$$2x^2=3\ /:2$$

$$x^2=\frac{3}{2}\ /\sqrt{\ }$$

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Dakle gledam kada je kvadratna funkcija $f(x) = 2x^2 - 3$ pozitivna, a kada negativna, crtam njen graf:



Dakle vidimo da je ona pozitiva na intervalu $\left\langle -\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{3}{2}}, -\infty\right\rangle$, dok je ona negativna na intervalu $\left\langle -\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right\rangle$, drugim rijecima imamo sljedeca dva slucaja: Dakle imam sljedeca dva slucaja:

Prvi slucaj:	Drugi slucaj:
$x \in \left\langle -\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{3}{2}}, -\infty\right\rangle$	$x \in \left\langle -\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right\rangle$
$2x^2 - 3 = -x$	$-(2x^2 - 3) = -x$
$2x^2 + x - 3 = 0$	$-2x^2 + 3 = -x$
	$-2x^2 + x + 3 = 0 \ / \cdot (-1)$
	$2x^2 - x - 3 = 0$

Dakle moramo rijesiti ove dvoje kvadratne jednadzbe, a njih lako rjesim koristeci se formulom $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$:

Prvi slucaj:	Drugi slucaj:
$x_1, x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2}$	$x_1, x_2 = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2}$
$x_1, x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{4}$	$x_3, x_4 = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4}$
$x_1, x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{4}$	$x_3, x_4 = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4}$
$x_1, x_2 = \frac{-1 \pm 5}{4}$	$x_3, x_4 = \frac{1 \pm 5}{4}$
$x_1 = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$	$x_3 = \frac{-4}{4} = -1$
$x_2 = \frac{4}{4} = 1$	$x_4 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$
x_1 ne zadovoljava uvjet	x_3 zadovoljava uvjet
$x \in \left\langle -\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{3}{2}}, -\infty\right\rangle$	$x \in \left\langle -\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right\rangle$
x_2 zadovoljava uvjet	x_4 ne zadovoljava uvjet
$x \in \left\langle -\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{3}{2}}, -\infty\right\rangle$	$x \in \left\langle -\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right\rangle$

Dakle rjesenja pocetne eksponencijalne jednadzbe su $x_1 = -\frac{3}{2}$ i $x_3 = -1$.