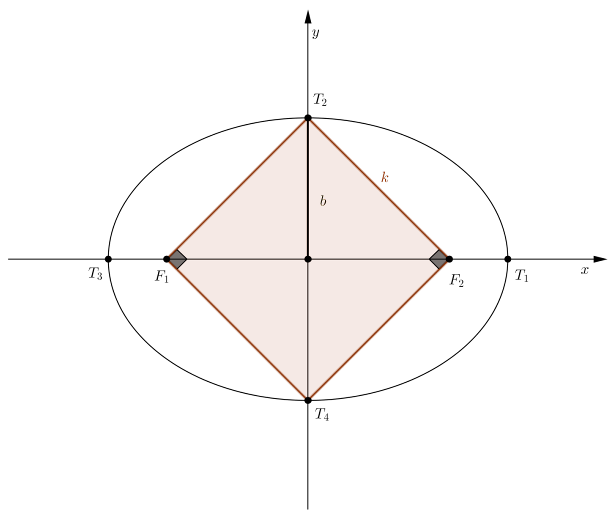
10.1 Elipsa

Zadatak 9: Dva tjemena elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ i njezina dva zarista vrhovi su kvadrata povrsine 16. Kako glasi jednadzba elipse?

Rjesenje: Prije svega promotrimo sljedecu sliku:



Tocke T_1, T_2, T_3 i T_4 su tjemena elipse. Dakle jedino tocke T_2 i T_4 mogu s fokusima elipse ciniti kvadrat. Kako je povrsina kvadrata dana mozemo odrediti velicinu stranice tog kvadrata, odnosno duljine duzina $\left|\overline{F_1T_2}\right|$, $\left|\overline{F_1T_4}\right|$, $\left|\overline{F_2T_1}\right|$ i $\left|\overline{F_2T_3}\right|$. Oznacimo duljinu stranice kvadrata s k, tada vrijedi:

$$P = k^2$$

$$16 = k^2 \ /\sqrt{}$$

$$4 = k$$

Dakle duljina stranice kvadrata jednaka je 4. Nadalje prisjetimo se da za svaku tocku T koja je nalazi na elipsi mora vrijediti

$$\left|\overline{F_1T}\right| + \left|\overline{F_2T}\right| = 2a$$

pri cemu je a velicina velike poluosi elipse. Iz skice mozemo zakljuciti da mora vrijediti

$$\left|\overline{F_1T_2}\right| + \left|\overline{F_2T_2}\right| = 2a$$

No kako su $\overline{F_1T_2}$ i $\overline{F_2T_2}$ duljine stranica kvadrata dalje slijedi:

$$4 + 4 = 2a$$

$$8 = 2a$$

Mnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{2}$, slijedi:

$$8 = 2a \;/ \cdot \frac{1}{2}$$

$$8 \cdot \frac{1}{2} = 2a \cdot \frac{1}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{4}\cancel{8}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1} = \frac{{}^{1}\cancel{2}a}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1}$$

$$\frac{4}{1} = \frac{a}{1}$$

$$4 = a$$

Dakle duljina velike poluosi iznosi 4. Nadalje promatrajuci sliku moramo zakljuciti da je duljina dijagonale kvadrata zapravo jednaka dvostrukoj malo poluosi, odnosno da vrijedi:

$$\left|\overline{T_2T_4}\right| = 2b$$

Prisjetimo se da duljinu dijagonale d kvadrata cija je stranica jednaka k racunamo prema izrazu $d = k\sqrt{2}$. Dakle slijedi:

$$4\sqrt{2} = 2b$$

Mnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{2}$, slijedi:

$$4\sqrt{2} = 2b \;/ \cdot \frac{1}{2}$$

$$4\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = 2b \cdot \frac{1}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{2}\cancel{4}\sqrt{2}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1} = \frac{{}^{1}\cancel{2}b}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{1} = \frac{b}{1}$$

$$2\sqrt{2} = b$$

Dakle duljina male poluosi iznosi $2\sqrt{2}$. Preostaje jos samo odrediti jednadzbu elipse, slijedi:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\left(2\sqrt{2}\right)^2 x^2 + 4^2y^2 = 4^2 \cdot \left(2\sqrt{2}\right)^2$$

$$2^2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 x^2 + 16y^2 = 16 \cdot 2^2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2$$

$$4 \cdot 2 \cdot x^2 + 16y^2 = 16 \cdot 4 \cdot 2$$

$$8x^2 + 16y^2 = 128$$

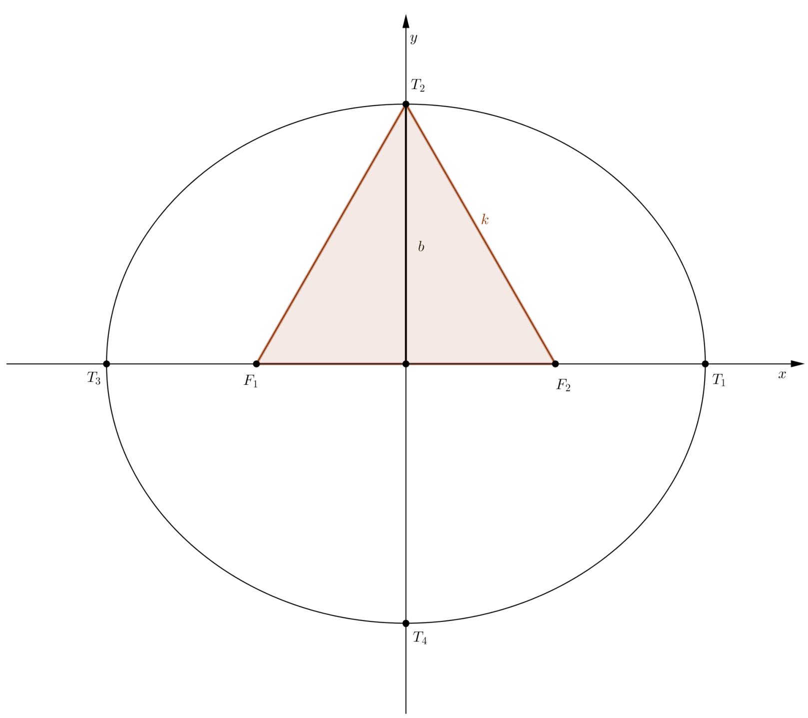
Dakle elipsa koje zadovoljava uvjete zadatka dana je jednadzbom:

$$\mathcal{E} \; ... \; 8x^2 + 16y^2 = 128$$

Time je zadatak rijesen.

Zadatak 10: Zarista elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ i jedno njezino tjeme vrhovi su jednakostranicnog trokuta povrsine $9\sqrt{3}$. Odredi jednadzbu elipse.

Rjesenje: Prije svega promotrimo sljedecu sliku:



Tocke T_1, T_2, T_3 i T_4 su tjemena elipse. Dakle jedino tocke T_2 i T_4 mogu s fokusima elipse ciniti trokut. Kako je povrsina jednakostranicnog trokuta dana mozemo odrediti velicinu stranice tog trokuta, odnosno duljine duzina

$\left|\overline{F_1T_2}\right|$, $\left|\overline{F_2T_2}\right|$ i $\left|\overline{F_1F_2}\right|$. Oznacimo duljinu stranice jednakostranicnog trokuta s k. Prisjetimo se da izraz za povrsinu jednakostranicnog trokuta ima oblik $P_\triangle = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ pri cemu je a duljina stranice jednakostanicnog trokuta. Dakle vrijedi:

$$P_\triangle = \frac{k^2\sqrt{3}}{4}$$

$$9\sqrt{3} = \frac{k^2\sqrt{3}}{4}$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$, slijedi:

$$9\sqrt{3} = \frac{k^2\sqrt{3}}{4} \;/\cdot \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$9\sqrt{3}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{k^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{9^1\cancel{\sqrt{3}}}{1}\cdot\frac{4}{\cancel{\sqrt{3}}_1} = \frac{k^{21}\cancel{\sqrt{3}}}{{}_1\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{4}^1}{\cancel{\sqrt{3}}_1}$$

$$\frac{9\cdot 4}{1} = \frac{k^2}{1}$$

$$36 = k^2 \;/\sqrt{}$$

$$6 = k$$

Dakle duljina stranice jednakostranicnog trokuta jednaka je 6. Nadalje prisjetimo se da za svaku tocku T koja je nalazi na elipsi mora vrijediti

$$\left|\overline{F_1T}\right| + \left|\overline{F_2T}\right| = 2a$$

pri cemu je a velicina velike poluosi elipse. Iz skice mozemo zakljuciti da mora vrijediti

$$\left|\overline{F_1T_2}\right| + \left|\overline{F_2T_2}\right| = 2a$$

No kako su $\overline{F_1T_2}$ i $\overline{F_2T_2}$ duljine stranica kvadrata dalje slijedi:

$$6 + 6 = 2a$$

$$12 = 2a$$

Mnozimo cijelu jednakost s $\dfrac{1}{2}$, slijedi:

$$12 = 2a \;/\cdot\frac{1}{2}$$

$$12 \cdot \frac{1}{2} = 2a \cdot \frac{1}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{6}\cancel{12}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1} = \frac{{}^{1}\cancel{2}a}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1}$$

$$\frac{6}{1} = \frac{a}{1}$$

$$6 = a$$

Dakle duljina velike poluosi iznosi 6. Nadalje promatrajuci sliku moramo zakljuciti da je duljina duzine $\overline{F_1F_2}$ zapravo jednaka dvostrukom linearnom ekscentricitetu, odnosno da vrijedi:

$$\left|\overline{F_1F_2}\right| = 2e$$

Naime prisjetimo se da su koordinate zarista elipe upravo jednaka $F_1\left(-e,0\right)$ i $F_2\left(e,0\right)$. Racunamo dalje:

$$6 = 2e$$

Mnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{2}$, slijedi:

$$6 = 2e \ / \cdot \frac{1}{2}$$

$$6 \cdot \frac{1}{2} = 2e \cdot \frac{1}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{3}\cancel{6}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1} = \frac{{}^{1}\cancel{2}e}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1}$$

$$\frac{3}{1} = \frac{e}{1}$$

$$3 = e$$

Dakle linerani eksentricitet iznosi 3. Nadalje prisjetimo se da su mala poluos, velika poluos te linerani ekscentricitet elipse medjusobno povezani izrazom $a^2 - b^2 = e^2$. Slijedi:

$$\underbrace{a}_{6}{}^2 - b^2 = \underbrace{e}_{3}{}^2$$

$$6^2 - b^2 = 3^2$$

$$36 - b^2 = 9$$

$$36 - 9 = b^2$$

$$27 = b^2 \ / \sqrt{\ }$$

$$\sqrt{27} = b$$

Djelomicno korijenujemo lijevu stranu jednakosti, slijedi:

$$3\sqrt{3} = b$$

Dakle duljina male poluosi iznosi $2\sqrt{2}$. Preostaje jos samo odrediti jednadzbu elipse, slijedi:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\left(3\sqrt{3}\right)^2 x^2 + 6^2y^2 = 6^2 \cdot \left(3\sqrt{3}\right)^2$$

$$3^2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 x^2 + 36y^2 = 36 \cdot 3^2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2$$

$$9 \cdot 3 \cdot x^2 + 36y^2 = 36 \cdot 9 \cdot 3$$

$$27x^2 + 36y^2 = 972$$

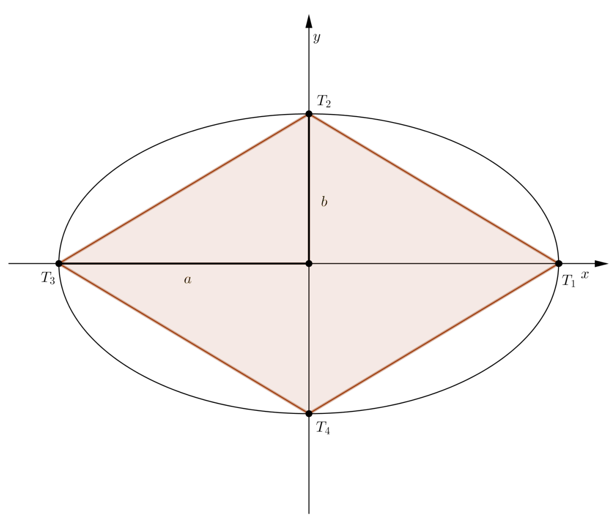
Dakle elipsa koje zadovoljava uvjete zadatka dana je jednadzbom:

$$\mathcal{E} \ ... \ 27x^2 + 36y^2 = 972$$

Time je zadatak rijesen.

Zadatak 11: Tjemena elipse su vrhovi romba cija je povrsina 30 kv, jed. Zbroj duljina dijagonala romba jednak je 16. Kako glasi jednadzba elipse?

Rjesenje: Prije svega promotrimo sljedecu sliku:



Tocke T_1, T_2, T_3 i T_4 su tjemena elipse. Nadalje uocimo da su dijagonale romba na slici jednake dvostrukoj maloj odnosno velikoj poluosi. Dakle neka vrijedi:

$$e = 2a$$

$$f = 2b$$

Prisjetimo se da su e i f standardne oznake za dijagonale kod cetverokuta. Nadalje prisjetim se da se povrsina romba kojem su poznate velicine dijagonala racuna prema izrazu $P = \dfrac{e \cdot f}{2}$. Prema podacima iz zadatka dolazimo do sljedeceg sustava jednadzbi:

$$\begin{cases} 30 = \dfrac{e \cdot f}{2} \\ e + f = 16 \end{cases}$$

Imajuci na umu da vrijedi $e = 2a$ i $f = 2b$ slijedi:

$$\begin{cases} 30 = \dfrac{\overbrace{e}^{2a} \cdot \overbrace{f}^{2b}}{2} \\ \underbrace{e}_{2a} + \underbrace{f}_{2b} = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 30 = \dfrac{2a \cdot 2b}{2} \\ 2a + 2b = 16 \end{cases}$$

Izlucimo broj 2 na lijevoj strani druge jednadzbe, slijedi:

$$\begin{cases} 30 = \dfrac{4a \cdot b}{2} \\ 2\left(a + b\right) = 16 \end{cases}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade u prvoj jednadzbi, dok drugu pomnozimo s $\dfrac{1}{2}$, slijedi:

$$\begin{cases} 30 = \dfrac{{}^{2}\cancel{4}a \cdot b}{\cancel{2}_{1}} \\ 2\left(a + b\right) = 16 \;/ \cdot \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 30 = 2a \cdot b \\ 2\left(a + b\right) \cdot \dfrac{1}{2} = 16 \cdot \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Pomnozimo prvu jednadzbu s $\dfrac{1}{2}$, a u drugoj pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\begin{cases} 30 = 2a \cdot b \;/ \cdot \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{{}^{1}\cancel{2}\left(a + b\right)}{1} \cdot \dfrac{1}{\cancel{2}_{1}} = \dfrac{{}^{8}\cancel{16}}{1} \cdot \dfrac{1}{\cancel{2}_{1}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 30 \cdot \dfrac{1}{2} = 2a \cdot b \cdot \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{a+b}{1} = \dfrac{8}{1} \end{cases}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade u prvoj jednadzbi, slijedi:

$$\begin{cases} \dfrac{^{15}\cancel{30}}{1} \cdot \dfrac{1}{\cancel{2}_1} = \dfrac{^{1}\cancel{2}a \cdot b}{1} \cdot \dfrac{1}{\cancel{2}_1} \\ a+b=8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{15}{1} = \dfrac{a \cdot b}{1} \\ a+b=8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15 = a \cdot b \\ a+b=8 \end{cases}$$

Iz druge jednadzbe izrazimo a pomocu b, slijedi:

$$\begin{cases} 15 = a \cdot b \\ a+b=8 \quad \Rightarrow \quad a = 8-b \end{cases}$$

Dobiveni izraz za a uvrstavamo u prvu jednadzbu, slijedi:

$$15 = \overbrace{a}^{8-b} \cdot b$$

$$15 = (8-b) \cdot b$$

$$15 = 8b - b^2$$

Sve clanove sume s desne strane jednakosti prebacimo na lijevu stranu, slijedi:

$$b^2 - 8b + 15 = 0$$

Time smo dobili kvadratnu jednadzbu koju rjesavamu prema izrazu za rjesenja kvadratne jednadzbe:

$${}^{\text{p-os}}b_1, {}^{\text{p-os}}b_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Napomena: Ovdje smo pisali ${}^{\text{p-os}}b_1$ i ${}^{\text{p-os}}b_2$ kako bi naglasili da se govori o nepoznanici iz kvadratne jednadzbe koja predstavlja velicinu male poluosi elipse za razliku od b koji u izrazu za rjesenja kvadratne jednadzbe predstavlja linearni koeficijent. Kasnije kada nece moci doci do zabune opet cemo pisati samo b za oznaku male poluosi.

Ovdje je potrebno primjetiti razliku izmedju nepoznanice b u dobivenoj kvadratnoj jednadzbi, te koeficijenta ispred linearnog clana kvadratne jednadzbe kojeg standardno oznacavamo isto s b. Dakle koeficijenti dobivene kvadratne jednadzbe su:

$$a = 1$$

$$b = -8$$

$$c = 15$$

Racunam:

$$^{\text{p-os}}b_1, ^{\text{p-os}}b_2 = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15}}{2 \cdot 1}$$

$$^{\text{p-os}}b_1, ^{\text{p-os}}b_2 = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2}$$

$$^{\text{p-os}}b_1, ^{\text{p-os}}b_2 = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$^{\text{p-os}}b_1, ^{\text{p-os}}b_2 = \frac{8 \pm 2}{2}$$

Dakle jedno rjesenje jest dobivene kvadratne jednadzbe jest:

$$^{\text{p-os}}b_1 = \frac{8 - 2}{2}$$

$$^{\text{p-os}}b_1 = \frac{6}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti moze, slijedi:

$$^{\text{p-os}}b_1 = \frac{{}^{3}\cancel{6}}{\cancel{2}_{1}}$$

$$^{\text{p-os}}b_1 = \frac{3}{1}$$

$$^{\text{p-os}}b_1 = 3$$

To znaci da je velicina velike poluosi jednaka:

$$a_1 = 8 - \overbrace{b_1}^{3}$$

$$a_1 = 8 - 3$$

$$a_1 = 5$$

Preostaje jos samo odrediti jednadzbu elipse za prvo rjesenje, slijedi:

$$b_1^2 x^2 + a_1^2 y^2 = a_1^2 b_1^2$$

$$3^2 x^2 + 5^2 y^2 = 3^2 \cdot 5^2$$

$$9x^2 + 25y^2 = 9 \cdot 25$$
$$9x^2 + 25y^2 = 225$$

Pogledajmo sada i drugo rjesenje, slijedi:

$$^{\text{p-os}}b_2 = \frac{8+2}{2}$$
$$^{\text{p-os}}b_2 = \frac{10}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti moze, slijedi:

$$^{\text{p-os}}b_2 = \frac{^{5}\cancel{10}}{\cancel{2}_{1}}$$
$$^{\text{p-os}}b_2 = \frac{5}{1}$$
$$^{\text{p-os}}b_2 = 5$$

To znaci da je velicina velike poluosi jednaka:

$$a_2 = 8 - \overbrace{b_1}^{5}$$
$$a_2 = 8 - 5$$
$$a_2 = 3$$

Preostaje jos samo odrediti jednadzbu elipse za prvo rjesenje, slijedi:

$$b_2^2 x^2 + a_2^2 y^2 = a_2^2 b_2^2$$
$$5^2 x^2 + 3^2 y^2 = 5^2 \cdot 3^2$$
$$25x^2 + 9y^2 = 25 \cdot 9$$
$$25x^2 + 9y^2 = 225$$

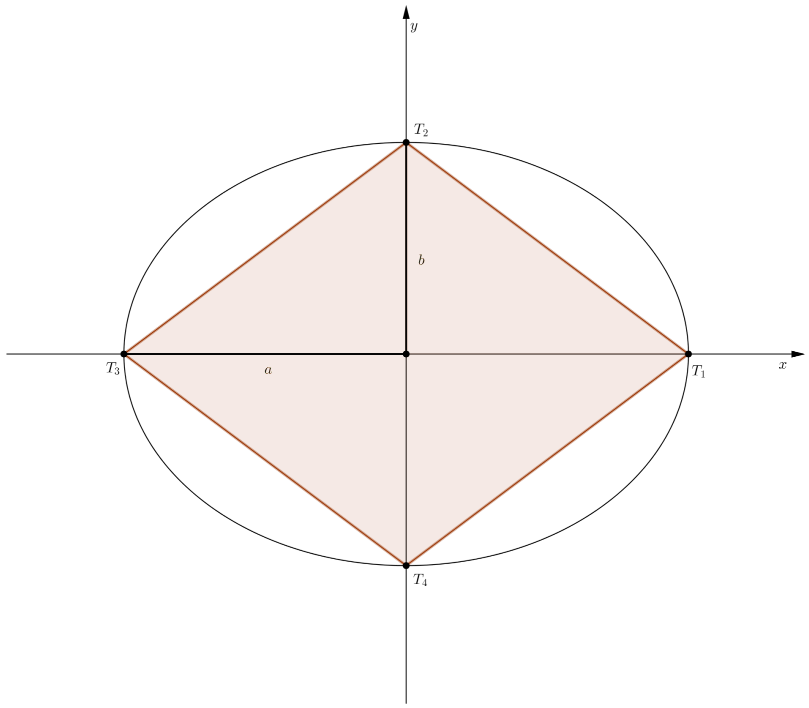
Dakle dvije elipse koje zadovoljavaju uvjete zadatka su dane jednadzbama:

$$\mathcal{E}_1 \ ... \ 9x^2 + 25y^2 = 225$$
$$\mathcal{E}_2 \ ... \ 25x^2 + 9y^2 = 225$$

Time je zadatak rijesen.

✤ Zadatak 12: Tjemena elipse su vrhovi romba cija je povrsina 96 kv, jed. Razlika duljina dijagonala romba jednaka je 4. Kako glasi jednadzba elipse?

Rjesenje: Prije svega promotrimo sljedecu sliku:



Tocke T_1, T_2, T_3 i T_4 su tjemena elipse. Nadalje uocimo da su dijagonale romba na slici jednake dvostrukoj maloj odnosno velikoj poluosi. Dakle neka vrijedi:

$$e = 2a$$

$$f = 2b$$

Prisjetimo se da su e i f standardne oznake za dijagonale kod cetverokuta. Nadalje prisjetim se da se povrsina romba kojem su poznate velicine dijagonala racuna prema izrazu $P = \dfrac{e \cdot f}{2}$. Prema podacima iz zadatka dolazimo do sljedeceg sustava jednadzbi:

$$\begin{cases} 96 = \dfrac{e \cdot f}{2} \\ e - f = 4 \end{cases}$$

Imajuci na umu da vrijedi $e = 2a$ i $f = 2b$ slijedi:

$$\begin{cases} 96 = \dfrac{\overbrace{e}^{2a} \cdot \overbrace{f}^{2b}}{2} \\ \underbrace{e}_{2a} - \underbrace{f}_{2b} = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 96 = \dfrac{2a \cdot 2b}{2} \\ 2a - 2b = 4 \end{cases}$$

Izlucimo broj 2 na lijevoj strani druge jednadzbe, slijedi:

$$\begin{cases} 96 = \dfrac{4a \cdot b}{2} \\ 2\left(a - b\right) = 4 \end{cases}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade u prvoj jednadzbi, dok drugu pomnozimo s $\dfrac{1}{2}$, slijedi:

$$\begin{cases} 96 = \dfrac{{}^{2}\cancel{4}a \cdot b}{\cancel{2}_1} \\ 2\left(a - b\right) = 4 \ / \cdot \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 96 = 2a \cdot b \\ 2\left(a - b\right) \cdot \dfrac{1}{2} = 4 \cdot \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Pomnozimo prvu jednadzbu s $\dfrac{1}{2}$, a u drugoj pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\begin{cases} 96 = 2a \cdot b \ / \cdot \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{{}^{1}\cancel{2}\left(a - b\right)}{1} \cdot \dfrac{1}{\cancel{2}_1} = \dfrac{{}^{2}\cancel{4}}{1} \cdot \dfrac{1}{\cancel{2}_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 96 \cdot \dfrac{1}{2} = 2a \cdot b \cdot \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{a - b}{1} = \dfrac{2}{1} \end{cases}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade u prvoj jednadzbi, slijedi:

$$\begin{cases} \dfrac{{}^{48}\cancel{96}}{1} \cdot \dfrac{1}{\cancel{2}_1} = \dfrac{{}^{1}\cancel{2}a \cdot b}{1} \cdot \dfrac{1}{\cancel{2}_1} \\ a - b = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{48}{1} = \dfrac{a \cdot b}{1} \\ a - b = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 48 = a \cdot b \\ a - b = 2 \end{cases}$$

Iz druge jednadzbe izrazimo a pomocu b, slijedi:

$$\begin{cases} 48 = a \cdot b \\ a - b = 2 \quad \Rightarrow \quad a = 2 + b \end{cases}$$

Dobiveni izraz za a uvrstavamo u prvu jednadzbu, slijedi:

$$48 = \overbrace{a}^{2+b} \cdot b$$

$$48 = (2 + b) \cdot b$$

$$48 = 2b + b^2$$

Sve clanove sume s lijeve strane jednakosti prebacimo na desnu stranu, slijedi:

$$b^2 + 2b - 48 = 0$$

Time smo dobili kvadratnu jednadzbu koju rjesavamu prema izrazu za rjesenja kvadratne jednadzbe:

$$^{\text{p-os}}b_1, ^{\text{p-os}}b_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Napomena: Ovdje smo pisali $^{\text{p-os}}b_1$ i $^{\text{p-os}}b_2$ kako bi naglasili da se govori o nepoznanici iz kvadratne jednadzbe koja predstavlja velicinu male poluosi elipse za razliku od b koji u izrazu za rjesenja kvadratne jednadzbe predstavlja linearni koeficijent. Kasnije kada nece moci doci do zabune opet cemo pisati samo b za oznaku male poluosi.

Ovdje je potrebno primjetiti razliku izmedju nepoznanice b u dobivenoj kvadratnoj jednadzbi, te koeficijenta ispred linearnog clana kvadratne jednadzbe kojeg standardno oznacavamo isto s b. Dakle koeficijenti dobivene kvadratne jednadzbe su:

$$a = 1$$

$$b = 2$$

$$c = -48$$

Racunam:

$$^{\text{p-os}}b_1, ^{\text{p-os}}b_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-48)}}{2 \cdot 1}$$

$$^{\text{p-os}}b_1, ^{\text{p-os}}b_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 192}}{2}$$

$$^{\text{p-os}}b_1, ^{\text{p-os}}b_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{196}}{2}$$

$$^{\text{p-os}}b_1, ^{\text{p-os}}b_2 = \frac{-2 \pm 14}{2}$$

Dakle jedno rjesenje jest dobivene kvadratne jednadzbe jest:

$$^{\text{p-os}}b_1 = \frac{-2 - 14}{2}$$

$$^{\text{p-os}}b_1 = \frac{-16}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti moze, slijedi:

$$^{\text{p-os}}b_1 = \frac{^{-8}\cancel{-16}}{\cancel{2}_1}$$

$$^{\text{p-os}}b_1 = \frac{-8}{1}$$

$$^{\text{p-os}}b_1 = -8$$

No to je nemoguce jer velicina male poluosi ne moze biti negativna. Pogledajmo sada i drugo rjesenje, slijedi:

$$^{\text{p-os}}b_2 = \frac{-2+14}{2}$$

$$^{\text{p-os}}b_2 = \frac{12}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti moze, slijedi:

$$^{\text{p-os}}b_2 = \frac{^{6}\cancel{12}}{\cancel{2}_1}$$

$$^{\text{p-os}}b_2 = \frac{6}{1}$$

$$^{\text{p-os}}b_2 = 6$$

To znaci da je velicina velike poluosi jednaka:

$$a_2 = 2 + \overbrace{b_2}^{6}$$

$$a_2 = 2 + 6$$

$$a_2 = 8$$

Preostaje jos samo odrediti jednadzbu elipse za prvo rjesenje, slijedi:

$$b_2^2x^2 + a_2^2y^2 = a_2^2b_2^2$$

$$6^2x^2 + 8^2y^2 = 6^2 \cdot 8^2$$

$$36x^2 + 64y^2 = 36 \cdot 64$$

$$36x^2 + 64y^2 = 2304$$

Dakle elipsa koje zadovoljava uvjete zadatka dana je jednadzbom:

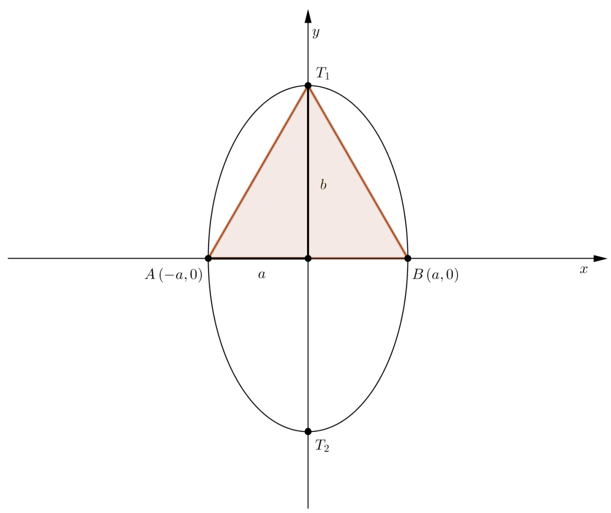
$$\mathcal{E} \ ... \ 36x^2 + 64y^2 = 2304$$

Time je zadatak rijesen.

$\mathscr{S} \diamond \mathscr{S}$

Zadatak 13: Napisi jednadzbu elipse opisane jednakostranicnom trokutu ako su dva vrha tog trokuta tocke $A(-a, 0)$ i $B(a, 0)$, koje su ujedno dva tjemena elipse.

Rjesenje: Prije svega promotrimo sljedecu sliku:



Primjetimo da bi elipsa zadovoljavala uvjete zadatka ona mora biti rodirana za 90° oko ishodista, odnosno mala i velika poluos moraju zamijeniti uloge, odnosno mala poluos ce u ovom slucaju zapravo biti veca od velike poluosi. Nadalje sa slike mozemo uociti da je "velika poluos" zapravo jednaka upravo a, dok velicinu "male poluosi" b mozemo odrediti iz cinjenice da je ona zapravo visina jednakostranicnog trokuta kojem elipsu opisujemo. Nadalje uocimo da je duljina stranice jednakostranicnog trokuta na slici zapravo jednaka $2a$.
Nadalje prisjetimo se da duljinu visine jednakostranicnog trokuta racunamo prema izrazu $v = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, pri cemu je a duljina stranice jednakostranicnog trokuta. Dakle mora vrijediti:

$$b = \frac{2a\sqrt{3}}{2}$$

pri cemu je a velicina "velike poluosi". Sredimo dobiveni izraz tako da pokratimo sto se pokratiti moze, slijedi:

$$b = \frac{{}^{1}\cancel{2}a\sqrt{3}}{\cancel{2}_{1}}$$

$$b = \frac{a\sqrt{3}}{1}$$

$$b = a\sqrt{3}$$

Dakle duljina "male poluosi" iznosi $a\sqrt{3}$. Preostaje jos samo odrediti jednadzbu elipse, slijedi:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\left(a\sqrt{3}\right)^2 x^2 + a^2y^2 = a^2 \cdot \left(a\sqrt{3}\right)^2$$

$$a^2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 x^2 + a^2y^2 = a^2 \cdot a^2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2$$

$$3a^2 \cdot x^2 + a^2y^2 = a^2 \cdot a^2 \cdot 3$$

Pomnozimo potencije istih baza na desnoj strani jendakosti prema izrazu za mnozenje potencija istih baza, odnosno prema izrazu $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$, slijedi:

$$3a^2x^2 + a^2y^2 = 3a^4$$

Dakle elipsa koje zadovoljava uvjete zadatka dana je jednadzbom:

$$\mathcal{E} \;...\; 3a^2x^2 + a^2y^2 = 3a^4$$

Time je zadatak rijesen.

Napomena: Krajnju jednadzbu mozemo jos podijeliti s a^2.

Zadatak 14: Koliki je numericki ekscentricitet elipse ako je linearni ekscentricitet aritmeticka sredina duljina velike i male poluosi?

Rjesenje: Dakle vrijedi:

$$e = \frac{a+b}{2}$$

Nas zadatak je odrediti numericki ekscentricitet ε kojega racunamo preko izraza

$$\varepsilon = \frac{e}{a}$$

Prisjetimo se da za elipsu opcenito vrijedi izraz $e^2 = a^2 - b^2$ gdje su a i b velicine velike i male poluosi. No to znaci da je dan sljedeci sustav jednadzbi:

$$\begin{cases} e = \dfrac{a+b}{2} \\ e^2 = a^2 - b^2 \end{cases}$$

Desnu stranu druge jednadzbe prepoznajem kao razliku kvadrata koju raspisujemo prema izrazu $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$, slijedi:

$$\begin{cases} e = \dfrac{a+b}{2} \\ e^2 = (a+b)(a-b) \end{cases}$$

Nadalje u drugu jednazbu uvrstimo izraz za e koji je dan u prvoj jednadzbi, slijedi:

$$\overbrace{e}^{\frac{a+b}{2}}{}^{2} = (a+b)(a-b)$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = (a+b)(a-b)$$

Lijevu stranu jednakosti raspisujemo prema izrazu za dijeljenje potencija istih eksponenata, odnosno prema izrazu $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, slijedi:

$$\frac{(a+b)^2}{2^2} = (a+b)(a-b)$$

$$\frac{(a+b)^2}{4} = (a+b)(a-b)$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{a+b}$, slijedi:

$$\frac{(a+b)^2}{4} = (a+b)(a-b) \;/\cdot \frac{1}{a+b}$$

$$\frac{(a+b)^2}{4} \cdot \frac{1}{a+b} = (a+b)(a-b) \cdot \frac{1}{a+b}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{a+b}\cancel{(a+b)^2}}{4} \cdot \frac{1}{\cancel{a+b}_1} = \frac{{}^1\cancel{(a+b)}(a-b)}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{a+b}_1}$$

$$\frac{a+b}{4} = \frac{a-b}{1}$$

$$\frac{a+b}{4} = a-b$$

Pomnozimo cijelu jednakost s 4, slijedi:

$$\frac{a+b}{4} = a-b \;/\cdot 4$$

$$\frac{a+b}{4} \cdot 4 = (a-b) \cdot 4$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{a+b}{{}_1\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}^1}{1} = 4a-4b$$

$$\frac{a+b}{1} = 4a-4b$$

$$a + b = 4a - 4b$$

Prebacimo a s lijeve na desnu stranu jednakosti, a $-4b$ s desne na lijevu stranu jednakosti, slijedi:

$$b + 4b = 4a - a$$

$$5b = 3a$$

Pomnizimo cijelu jednakost s $\frac{1}{5}$, slijedi:

$$5b = 3a \;/ \cdot \frac{1}{5}$$

$$5b \cdot \frac{1}{5} = 3a \cdot \frac{1}{5}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{5}b}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{5}_1} = \frac{3a}{1} \cdot \frac{1}{5}$$

$$\frac{b}{1} = \frac{3a}{5}$$

$$b = \frac{3a}{5}$$

Sada mozemo linearni ekscentricitet izraziti pomocu velike poluosi a, slijedi:

$$e = \frac{a + \overbrace{b}^{\frac{3a}{5}}}{2}$$

$$e = \frac{a + \frac{3a}{5}}{2}$$

Svedemo razlomke u brojniku glavnog razlomka na zajednicki nazivnik 5, slijedi:

$$e = \frac{\frac{5a + 3a}{5}}{2}$$

$$e = \frac{\frac{8a}{5}}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$e = \frac{\frac{{}^{4}\cancel{8}a}{5}}{\frac{\cancel{2}_1}{1}}$$

$$e = \frac{\frac{4a}{5}}{\frac{1}{1}}$$

$$e = \frac{4a}{5}$$

Preostaje jos samo odrediti numericki ekscentricitet, slijedi:

$$\varepsilon = \frac{\overbrace{e}^{\frac{4a}{5}}}{a}$$

$$\varepsilon = \frac{\frac{4a}{5}}{a}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\varepsilon = \frac{\frac{4^1\cancel{a}}{5}}{\frac{\cancel{a}_1}{1}}$$

$$\varepsilon = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{1}}$$

$$\varepsilon = \frac{4}{5}$$

Dakle numericki ekscentricitet elipse koja zadovoljava uvjete zadatka iznosi $\varepsilon = \frac{4}{5}$. Time je zadatak rijesen.

☙ ✧ ❧

Zadatak 15: Napisi jednadzbu elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ako je njezin numericki ekscentricitet $\varepsilon = \frac{e}{a}$ jednak $\frac{1}{2}$, a elipsa prolazi tockom $T(2,3)$.

Rjesenje: Krenimo od cinjenice da vrijedi:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2} \\ \varepsilon &= \frac{e}{a} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{e}{a}$$

Dobivenu jednakost pomnozimo s a, slijedi:

$$\frac{1}{2} = \frac{e}{a} \ / \cdot a$$

$$\frac{1}{2} \cdot a = \frac{e}{a} \cdot a$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{1} = \frac{e}{{}_1\cancel{a}} \cdot \frac{\cancel{a}^1}{1}$$

$$\frac{a}{2} = \frac{e}{1}$$

$$\frac{a}{2} = e$$

Nadalje prisjetiom se da za elipsu vrijedi jednakost $e^2 = a^2 - b^2$ pri cmu je a velika poluos, b mala poluos te e linearni ekscentricitet elipse. Imajuci na umu da vrijedi $e = \dfrac{a}{2}$, slijedi:

$$\overbrace{e}^{\frac{a}{2}}{}^2 = a^2 - b^2$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - b^2$$

Raspisemo lijevu stranu jednakosti prema izrazu za dijeljenje potencija istih eksponenata, odnosno prema $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$, slijedi:

$$\frac{a^2}{4} = a^2 - b^2$$

Pomnozimo cijelu jednakost s 4, slijedi:

$$\frac{a^2}{4} = a^2 - b^2 \ / \cdot 4$$

$$\frac{a^2}{4} \cdot 4 = a^2 \cdot 4 - b^2 \cdot 4$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{a^2}{{}_1\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}^1}{1} = 4a^2 - 4b^2$$

$$\frac{a^2}{1} = 4a^2 - 4b^2$$

$$a^2 = 4a^2 - 4b^2$$

Prebacimo a^2 s lijeve na desnu stranu jednakosti, a $4b^2$ s desne na lijevu stranu jednakosti, slijedi:

$$4b^2 = 4a^2 - a^2$$

$$4b^2 = 3a^2$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{4}$, slijedi:

$$4b^2 = 3a^2 \ / \cdot \frac{1}{4}$$

$$4b^2 \cdot \frac{1}{4} = 3a^2 \cdot \frac{1}{4}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^2\cancel{4}b^2}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{4}_1} = \frac{3a^2}{\cdot} \frac{1}{4}$$

$$\frac{b^2}{1} = \frac{3a^2}{4}$$

$$b^2 = \frac{3a^2}{4}$$

Nadalje prisjetimo se da svaka tocka elipse mora zadovoljavati jednadzbu elipse $b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$. Kako je tocka $T\,(2,3)$ nalazi na elipsi ciju jednadzbu trazim mora vrijediti:

$$b^2 \overbrace{x}^{2}{}^2 + a^2 \overbrace{y}^{3}{}^2 = a^2b^2$$

$$b^2 \cdot 2^2 + a^2 \cdot 3^2 = a^2b^2$$

$$4b^2 + 9a^2 = a^2b^2$$

Nadalje primjenimo cinjenicu da vrijedi $b^2 = \frac{3a^2}{4}$, slijedi:

$$4\overbrace{b^2}^{\frac{3a^2}{4}} + 9a^2 = a^2 \overbrace{b^2}^{\frac{3a^2}{4}}$$

$$4 \cdot \frac{3a^2}{4} + 9a^2 = a^2 \cdot \frac{3a^2}{4}$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\frac{4}{3}$, slijedi:

$$4 \cdot \frac{3a^2}{4} + 9a^2 = a^2 \cdot \frac{3a^2}{4} \ / \cdot \frac{4}{3}$$

$$4 \cdot \frac{3a^2}{4} \cdot \frac{4}{3} + 9a^2 \cdot \frac{4}{3} = a^2 \cdot \frac{3a^2}{4} \cdot \frac{4}{3}$$

Pokratimo sto se pokatiti dade, slijedi:

$$4 \cdot \frac{{}^1\cancel{3}a^2}{{}_1\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}^1}{\cancel{3}_1} + \frac{{}^3\cancel{9}a^2}{1} \cdot \frac{4}{\cancel{3}_1} = a^2 \cdot \frac{{}^1\cancel{3}a^2}{{}_1\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}^1}{\cancel{3}_1}$$

$$4 \cdot \frac{a^2}{1} + \frac{12a^2}{1} = a^2 \cdot \frac{a^2}{1}$$

$$4a^2 + 12a^2 = a^4$$

Pomnozimo potencije na desnoj strani jednakosti prema izrazu za mnozenje potenicija istih baza odnosno prema $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$, slijedi:

$$16a^2 = a^4$$

Prebacimo $16a^2$ s lijeve na desnu stranu jednakosti, slijedi:

$$0 = a^4 - 16a^2$$

Izlucimo a^2 iz oba clana na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$0 = a^2\left(a^2 - 16\right)$$

Ako je umnozak dva broja jednak nuli tada jedan od tih brojeva mora biti jednak nuli, odnosno mora vrijediti:

$$a^2 = 0 \quad \text{ili} \quad a^2 - 16 = 0$$

Prebacimo 16 s lijeve na desnu stranu u drugoj jednadzbi, slijedi:

$$a^2 = 0 \quad \text{ili} \quad a^2 = 16$$

No a^2 ne moze biti jednako 0 jer se u tom slucaju nebi radilo o elipsi, pa je samim time $a^2 = 16$ jedino moguce rjesenje. Odredimo koliko iznosi b^2 iz izraza $b^2 = \dfrac{3a^2}{4}$, slijedi:

$$b^2 = \frac{3\overbrace{a^2}^{16}}{4}$$

$$b^2 = \frac{3 \cdot 16}{4}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$b^2 = \frac{3 \cdot \cancel{16}^{4}}{{}_{1}\cancel{4}}$$

$$b^2 = \frac{12}{1}$$

$$b^2 = 12$$

Preostaje jos samo odrediti jednadzbu elipse, slijedi:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\overbrace{b^2}^{12}x^2 + \overbrace{a^2}^{16}y^2 = \overbrace{a^2}^{16} \cdot \overbrace{b^2}^{12}$$

$$12x^2 + 16y^2 = 16 \cdot 12$$

$$12x^2 + 16y^2 = 192$$

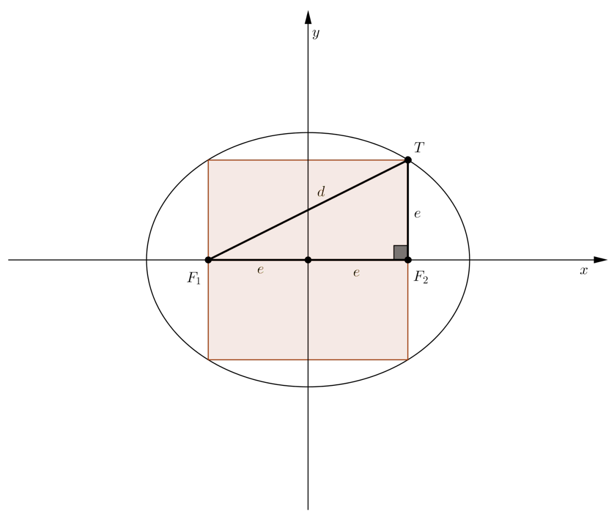
Dakle elipsa koje zadovoljava uvjete zadatka dana je jednadzbom:

$$\mathcal{E} \text{ ... } 12x^2 + 16y^2 = 192$$

Time je zadatak rijesen.

Zadatak 16: Stranica kvadrata upisanog elipsi prolazi njezinim zaristem. Koliki je numericki ekscentricitet elipse?

Rjesenje: Prije svega promotrimo sljedecu sliku:



Kako je numericki ekscentricitet elipse dan izrazom $\varepsilon = \dfrac{e}{a}$, pri cemu je e linearni ekscentricitet te a velicina velike poluosi, najbolje bi bilo pokusati izraziti a pomocu e ili e pomocu a. Promatarjuci danu sliku mozemo doci do zakljucka da cemo vrlo vjerojatno lakse prikazati a pomocu e.
Nadalje prisjetimo se da za svaku tocku T koja lezi na elipsi mora vrijediti:

$$\left|\overline{F_1T}\right| + \left|\overline{F_2T}\right| = 2a$$

Promotrimo li sliku uvidjamo da vrijedi:

$$\left|\overline{F_1T}\right| = d \quad \text{i} \quad \left|\overline{F_2T}\right| = e$$

Dakle jednakost prelazi u oblik:

$$\overbrace{\left|\overline{F_1T}\right|}^{d} + \overbrace{\left|\overline{F_2T}\right|}^{e} = 2a$$

$$d + e = 2a$$

No iz pravokutnog trokuta $\triangle F_1F_2T$ zakljucujemo da preko Pitagorinog poucka mora vrijediti:

$$\left|\overline{F_1T}\right|^2 = \left|\overline{F_1F_2}\right|^2 + \left|\overline{F_2T}\right|^2$$

$$\overbrace{\left|\overline{F_1T}\right|}^{d}{}^2 = \overbrace{\left|\overline{F_1F_2}\right|}^{2e}{}^2 + \overbrace{\left|\overline{F_2T}\right|}^{e}{}^2$$

$$d^2 = (2e)^2 + e^2$$

Raspisemo prvi clan sume na desnoj strani nejednakosti prema izrazu za mnozenje potencija istih eksponenata ondnosno prema $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^2$, slijedi:

$$d^2 = 2^2e^2 + e^2$$

$$d^2 = 4e^2 + e^2$$

$$d^2 = 5e^2$$

Korijenujemo cijelu jednakost, slijedi:

$$d^2 = 5e^2 \ / \sqrt{\ }$$

$$d = \sqrt{5a^2}$$

Desnu stranu jednakosti raspisemo prema pravilu za mnozenje korijena istih stupnjeva, odnosno prema $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$, slijedi:

$$d = \sqrt{5} \cdot \sqrt{a^2}$$

$$d = \sqrt{5}e$$

Vratimo se na jednakost $d + e = 2a$, slijedi:

$$\overbrace{d}^{\sqrt{5}e} + e = 2a$$

$$\sqrt{5}e + e = 2a$$

Izlucimo e iz clanova sume na lijevoj strani jednakosti, slijedi:

$$e\left(\sqrt{5} + 1\right) = 2a$$

Pomnizimo cijelu jednakost s $\frac{1}{2}$, slijedi:

$$e\left(\sqrt{5} + 1\right) = 2a \ / \cdot \frac{1}{2}$$

$$e\left(\sqrt{5} + 1\right) \cdot 12 = 2a \cdot \frac{1}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{e\left(\sqrt{5}+1\right)}{1}\cdot 12=\frac{{}^{1}\cancel{2}a}{1}\cdot\frac{1}{\cancel{2}_{1}}$$

$$\frac{e\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}=\frac{a}{1}$$

$$\frac{e\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}=a$$

Dakle vrijedi $a=\dfrac{e\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}$. Preostaje jos samo odrediti numericki ekscentricitet, racunamo:

$$\varepsilon=\frac{e}{\underbrace{a}_{\frac{e\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}}}$$

$$\varepsilon=\frac{e}{\frac{e\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}}$$

Rijesimo se dvojnog razlomka prema pravilu vanjski s vanjskim, unutarnji s unutarnjim, slijedi:

$$\varepsilon=\left(\frac{\frac{e}{1}}{\frac{e\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}}\right)$$

$$\varepsilon=\frac{2e}{e\left(\sqrt{5}+1\right)}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

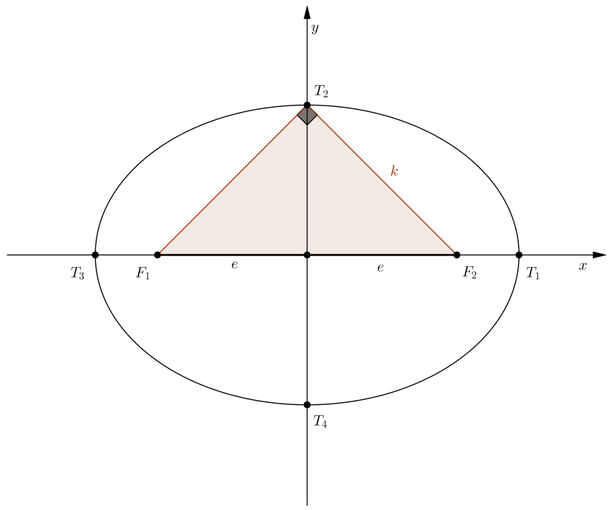
$$\varepsilon=\frac{{}^{1}\cancel{2}e}{{}_{1}\cancel{e}\left(\sqrt{5}+1\right)}$$

$$\varepsilon=\frac{2}{\sqrt{5}+1}$$

Dakle numericki ekscentricitet elipse opisane u zadatku jest $\varepsilon=\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}$. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 17: Zarista elipse i jedno njezino tjeme vrhovi su pravokutnog trokuta kojem je povrsina jednaka 18. Odredi jednadzbu elipse.

Rjesenje: Prije svega promotrimo sljedecu sliku:



y
T_2
k
T_3
F_1
e
e
F_2
T_1
x
T_4