Djeljivost. Prosti brojevi

Zadatak 2: (str. 18) Dokazi da zbroj parnog broja uzastopnih prirodnih brojeva nije djeljiv s tim parnim brojem.

Rjesenje: Pretpostavimo da je dano $2k$, $k \in \mathbb{N}$ uzastopnih prirodnih brojeva. Nadalje neka je prvi od njih jednak $n+1$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Ako ih ukupno ima $2k$ tada je posljednji u nizu jednak $n+2k$.

Time smo definirali sljedeci niz brojeva:

$$n+1, n+2, n+3, ..., n+2k$$

Nas je zadatak pokazati da suma tih brojeva nije djeljiva s $2k$. Pokusajmo odrediti cemu je jednaka suma tih brojeva. Racunamo:

$$n+1+n+2+n+3+...+n+2k = (\star)$$

Promijenimo poredak clanova sume tako da svi pribrojnici jednaki n budu na pocetku, slijedi:

$$(\star) = n+n+n+...+n+1+2+3+...+2k = (\star\star)$$

Primjetimo da se na pocetku sada nalazi ukupno $2k$ brojeva jednakih n te nakon toga zbroj prirodnih brojeva od 1 do $2k$:

$$(\star\star) = \underbrace{n+n+n+...+n}_{\text{ima ih } 2k} + \underbrace{1+2+3+...+2k}_{\text{zbroj prvih } 2k \text{ prirodnih brojeva}} = (\star\star\star)$$

Primjetimo nadalje da je zbroj $2k$ brojeva koji su svi jednaki n jednak $2k \cdot n$. Odnosno vrijedi:

$$\underbrace{n+n+n+...+n}_{\text{ima ih } 2k} = 2k \cdot n$$

Nadalje se postavlja pitanje cemu je jednak zbroj prvih m prirodnih brojeva. Naime vrijedi:

$$1+2+3+...+m = \frac{m \cdot (m+1)}{2}$$

Zasto je tome tako pojasnit cemo drugom prilikom. Tu jednakost iskoristit cemo da odredimo zbroj prvih $2k$ prirodnih brojeva, tako da m zamijenimo s $2k$, vrijedi:

$$1+2+3+...+m = \frac{m \cdot (m+1)}{2} \quad \Rightarrow \quad 1+2+3+...+2k = \frac{2k \cdot (2k+1)}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$1+2+3+...+2k = \frac{{}^{1}\cancel{2}k\cdot(2k+1)}{\cancel{2}_{1}}$$

$$1+2+3+...+2k = \frac{1\cdot k\cdot(2k+1)}{1}$$

$$1+2+3+...+2k = \frac{k\cdot(2k+1)}{1}$$

$$1+2+3+...+2k = k\cdot(2k+1)$$

Dakle zbroj prvih $2k$ prirodnih brojeva iznosi $k\cdot(2k+1)$. Sada pocetna suma poprima sljedeci oblik:

$$(\star\star\star) = \overbrace{n+n+n+...+n}^{2k\cdot n} + \overbrace{1+2+3+...+2k}^{k\cdot(2k+1)} =$$
$$= 2k\cdot n + k\cdot(2k+1) = (\square)$$

Iz oba clana sume mozemo izluciti k, slijedi:

$$(\square) = k\cdot(2n+2k+1) = (\square\square)$$

No sad promatrajuci dobiveni izraz mozemo lako zakljuciti da on nije djeljiv s $2k$.

Prvi clan produkta je djeljiv s k jer je taj clan upravo jednak k. No da bi cijeli produkt bio djeljiv s $2k$ izraz u zagradi mora biti djeljiv s 2, a to nije slucaj. Naime izraz u zagradi je neparan jer je to rezultat zbrajanja dva parna i jednog neparnog broja, a neparan broj nije djeljiv s 2. Dakle ukratko:

$$(\square) = \underbrace{\underbrace{k}_{\substack{\text{djeljiv}\\ \text{s } k}}\cdot(\underbrace{2n+2k+1}_{\substack{\text{nije djeljiv}\\ \text{s } 2}})}_{\substack{\text{nije djeljiv}\\ \text{s } 2k}}$$

Dakle zakljucujemo da zaista zbroj parnog broja uzastopnih prirodnih brojeva nije djeljiv s tim parnim brojem. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 5: (str. 18) Zamijeni zvjezdice znamenkama tako tako da broj $\overline{74\star3\star}$ bude djeljiv s 36.

Rjesenje: Uocimo prije svega ako 36 djeli neki cijeli broj n da tada i brojevi 4 i 9 nuzno moraju djeliti taj isti cijeli broj, osnosno:

$$16 \mid n \quad \Leftrightarrow \quad 4 \mid n \;\text{ i }\; 9 \mid n$$

Ovaj zakljucak je izuzetno bitan je su nam poznati kriteriji djeljivosti cijelog broja brojevima 4 i 9. Naime cijeli broj je djeljiv brojem 4 ako je dvoznamenkasti zavrsetak danog cijelog broj djeljiv s 4.

U nasem slucaju to znaci da mora vrijediti:

$$\overline{74 \star \underbrace{3\star}}_{\substack{\downarrow \\ \text{mora biti djeljiv s 4}}}$$

Dakle dvoznamenkasti broj $\overline{3\star}$ mora biti djeljiv s 4. Razmislimo li malo brzo zakljucujem da postoje samo dva takva broja i to 32 i 36, odnosno na zadnjem mjestu mogu biti samo dvije znamenke. To su 2 ili 6.

Dakle moguca su sljedeca dva slucaja:

Slucaj I:	Slucaj II:
$\overline{74 \star 32}$	$\overline{74 \star 36}$

Nadalje prisjetimo se da je kriterij da cijeli broj n bude djeljiv s 9 taj da broj 9 mora djeliti zbroj njegovih znamenaka. To pak znaci da mora vrijediti sljedece:

Slucaj I:	Slucaj II:
$9 \mid 7 + 4 + \star + 3 + 2$	$9 \mid 7 + 4 + \star + 3 + 6$
$9 \mid 16 + \star$	$9 \mid 20 + \star$

Imajmo na umu da posto se radi o znamenkama zvjezdica moze biti iz sljedeceg skupa:

$$S = \{0, 1, 2, 3, ..., 9\}$$

Dakle trazimo zvjezdicu takvu da je $16 + \star$ jednaka nekom visekratniku broja 9. Primjetimo da je uz uvjet da zvjezdica mora biti prirodan broj manji od 10 jedini dobar visekratnik broja 9 zapravo 18. Drugi su ili premali ili preveliki da bi zadovoljili uvjet na zvjezdicu.

Potrebno je dakle rjesiti jednadzbu:

$$16 + \star = 18$$

Prebacimo 16 s lijeve na desnu stranu jednakosti, slijedi:

$$16 + \star = 18 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \star &= 18 - 12 \\ \star &= 2 \end{aligned}$$

Dakle jedno je rjesenje broj 74232. Na slican se nacin dobije i drugo rjesenje, odnosno broj 74736. Time je zadatak rijesen.

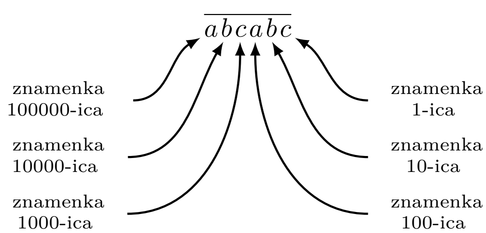
Zadatak 10: (str. 18) Dokazi da je sesteroznamenkasti broj oblika $\overline{abcabc}$ djeljiv s 7, 11 i 13.

Rjesenje: Primjetimo da vrijedi sljedeca jednakost:

$$\overline{abcabc} = 100000a + 10000b + 1000c + 100a + 10b + c = (\star)$$

Dakle kod sesteroznamenkastog broja prva znamenka s lijeva oznacava 100000-ice, sljedeca znamenka oznacava 10000-ice, i tako redom do posljednje znameke koja se nalazi prva s desna koja oznacava 1-ice.

"Graficki" prikazano to izgleda ovako:



Vratimo se na jednakost, zbrojimo sto se zbrojiti dade, slijedi:

$$(\star) = 100000a+10000b+1000c+100a+10b+c = 100100a+10010b+1001c = (\star\star)$$

Uocimo da mozemo izluciti 1001 iz svih clanova sume, slijedi:

$$(\star\star) = 100100a + 10010b + 1001c = 1001 \cdot (100a + 10b + c)$$

Pokazat cemo da je 1001 djeljiv s 7, 11, 13. Ovo bismo mogli pokazati tako da podijelimo 1001 s 7, 11, odnosno 13, no ovdje cemo pokazati malo drugaciji pristup koji ce se na kraju svesti na rastav na proste faktore.

Primjetimo da broj 1001 mozemo zapisati kao:

$$1001 = 990 + 11 = (\text{⬡})$$

Zasto bas tako. Ako malo promotrimo sumu vidimo da su oba clana te sume djeljiva s 11 pa cemo taj broj izluciti iz oba clana, slijedi:

$$(\faCube) = 990 + 11 = 11 \cdot (90 + 1) = 11 \cdot 91 = (\faCube\faCube)$$

Nadalje uocimo da zbroj znamenki broja 91 iznosi 10 sto znaci da nije djeljiv ni s 3 ni s 9. Nadalje kako zavrsava znamenkom 1 sigurno nije djeljiv s 5 i broj kojim je djeljiv nuzno mora bit neparan (naime samo dva neparna broja u umnosku daju neparan broj).

Dakle preostaje provjeriti jeli broj 91 djeljiv brojem 7.

> Napomena: Prisjetimo se cinjenice da je kod provjeravanja je li neki prirodan broj n prost dovoljno provjeriti je li on djeljiv nekim od prirodnih brojeva manjih od $\sqrt{n}$.
>
> U nasem slucaju to znaci da ako je broj 91 slozen on nuzno mora biti djeljiv nekim brojem izmedju 1 i $\sqrt{91} \approx 9.54$. Zato iz promatranja jedini broj koji preostaje za provjeriti jest broj 7.

Broj 91 zaista jest djeljiv s 7, odnosno vrijedi $91 = 7 \cdot 13$ pa vrijedi:

$$(\faCube\faCube) = 11 \cdot 7 \cdot 13$$

Odnosno zakljucujemo da je broj 1001 jednak produktu:

$$1001 = 11 \cdot 7 \cdot 13$$

Sada je sasvim jasno da je broj 1001 djeljiv i s 7 i s 11 i s 13, a to je upravo ono sto smo hjeli pokazati. Time je zadatak rijesen.