Prikaz racinalnog broja ciji je decimalni zapis beskonacan periodicki u obliku razlomka

Slucaj kada je decimalni zapis cisti periodicki

Neka je dan racionalan broj a, manji od 1, ciji je decimalni zapis beskonacan cisti periodicki. Neka mu je period duljne n. Taj broj mozemo zapisati na sljedeci nacin:

$$a = 0.\dot{a}_1 a_2 a_3 ... \dot{a}_n$$

gdje su $a_1, a_2, ..., a_n$ znamenke nakon decimalne tocke koje se neprestano ponavljaju. Vrijedi $a_1, a_2, ..., a_n \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$.

> Napomena: Broj sa zapisom 10^n je zapravo broj koji se sastoji od jedinice na pocetku i n nula nakon nje.
>
> Primjerice zapis 10^5 predstavlja broj 100000

Dani broj a pomnozit cemo s 10^n, slijedi:

$$a = 0.\dot{a}_1 a_2 a_3 ... \dot{a}_n \ / \cdot 10^n$$

$$a \cdot 10^n = 0.\dot{a}_1 a_2 a_3 ... \dot{a}_n \cdot 10^n$$

Broj 10^n je dakle sastavljen od jedinice i n nula nakon toga, a mnozenje takvim brojem provodi se tako da se samo "pomakne" decimalna tocka n puta u desno. To primjenjujemo na desnu stranu jednakost pa vrijedi:

$$a \cdot 10^n = 0.a_1 a_2 a_3 ... a_n a_1 a_2 a_3 ... a_n a_1 a_2 a_3 ... a_n ...$$

$$a \cdot 10^n = a_1 a_2 a_3 ... a_n . a_1 a_2 a_3 ... a_n a_1 a_2 a_3 ... a_n ...$$

$$a \cdot 10^n = a_1 a_2 a_3 ... a_n . \dot{a}_1 a_2 a_3 ... \dot{a}_n$$

Dakle kako je period pocentnog broja a jednak n mnozenjem s 10^n postigli smo to da se jedan cijeli period preselio ispred decimalne tocke. Razmislimo li malo mozemo lako doci do zakljucka da se nakon decimalne tocke zapravo nista nije promijenilo. Odnosno broj na desnoj stani mozemo zapisati na sljedeci nacin

$$a_1 a_2 a_3 ... a_n . \dot{a}_1 a_2 a_3 ... \dot{a}_n = \overline{a_1 a_2 a_3 ... a_n} + 0.\dot{a}_1 a_2 a_3 ... \dot{a}_n$$

No vidimo da je drugi clan sume na desnoj strani jednakosti zapravo jednak broju a, vrijedi:

$$a_1a_2a_3...a_n.\dot{a}_1a_2a_3...\dot{a}_n = \overline{a_1a_2a_3...a_n} + \overbrace{0.\dot{a}_1a_2a_3...\dot{a}_n}^{a} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a_1a_2a_3...a_n.\dot{a}_1a_2a_3...\dot{a}_n = \overline{a_1a_2a_3...a_n} + a$$

Nastavljamo racun, jednakost poprima sljedeci oblik:

$$a \cdot 10^n = \overbrace{a_1a_2a_3...a_n.\dot{a}_1a_2a_3...\dot{a}_n}^{\overline{a_1a_2a_3...a_n} + a} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a \cdot 10^n = \overline{a_1a_2a_3...a_n} + a$$

Prebacimo broj a s desne na lijevu stranu jednakosti, slijedi:

$$a \cdot 10^n = \overline{a_1a_2a_3...a_n} + a \quad \Rightarrow \quad a \cdot 10^n - a = \overline{a_1a_2a_3...a_n}$$

Izlucimo a iz oba clana sume na lijevoj strani jednakosti, slijedi:

$$a \cdot (10^n - 1) = \overline{a_1a_2a_3...a_n}$$

Pomnozimo cijeli izraz s $\dfrac{1}{10^n - 1}$, slijedi:

$$a \cdot (10^n - 1) = \overline{a_1a_2a_3...a_n} \quad \Big/ \cdot \frac{1}{10^n - 1}$$

$$a \cdot (10^n - 1) \cdot \frac{1}{10^n - 1} = \overline{a_1a_2a_3...a_n} \cdot \frac{1}{10^n - 1}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{a \cdot^1 \cancel{(10^n - 1)}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{10^n - 1}_1} = \frac{\overline{a_1a_2a_3...a_n}}{1} \cdot \frac{1}{10^n - 1}$$

$$\frac{a \cdot 1 \cdot 1}{1} = \frac{\overline{a_1a_2a_3...a_n} \cdot 1}{1 \cdot (10^n - 1)}$$

$$\frac{a}{1} = \frac{\overline{a_1a_2a_3...a_n}}{10^n - 1}$$

$$a = \frac{\overline{a_1a_2a_3...a_n}}{10^n - 1}$$

Uocimo da je broj $10^n - 1$ broj koji se sastoji od n devetki, odnosno:

$$10^n - 1 = \underbrace{\overline{999...9}}_{\text{broj od } n \text{ devetki}}$$

Dakle konacno vrijedi:

$$a = \frac{\overline{a_1 a_2 a_3 ... a_n}}{\underbrace{10^n - 1}_{\underbrace{\overline{999...9}}_{\text{broj od } n \text{ devetki}}}} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\overline{a_1 a_2 a_3 ... a_n}}{\underbrace{999...9}_{\text{broj od } n \text{ devetki}}}$$

Dakle vrijedi sljedeca tvrdnja:

Tvrdnja I: Neka je dan racionalan broj a, manji od 1, ciji je decimalni zapis beskonacan cisti periodicki. Neka mu je period duljne n. Taj broj mozemo zapisati na sljedeci nacin:

$$a = 0.\dot{a}_1 a_2 a_3 ... \dot{a}_n$$

gdje su $a_1, a_2, ..., a_n$ znamenke nakon decimalne tocke koje se neprestano ponavljaju. Vrijedi $a_1, a_2, ..., a_n \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$.

Njegov je zapis u obliku razlomka jednak:

$$a = \frac{\overline{a_1 a_2 a_3 ... a_n}}{\underbrace{999...9}_{\text{broj od } n \text{ devetki}}}$$

Primjer: Zapisi racionalan broj $0.\dot{4}52\dot{1}$, ciji je decimalni zapis cisti periodicki, u obliku razlomka.

Rjesenje: Vrijedi:

$$0.\dot{4}52\dot{1} = \frac{4521}{9999}$$

Dakle dolje je broj od 4 devetke jer je period duljine 4.

Slucaj kada je decimalni zapis mjesoviti periodicki

Naravno postavlja se pitanje sto ako zapis nije cisti vec mjesoviti periodicki. Pa pozabavimo se tim slucajem.

Naime, neka je dan racionalan broj b, manji od 1, ciji je decimalni zapis beskonacan mjesoviti periodicki. Neka mu je predperiod duljne m, a period duljine n. Taj broj mozemo zapisati na sljedeci nacin:

$$b = 0.\underbrace{b'_1 b'_2 b'_3 ... b'_m}_{\text{predperiod}} \underbrace{\dot{b}_1 b_2 b_3 ... \dot{b}_n}_{\text{period}}$$

gdje su $b'_1, b'_2, ..., b'_m$ znamenke nakon decimalne tocke koje se ne ponavljaju i $b_1, b_2, ..., b_n$ znamenke nakon decimalne tocke koje se neprestano ponavljaju. Vrijedi $b'_1, b'_2, ..., b'_m \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$ i $b_1, b_2, ..., b_n \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$.

Primjetimo prije svega da dani racionalan broj mozemo zapsati kao zbroj dva racionalna broja na sljedeci nacin:

$$b = 0.b'_1 b'_2 b'_3 ... b'_m \dot{b}_1 b_2 b_3 ... \dot{b}_n = 0.b'_1 b'_2 b'_3 ... b'_m + 0.\underbrace{000...0}_{\substack{\downarrow \\ m \text{ nula}}}\dot{b}_1 b_2 b_3 ... \dot{b}_n$$

Ideja je pokusati svesto ovaj slucaj na prethodni. Da bismo to postigli pomnozimo cijelu jednakost s 10^m, slijedi:

$$b = 0.b'_1 b'_2 b'_3 ... b'_m + 0.\underbrace{000...0}_{\substack{\downarrow \\ m \text{ nula}}}\dot{b}_1 b_2 b_3 ... \dot{b}_n \ \Big/ \cdot 10^m$$

Broj 10^m je sastavljen od jedinice i m nula nakon toga, a mnozenje takvim brojem provodi se tako da se samo "pomakne" decimalna tocka m puta u desno. To primjenjujemo na desnu stranu jednakost pa vrijedi:

$$b \cdot 10^m = 0.b'_1 b'_2 b'_3 ... b'_m + 0.\overbrace{000...0}^{\substack{m \text{ nula} \\ \uparrow}}\dot{b}_1 b_2 b_3 ... \dot{b}_n$$

$$b \cdot 10^m = \overline{b'_1 b'_2 b'_3 ... b'_m} + 0.\dot{b}_1 b_2 b_3 ... \dot{b}_n$$

Drugi racinalni broj u sumi s desne strane jednakosti zapisemo u obliku razlomka na nacin predstavljen u prvom dijelu dokumenta, slijedi:

$$b \cdot 10^m = \overline{b'_1 b'_2 b'_3 ... b'_m} + 0.\dot{b}_1 b_2 b_3 ... \dot{b}_n \quad \Rightarrow \quad b \cdot 10^m = \overline{b'_1 b'_2 b'_3 ... b'_m} + \frac{\overline{b_1 b_2 b_3 ... b_n}}{\underbrace{999...9}_{\substack{\downarrow \\ n \text{ devetki}}}}$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{10^m}$, slijedi:

$$b \cdot 10^m = \overline{b'_1 b'_2 b'_3 ... b'_m} + \frac{\overline{b_1 b_2 b_3 ... b_n}}{\underbrace{999...9}_{\substack{\downarrow \\ n \text{ devetki}}}} \ \Big/ \cdot \frac{1}{10^m}$$

$$b \cdot 10^m \cdot \frac{1}{10^m} = \overline{b'_1 b'_2 b'_3 ... b'_m} \cdot \frac{1}{10^m} + \frac{\overline{b_1 b_2 b_3 ... b_n}}{\underbrace{999...9}_{\substack{\downarrow \\ n \text{ devetki}}}} \cdot \frac{1}{10^m}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{b \cdot^{1} \cancel{10^m}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{10^m}_1} = \frac{\overline{b_1' b_2' b_3' ... b_m'}}{1} \cdot \frac{1}{10^m} + \frac{\overline{b_1 b_2 b_3 ... b_n}}{\underbrace{\overline{999...9}}_{n \text{ devetki}}} \cdot \frac{1}{10^m}$$

$$\frac{b \cdot 1 \cdot 1}{1 \cdot 1} = \frac{\overline{b_1' b_2' b_3' ... b_m'} \cdot 1}{1 \cdot 10^m} + \frac{\overline{b_1 b_2 b_3 ... b_n} \cdot 1}{\underbrace{\overline{999...9}}_{n \text{ devetki}} \cdot 10^m}$$

$$\frac{b}{1} = \frac{\overline{b_1' b_2' b_3' ... b_m'}}{10^m} + \frac{\overline{b_1 b_2 b_3 ... b_n}}{\underbrace{\overline{999...9}}_{n \text{ devetki}} \cdot 10^m}$$

$$b = \frac{\overline{b_1' b_2' b_3' ... b_m'}}{10^m} + \frac{\overline{b_1 b_2 b_3 ... b_n}}{\underbrace{\overline{999...9}}_{n \text{ devetki}} \cdot 10^m}$$

Svedimo razlomke na desnoj strani jednakosti na zajednicki nazivnik $\underbrace{\overline{999...9}}_{n \text{ devetki}} \cdot 10^m$, slijedi:

$$b = \frac{\overline{b_1' b_2' b_3' ... b_m'} \cdot \overbrace{\overline{999...9}}^{n \text{ devetki}} + \overline{b_1 b_2 b_3 ... b_n}}{\underbrace{\overline{999...9}}_{n \text{ devetki}} \cdot 10^m}$$

Kako je zapis broja 10^m sastavljen od jedinice i n nula nakon toga, izraz poprima sljedeci oblik:

$$b = \frac{\overline{b_1' b_2' b_3' ... b_m'} \cdot \overbrace{\overline{999...9}}^{n \text{ devetki}} + \overline{b_1 b_2 b_3 ... b_n}}{\overline{\underbrace{999...9}_{n \text{ devetki}}\underbrace{000...0}_{m \text{ nula}}}}$$

Dakle vrijedi sljedeca tvrdnja:

Tvrdnja II: Naime, neka je dan racionalan broj b, manji od 1, ciji je decimalni zapis beskonacan mjesoviti periodicki. Neka mu je predperiod duljne m, a period duljine n. Taj broj mozemo zapisati na sljedeci nacin:

$$b = 0.\underbrace{b'_1 b'_2 b'_3 ... b'_m}_{\text{predperiod}}\underbrace{\dot{b}_1 b_2 b_3 ... \dot{b}_n}_{\text{period}}$$

gdje su $b'_1, b'_2, ..., b'_m$ znamenke nakon decimalne tocke koje se ne ponavljaju i $b_1, b_2, ..., b_n$ znamenke nakon decimalne tocke koje se neprestano ponavljaju. Vrijedi $b'_1, b'_2, ..., b'_m \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$ i $b_1, b_2, ..., b_n \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$.

Njegov je zapis u obliku razlomka jednak:

$$b = \frac{\overline{b'_1 b'_2 b'_3 ... b'_m} \cdot \overbrace{\overline{999...9}}^{n \text{ devetki}} + \overline{b_1 b_2 b_3 ... b_n}}{\underbrace{999...9}_{n \text{ devetki}}\underbrace{000...0}_{m \text{ nula}}}$$

Primjer: Zapisi racionalan broj $0.234\dot{6}71\dot{1}$, ciji je decimalni zapis mjesoviti periodicki, u obliku razlomka.

Rjesenje: Vrijedi:

$$0.234\dot{6}71\dot{1} = \frac{234 \cdot 9999 + 6711}{9999000} = \frac{2339766 + 6711}{9999000} - \frac{2346477}{9999000}$$

Dakle dolje je broj od 4 devetke i 3 nule nakon toga jer je period duljine 4, a predperiod duljine 3.

Jedino pitanje koje se sada moze postaviti je, a sto ako je racionalan broj koji trebamo zapisati u obliku razlomka veci od 1. Odgovor je jednostavan, svaki racionalan broj veci od 1 mozemo zapisati kao zbroj njegovog cijelog djela i te ostatka, dakle decimalnog broja koji ispred decimalne tocke ima 0, a nakon nje iste znamenke kao i pocetan broj.

Primjerice vrijedi:

$$2.\dot{4}3\dot{1} = 2 + 0.\dot{2}3\dot{1}$$

Pa sada jednostavno razmatranje primjenimo na dugi broj sume. Time smo pokrili sve situacije koje se eventualno mogu dogoditi.