1.1 Brojevni sustavi (staro izdanje knjige)

✖ Zadatak 16: (str. 12) 3) Odredi, ako postoji, bazu brojevnog sustava u kojem vrijedi jednakost:

$$31 \cdot 412 = 23322$$

Rjesenje: Prepostavimo da se racun odvio u bazi (x) brojevnog sustava, vrijedi:

$$31_{(x)} \cdot 412_{(x)} = 23322_{(x)}$$

Prvo cemo sve zapise brojeva prebaciti iz brojevnog sustava s bazom (b) u dekadski brojevni sustav, slijedi:

$$\overbrace{3}^{x^1}\overbrace{1}^{x^0}{}_{(x)} = 3 \cdot x^1 + 1 \cdot x^0 = 3x + 1 \cdot 1 = 3x + 1$$

$$\overbrace{4}^{x^2}\overbrace{1}^{x^1}\overbrace{2}^{x^0}{}_{(x)} = 4 \cdot b^2 + 1 \cdot x^1 + 2 \cdot x^0 =$$

$$= 4x^2 + 1 \cdot x + 2 \cdot 1 = 4x^2 + x + 2$$

$$\overbrace{2}^{x^4}\overbrace{3}^{x^3}\overbrace{3}^{x^2}\overbrace{2}^{x^1}\overbrace{2}^{x^0}{}_{(x)} = 2 \cdot x^4 + 3 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x^1 + 2 \cdot x^0 =$$

$$= 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2 \cdot x + 2 \cdot 1 = 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 2$$

Pocetna jednakost sada poprima sljedeci oblik:

$$\overbrace{31_{(x)}}^{3x+1} \cdot \overbrace{412_{(x)}}^{4x^2+x+2} = \overbrace{23322_{(x)}}^{2x^4+3x^3+3x^2+2x+2}$$

$$(3x + 1)\left(4x^2 + x + 2\right) = 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 2$$

Rijesimo se zagrada na lijevoj strani mnozeci svaki clan prve zagrade sa svakim clanom druge zagrade, slijedi:

$$3x \cdot 4x^2 + 3x \cdot x + 3x \cdot 2 + 1 \cdot 4x^2 + 1 \cdot x + 1 \cdot 2 = 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 2$$

$$12x \cdot x^2 + 3x \cdot x + 6x + 4x^2 + x + 2 = 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 2$$

Pomnozimo potencije na lijevoj strani prema pravilu za mnozenje potencija istih baza, osnosno prema izrazu $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, slijedi:

$$12x^1 \cdot x^2 + 3x^1 \cdot x^1 + 6x + 4x^2 + x + 2 = 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 2$$

$$12x^{1+2} + 3x^{1+1} + 6x + 4x^2 + x + 2 = 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 2$$

$$12x^3 + 3x^2 + 6x + 4x^2 + x + 2 = 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 2$$

Pokratim istovjetne izraze na lijevoj i desnoj strani, slijedi:

$$12x^3 + \cancel{3x^2} + 6x + 4x^2 + x + \cancel{2} = 2x^4 + 3x^3 + \cancel{3x^2} + 2x + \cancel{2}$$

Pozbrajam potencije istih baza i eksponenata, slijedi:

$$12x^3 + 4x^2 + 7x = 2x^4 + 3x^3 + 2x$$

Prebacimo sve na desnu stranu, slijedi:

$$2x^4 + 3x^3 - 12x^3 - 4x^2 + 2x - 7x = 0$$

Pozbrajam potencije istih baza i eksponenata, slijedi:

$$2x^4 - 9x^3 - 4x^2 - 5x = 0$$

Izlucimo b iz svih clanova sume, slijedi:

$$x\left(2x^3 - 9x^2 - 4x - 5\right) = 0$$

Sada postoje dvije mogucnosti, vrijedi:

$$x = 0 \quad \text{ili} \quad 2x^3 - 9x^2 - 4x - 5 = 0$$

Dakle jedno rijesenje jest $b = 0$ sto je nemoguce, a ostala rijesenja dobit cemo rijesavanjem jednadzbe treceg stupnja $2b^3 - 9b^2 - 4b - 5 = 0$. Da bismo rijesili tu jednadzbu koristit cemo sljedecu tvrdnju:

Tvrdnja: Ako polinom $P(x)$ n-tog stupnja

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

ima cijelobrojnu nul-tocku tada ona mora biti dijelitelj slobodnog koeficijenta a_0.

Napomena: Nul-tocka polinoma i rijesenje pripadne jednadzbe su sinonimi, jednake stvari!

Imajuci na umu tu tvrdnju, znamo da ako postoji cijelobrojno rjesnje dane jednadzbe tada ono mora dijeliti slobodni koeficijent, odnosno broj -5. To su dakle brojevi $\{1, -1, 5, -5\}$. Sada cemo svaki od tih brojeva uvrstit u jednadzbu i gledati kada ce rezultat biti jednak 0.

Pocnimo s 1, dakle neka je $x = 1$, racunamo:

$$\begin{aligned}
2\underbrace{x}_{1}{}^3 - 9\underbrace{x}_{1}{}^2 - 4\underbrace{x}_{1} - 5 &= 2 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 5 = \\
&= 2 \cdot 1 - 9 \cdot 1 - 4 \cdot 1 - 5 = \\
&= 2 - 9 - 4 - 5 = \\
&= -16
\end{aligned}$$

Dakle broj 1 nije rjesenje dane jednadzbe, neka je sada $x = -1$, racunamo:

$$\begin{aligned}
2\underbrace{x}_{-1}{}^3 - 9\underbrace{x}_{-1}{}^2 - 4\underbrace{x}_{-1} - 5 &= 2 \cdot (-1)^3 - 9 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) - 5 = \\
&= 2 \cdot (-1) - 9 \cdot (-1) - 4 \cdot (-1) - 5 = \\
&= -2 + 9 + 4 - 5 = \\
&= 6
\end{aligned}$$

Dakle ni broj -1 nijen rjesenje dane jednadzbe, neka je nadalje $x = 5$, racunamo:

$$\begin{aligned}
2\underbrace{x}_{5}{}^3 - 9\underbrace{x}_{5}{}^2 - 4\underbrace{x}_{5} - 5 &= 2 \cdot 5^3 - 9 \cdot 5^2 - 4 \cdot 5 - 5 = \\
&= 2 \cdot 125 - 9 \cdot 25 - 4 \cdot 5 - 5 = \\
&= 250 - 225 - 20 - 5 = \\
&= 0
\end{aligned}$$

Posto smo dobili 0 nakon racuna, broj 5 jest rijesenje dane jednadzbe. Kada pronadjemo jedno rijesnje dane jednadzbe koristimo slijedecu tvrdnju.

> Tvrdnja: Ako je x_0 nul-tocka polinoma n-tog stupnja
>
> $$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$
>
> tada vrijedi:
>
> $$(x - x_0) \mid a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$
>
> Odnosno polinom $(x - x_0)$ dijeli polinom $P(x)$.

Dakle ono sto cemo dalje napraviti jest podijeliti polinom s lijeve strane jednadzbe s polinomom $(x - 5)$, odnosno:

$$\big(2x^3 - 9x^2 - 4x - 5\big) : (x - 5) =$$

Postupak dijeljenja provodimo na nacin da podijelimo vodeci clan dijeljenika s vodecim clanom dijelitelja, dakle $2x^3$ s x. Rezultat te operacije jest $2x^3 : x = \frac{2^{x^2}\cancel{x^3}}{\cancel{x}_1} = \frac{2x^2}{1} = 2x^2$. Taj broj upsemo na desnu stranu. Nadalje svaki clan dijelitelja pomnozimo s tim brojem, dakle s $2x^2$ promijenimo predznak rezultatu i to potpisemo ispod odgovarajuce potencije dijeljenika. Zbrojimo potpisane polinome. U nastavku slijedi provedeni prvi korak, vrijedi:

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
\big(2x^3 & - & 9x^2 & - & 4x & - & 5) & : \ (x-5) = 2x^2 \\
-2x^3 & + & 10x^2 & & & & & \\
\hline
 & & x^2 & - & 4x & - & 5 &
\end{array}$$

Potpuno isti postupak provedemo na dobiveni polinom $x^2 - 4x - 5$, slijedi:

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
\big(2x^3 & - & 9x^2 & - & 4x & - & 5) & : \quad (x-5) = 2x^2 + x \\
-2x^3 & + & 10x^2 & & & & & \\
\hline
 & & x^2 & - & 4x & - & 5 & \\
 & & -x^2 & + & 5x & & & \\
\cline{3-7}
 & & & & x & - & 5 &
\end{array}
$$

Te na kraju ponovimo isti postupak za dobiveni polinom $x - 5$, slijedi:

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
\big(2x^3 & - & 9x^2 & - & 4x & - & 5) & : \quad (x-5) = 2x^2 + x + 1 \\
-2x^3 & + & 10x^2 & & & & & \\
\hline
 & & x^2 & - & 4x & - & 5 & \\
 & & -x^2 & + & 5x & & & \\
\cline{3-7}
 & & & & x & - & 5 & \\
 & & & & -x & + & 5 & \\
\cline{5-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Dakle rezultat dijeljenja jest polinom $2x^2 + x + 1$. Sada jos preostaje rijesiti tu kvadratnu jednadzbu $2x^2 + x + 1 = 0$. To cemo uciniti koristeci izraz za rijesenja kvadratne jednadzbe:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Racunamo:

$$x_1, x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{4}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{4}$$

Dakle ova jednadzba nema rjesenja u realnim brojevima (pod korijenom se nalazi negativan broj sto znaci da ce rjesenja biti kompleksnih brojevi). To znaci da je jedino rijesenje pocetne jednadzbe $x = 0$ i $x = 5$. Prvo rjesenje ($x = 0$) ne moze biti baza brojevnog sustava, s druge strane kako su sve znamenke u zapisima brojeva strogo manje od drugog rjesenja ($x = 5$) sto znaci da je to jedino prihvatljivo rjesenje. Dakle u brojevnom sustavu s bazom 5 moze se provesti racun dan u zadatku.