1.3 Binomni poucak
(staro izdanje knjige)

✖ Zadatak 6: (str. 30) 1) Rijesi jednadzbu:

$$\frac{(n+2)!}{n!} = 72$$

Rjesenje: Prije svega postavit cemo uvjete na trazenu nepoznanicu n. Naime faktorijeli su definirani samo za prirodne brojeve, s time da je po dogovoru $0! = 1$ pa onda i 0 ubrajam u dozvoljene brojeve. To znaci da promatrajuci nas zadatak sve sto se nalazi pod znakon usklicnika treba biti vece i ili jednako 0. Odnsnosno mora vrijediti:

$$n+2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad n \geq -2$$

$$n \geq 0$$

No ako broj mora biti veci ili jednak od 0 i od -2 tada mogu skraceno pisati da mora vrijediti $n \geq 0$. Dakle sva rjesenja manja od 0 na kraju moram odbaciti.

Nadalje uocimo da je broj u brojniku razlomka veci od onong u nazivniku, odnosno vrijedi $n+2 > n$, sto znaci da cemo raspisivati izraz u nazivniku. Naime ono sto vrijedi (prema definiciji faktorijela) jest:

$$(n+2)! = (n+2)(n+2-1)(n+2-2)(n+2-3)\cdot\ldots\cdot(n+2-n)[n+2-(n+1)] =$$

$$= (n+2)(n+1)n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot(n+2-n-1) =$$

$$= (n+2)(n+1)n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$$

Ili laicki receno zamislim da uzmem sve brojeve od 1 do $n+2$ i pomnozim ih te im zamijenim redoslijed (tako da su clanovi produkta poredani silazno).
Isto napravim i za izraz $n!$, vrijedi $n! = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$, sto znaci da prethodni izraz mozemo zapisati kao:

$$(n+2)! = (n+2)(n+1)\underbrace{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}_{n!} = (n+2)(n+1)n!$$

Razlog zbog cega sam trazio izraz $n!$ u izrazu $(n+2)!$ jest cinjenica da ce se sad pocetni problem dosta pojednostavniti, naime imajuci na umu prethodno dobivenu cinjenicu vracam se u pocetni zadatak. Slijedi:

$$\frac{\overbrace{(n+2)!}^{(n+2)(n+1)n!}}{n!} = 72$$

$$\frac{(n+2)(n+1)n!}{n!} = 72$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{(n+2)(n+1)\cancel{n!}^{1}}{{}_{1}\cancel{n!}} = 72$$

$$\frac{(n+2)(n+1)}{1} = 72$$

$$(n+2)(n+1) = 72$$

Rijesim se zagrade mnozeci svaki clan prve zagrade sa svakim clanom druge, slijedi:

$$n \cdot n + n \cdot 1 + 2 \cdot n + 2 \cdot 1 = 72$$

$$n^2 + n + 2n + 2 = 72$$

$$n^2 + 3n + 2 = 72$$

Prebacim sve clanove s lijeve na desnu stranu, slijedi:

$$n^2 + 3n + 2 - 72 = 0$$

$$n^2 + 3n - 70 = 0$$

Dakle dobili smo kvadratnu jednadzbu, koju rijesavam prema izrazu za rjesenja kvadratne jednadzbe:

$$n_1, n_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Racunam:

$$n_1, n_2 = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-70)}}{2 \cdot 1}$$

$$n_1, n_2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 280}}{2}$$

$$n_1, n_2 = \frac{-3 \pm \sqrt{289}}{2}$$

$$n_1, n_2 = \frac{-3 \pm 17}{2}$$

Dakle prvo rjesenja jednadzbe jest:

$$n_1 = \frac{-3 - 17}{2} = \frac{-20}{2}$$

Pokratim sto se pokratiti dade, slijedi:

$$n_1 = \frac{{}^{-20}\cancel{-20}}{\cancel{2}_{1}} = \frac{-10}{1} = -10$$

Nadalje odredimo jos drugo rjesenje, slijedi:

$$n_1 = \frac{-3 + 17}{2} = \frac{14}{2}$$

Pokratim sto se pokratiti dade, slijedi:

$$n_1 = \frac{{}^{7}\cancel{14}}{\cancel{2}_1} = \frac{7}{1} = 7$$

Prema uvjetu zadatka, dakle $n \geq 0$ jedino zadovoljavajuce rjesenje jest $n_2 = 7$ i ime je zadatak rjesen.

❦ ✧ ❧

Zadatak 8: (str. 30) 1) Dokazi matematickom indukcijom da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi jednakost:

$$\frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + ... + \frac{n-1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}$$

Rjesenje: Provodimo dokaz matematickom indukcijom.

BAZA INDUKCIJE: Pokazimo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$. Uvrstavamo broj 1 u zadnji clan sume na lijevoj strani i u izraz na desnoj strani.

$$\frac{\overbrace{n}^{1} - 1}{\underbrace{n}_{1}!} = 1 - \frac{1}{\underbrace{n}_{1}!}$$

$$\frac{1-1}{1!} = 1 - \frac{1}{1!}$$

$$\frac{0}{1} = 1 - \frac{1}{1}$$

$$0 = 1 - 1$$

$$0 = 0$$

Kako je lijeva strana jednaka desnoj, tvrdnja vrijedi za $n = 1$.

PRETPOSTAVKA INDUKCIJE: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Dakle da vrijedi:

$$\frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + ... + \frac{n-1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}$$

KORAK INDUKCIJE: Uz pretpotavku pakazimo da tvrdnja vrijedi i za n+1.

Pogledajmo prvo kako bi trebao izgledati izraz na desnoj strani tvrdnje kad bi suma na lijevoj stani imala $n+1$ clanova. To cemo uciniti tako da u izrazu na desnoj strani zamijenimo n s $n+1$, racunam:

$$1 - \frac{1}{\underbrace{n}_{n+1}!} \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

Dakle to je ono sto bi trebali dobiti kada zbrojimo prvih $n+1$ clanova sume. Racunamo:

$$\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+...+\frac{n-1}{n!}+\frac{n+1-1}{(n+1)!}=(\star)$$

Posljednji, dakle $n+1$ clan sume, dobili smo tako da smo u posljednji clan na lijevoj strani tvrdnje, $\frac{n-1}{n!}$, umjesto n uvrstili $n+1$. Nastavljamo s racunom. Primjetimo se da je, prema pretpostavci indukcije, suma prvih n clanova sume jednaka $1-\frac{1}{n!}$. Slijedi:

$$(\star)=\underbrace{\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+...+\frac{n-1}{n!}}_{1-\frac{1}{n!}}+\frac{n+\cancel{1}\cancel{-1}}{(n+1)!}=$$

$$=1-\frac{1}{n!}+\frac{n}{(n+1)!}=(\star\star)$$

Prisjetimo se da mora vrijediti $(n+1)!=(n+1)\,n!$ jer se $n!$ i $(n+1)!$ kad ih raspisemo razlikuju samo za faktor $(n+1)$. Bitno nam je uvijek da jedan od faktorijela prikazem kao neki izraz pomnozen s drugim faktorijelom kako bi lakse nastavio racun. Imajuci to na umu racunam dalje, slijedi:

$$(\star\star)=1-\frac{1}{n!}+\frac{n}{\underbrace{(n+1)!}_{(n+1)n!}}=1-\frac{1}{n!}+\frac{n}{(n+1)\,n!}=(\spadesuit)$$

Posljednja dva razlomka svedemo na zajednicki nazivnik $(n+1)\,n!$, slijedi:

$$(\spadesuit)=1-\frac{1\cdot(n+1)-n}{(n+1)\,n!}=1-\frac{n+1-n}{(n+1)\,n!}=(\spadesuit\spadesuit)$$

Pokratim suprotne nepoznanice u brojniku te ponovno promjenim cinjenicu da mora vrijediti $(n+1)!=(n+1)\,n!$, slijedi:

$$(\spadesuit\spadesuit)=1-\frac{\cancel{n}+1\cancel{-n}}{\underbrace{(n+1)\,n!}_{(n+1)!}}=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

Time smo zapravo dobili isti izraz kao i na pocetku koraka indukcije, odnosno dobili smo upravo ono sto smo trebali dobiti.

Prema PMI mozemo zakljuciti da tvrdnja vrijedi za svaki $n\in\mathbb{N}$. Time je zadatak rijesen.

✵ Zadatak 8: (str. 30) 2) Dokazi matematickom indukcijom da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi jednakost:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

Rjesenje: Provodimo dokaz matematickom indukcijom.

BAZA INDUKCIJE: Pokazimo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$. Uvrstavamo broj 1 u zadnji clan sume na lijevoj strani i u izraz na desnoj strani.

$$\overbrace{n}^{1} \cdot \overbrace{n}^{1}! = (\overbrace{n}^{1} + 1)! - 1$$

$$1 \cdot 1! = (1+1)! - 1$$

$$1 \cdot 1 = 2! - 1$$

$$1 = 2 \cdot 1 - 1$$

$$1 = 2 - 1$$

$$1 = 1$$

Kako je lijeva strana jednaka desnoj, tvrdnja vrijedi za $n = 1$.

PRETPOSTAVKA INDUKCIJE: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Dakle da vrijedi:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

KORAK INDUKCIJE: Uz pretpotavku pakazimo da tvrdnja vrijedi i za n+1.

Pogledajmo prvo kako bi trebao izgledati izraz na desnoj strani tvrdnje kad bi suma na lijevoj stani imala $n+1$ clanova. To cemo uciniti tako da u izrazu na desnoj strani zamijenimo n s $n+1$, racunam:

$$(\overbrace{n}^{n+1} + 1)! - 1 \quad \Rightarrow \quad 1 - (n+1+1)! = 1 - (n+2)!$$

Dakle to je ono sto bi trebali dobiti kada zbrojimo prvih $n+1$ clanova sume. Racunamo:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n! + (n+1) \cdot (n+1)! = (\star)$$

Posljednji, dakle $n+1$ clan sume, dobili smo tako da smo u posljednji clan na lijevoj strani tvrdnje, $n \cdot n!$, umjesto n uvrstili $n+1$. Nastavljamo s racunom. Primjetimo se da je, prema pretpostavci indukcije, suma prvih n clanova sume jednaka $(n+1)! - 1$. Slijedi:

$$(\star) = \underbrace{1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n!}_{(n+1)! - 1} + (n+1) \cdot (n+1)! =$$

$$= (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! = (\star\star)$$

Promijenimo malo redoslijed sumanada, slijedi:

$$(\star\star) = (n+1)! + (n+1) \cdot (n+1)! - 1 = (\spadesuit)$$

Izlucimo $(n+1)!$ iz prva dva clana sume, slijedi:

$$(\spadesuit) = (n+1)! \cdot (1+n+1) - 1 = (n+1)! \cdot (n+2) - 1 =$$

$$= (n+2)\,(n+1)! - 1 = (\spadesuit\spadesuit)$$

Imajuci na umu da vrijedi $(n+1)! = (n+1)\,n!$ jer se $n!$ i $(n+1)!$ kad ih raspisemo razlikuju samo za faktor $(n+1)$. Kad bi n zamijenili s $n+1$, dobili bi jednakost:

$$(\overbrace{n}^{n+1}+1)! = (\overbrace{n}^{n+1}+1)(\overbrace{n}^{n+1})!$$

$$(n+1+1)! = (n+1+1)\,(n+1)$$

$$(n+2)! = (n+2)\,(n+1)!$$

Primjenimo to na racun koji smo provodili, slijedi:

$$(\spadesuit\spadesuit) = \underbrace{(n+2)\,(n+1)!}_{(n+2)!} - 1 = (n+2)! - 1$$

Time smo zapravo dobili isti izraz kao i na pocetku koraka indukcije, odnosno dobili smo upravo ono sto smo trebali dobiti.

Prema PMI mozemo zakljuciti da tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. Time je zadatak rijesen.

☙ ✧ ❧

✖ <u>Zadatak 12</u>: (str. 30) 6) Odredi prirodni broj n tako da vrijedi jednakost:

$$17\binom{2n-1}{n} = 9\binom{2n}{n-1}$$

<u>Rjesenje</u>: Prije svega prisjetimo se da za binomni koeficijent oblika $\binom{n}{k}$ mora vrijediti $n \geq k$. Imajuci to na umu javljaju se dva uvjeta koja rjesenja moraju zadvoljavati, dakle mora vrijediti:

$$2n - 1 \geq n \quad \Rightarrow \quad 2n - n \geq 1 \quad \Rightarrow \quad n \geq 1$$

$$2n \geq n - 1 \quad \Rightarrow \quad 2n - n \geq -1 \quad \Rightarrow \quad n \geq -1$$

No ako broj mora biti veci ili jednak od 1 i od -1 tada mogu skraceno pisati da mora vrijediti $n \geq 1$. Dakle sva rjesenja manja od 1 na kraju moram odbaciti.

Nadalje prisjetim se na koji nacin racunam vrijednost binomnog koeficijenta, vrijedi:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1}$$

<u>Napomena</u>: Dakle binomni koeficijent $\binom{n}{k}$ racunam tako da u nazivniku napisem produkt brojeva od 1 do k. U brojniku s druge strane trebam napisati produkt k brojeva na nacin da pocnem s brojem n i spustam se za 1. Postavlja se pitanje koji je posljednji clan takvog produkta. Odgovor je $(n-k+1)$, no postavlja se pitanje kako smo dosli do tog broja. Naime ako se svaki put spustim za 1, tada se nakon k koraka spustim za k, no kako pocnem s n i tek se tad pocnem spustati za 1, da bih dobio k brojeva s brojem n dovljno se pustiti za 1 tocno $k-1$ puta no tada je posljednji clan produkta oblika $(n-(k-1)) = (n-k+1)$.

Primjenimo izraz za racunanje binomnog koeficijenta, na zadatak, vrijedi:

$$17 \underbrace{\binom{2n-1}{n}}_{\frac{(2n-1)\cdot(2n-2)\cdot...\cdot(2n-1-n+1)}{n\cdot(n-1)\cdot...\cdot 2\cdot 1}} = 9 \underbrace{\binom{2n}{n-1}}_{\frac{2n\cdot(2n-1)\cdot...\cdot(2n-(n-1)+1)}{(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot 2\cdot 1}}$$

$$17 \frac{(2n-1) \cdot (2n-2) \cdot ... \cdot (2n-1-n+1)}{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1} = 9 \frac{2n \cdot (2n-1) \cdot ... \cdot (2n-(n-1)+1)}{(n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1}$$

Pokratimo suprotne brojeve u zadnjem clanu produkta u brojniku razlomka na lijevoj strani jednakosti, slijedi:

$$17 \frac{(2n-1) \cdot (2n-2) \cdot ... \cdot \left(2n \cancel{-1} - n + \cancel{1}\right)}{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1} = 9 \frac{2n \cdot (2n-1) \cdot ... \cdot (2n-n+1+1)}{(n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1}$$

$$17 \frac{(2n-1) \cdot (2n-2) \cdot ... \cdot n}{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1} = 9 \frac{2n \cdot (2n-1) \cdot ... \cdot (n+2)}{(n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1}$$

Dodajmo jos dva clana produkta u brojniku razlomka na desnoj strani isped posljednjeg clana podukta n, slijedi:

$$17 \frac{(2n-1) \cdot (2n-2) \cdot ... \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n}{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1} = 9 \frac{2n \cdot (2n-1) \cdot ... \cdot (n+2)}{(n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1}$$

Pokratimo n u brojniku i nazivniku razlomka na lijevoj strani:

$$17 \frac{(2n-1) \cdot (2n-2) \cdot ... \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot \cancel{n}^{1}}{{}_{1}\cancel{n} \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1} = 9 \frac{2n \cdot (2n-1) \cdot ... \cdot (n+2)}{(n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1}$$

Nadalje pokratimo istovjetne clanove u brojnicima razlomka na lijevoj i desnoj strani te isto napravim i s istovjetnim clanovima u nazivnicima razlomaka s lijeve i desne strane, slijedi:

$$17\frac{{}^{1}\cancel{(2n-1)}\cdot{}^{1}\cancel{(2n-2)}\cdot\ldots\cdot{}^{1}\cancel{(n+2)}\cdot(n+1)\cdot 1}{1\cdot_{1}\cancel{(n-1)}\cdot\ldots\cdot_{1}\cancel{2}\cdot 1}=9\frac{2n\cdot\cancel{(2n-1)}^{1}\cdot\ldots\cdot\cancel{(n+2)}^{1}}{\cancel{(n-1)}_{1}\cdot\cancel{(n-2)}_{1}\cdot\ldots\cdot\cancel{2}_{1}\cdot 1}$$

$$17\frac{n+1}{1}=9\frac{2n}{1}$$

$$17\,(n+1)=9\cdot 2n$$

Rijesim se zagrade na lijevoj strani, slijedi:

$$17n+17=18n$$

Prebacim sve nepoznanice s lijeve na desnu stranu, slijedi:

$$17=18n-17n$$

$$17=n$$

$$n=17$$

Posto dobiveno rjesenje zadovoljava uvjet s pocetka, $n\geq 1$, zadatak je rijesen.

❧ ✧ ☙

✠ Zadatak 13: (str. 30) 2) Odredi prirodni broj x tako da vrijedi jednakost:

$$30\binom{x}{5}+8\binom{x}{4}=21\binom{x}{3}-8\binom{x}{2}$$

Rjesenje: Prije svega prisjetimo se da za binomni koeficijent oblika $\binom{n}{k}$ mora vrijediti $n\geq k$. Imajuci to na umu javljaju se cetiri uvjeta koje rjesenja moraju zadvoljavati, dakle mora vrijediti:

$$x\geq 5 \quad \text{i} \quad x\geq 4 \quad \text{i} \quad x\geq 3 \quad \text{i} \quad x\geq 2$$

No ako broj mora biti veci ili jednak od 5, 4, 3 i od 2 tada mogu skraceno pisati da mora vrijediti $x\geq 5$. Dakle sva rjesenja manja od 5 na kraju moram odbaciti.

Nadalje prisjetim se na koji nacin racunam vrijednost binomnog koeficijenta, vrijedi:

$$\binom{n}{k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}$$

> Napomena: Za objasnjenje (ili pokusaj istoga) pogledaj Zadatak 12: 6).

Primjenimo izraz za racunanje binomnog koeficijenta, na zadatak, vrijedi:

$$30\,\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+8\,\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=$$

$$=21\,\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)}{1\cdot2\cdot3}-8\,\frac{x\cdot(x-1)}{1\cdot2}$$

$$30\,\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)}{120}+8\,\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)}{24}=$$

$$=21\,\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)}{6}-8\,\frac{x\cdot(x-1)}{2}$$

Pokratim sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{30}}{1}\,\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)}{\cancel{120}_{4}}+\frac{{}^{1}\cancel{8}}{1}\,\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)}{\cancel{24}_{3}}=$$

$$=\frac{{}^{7}\cancel{21}}{1}\,\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)}{\cancel{6}_{2}}-\frac{{}^{4}\cancel{8}}{1}\,\frac{x\cdot(x-1)}{\cancel{2}_{1}}$$

$$\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)}{40}+\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)}{3}=$$

$$=\frac{7\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x-2)}{2}-\frac{4\cdot x\cdot(x-1)}{1}$$

Pomnozim cijelu jednakost s $\dfrac{1}{x\cdot(x-1)}$ jer uocavam da svaki clan jednakosti sadrzi $x\cdot(x-1)$, slijedi:

$$\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)}{4}+\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)}{3}=$$

$$=\frac{7\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x-2)}{2}-\frac{4\cdot x\cdot(x-1)}{1}\;/\cdot\frac{1}{x\cdot(x-1)}$$

$$\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)}{4\cdot x\cdot(x-1)}+\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)}{3\cdot x\cdot(x-1)}=$$

$$=\frac{7\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x-2)}{2\cdot x\cdot(x-1)}-\frac{4\cdot x\cdot(x-1)}{1\cdot x\cdot(x-1)}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{x\cdot(x-1)}\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)}{4\cdot\cancel{x\cdot(x-1)}_{1}}+\frac{{}^{1}\cancel{x\cdot(x-1)}\cdot(x-2)\cdot(x-3)}{3\cdot\cancel{x\cdot(x-1)}_{1}}=$$

$$=\frac{7\cdot{}^{1}\,\cancel{x\cdot(x-1)}\cdot(x-2)}{2\cdot\cancel{x\cdot(x-1)}_{1}}-\frac{4\cdot{}^{1}\,\cancel{x\cdot(x-1)}}{\cancel{x\cdot(x-1)}_{1}}$$

$$\frac{(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)}{4}+\frac{(x-2)\cdot(x-3)}{3}=\frac{7\cdot(x-2)}{2}-\frac{4\cdot 1}{1}$$
$$\frac{(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)}{4}+\frac{(x-2)\cdot(x-3)}{3}=\frac{7\cdot(x-2)}{2}-4$$
Pomnozim cijelu jednadzbu s 12, slijedi:
$$\frac{(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)}{4}+\frac{(x-2)\cdot(x-3)}{3}=\frac{7\cdot(x-2)}{2}-4\ /\cdot 12$$
$$\frac{(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)}{4}\ \frac{12}{1}+\frac{(x-2)\cdot(x-3)}{3}\ \frac{12}{1}=$$
$$=\frac{7\cdot(x-2)}{2}\ \frac{12}{1}-4\cdot 12$$
Pokratim sto se pokratit dade, slijedi:
$$\frac{(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)}{{}_1\cancel{4}}\ \frac{\cancel{12}^3}{1}+\frac{(x-2)\cdot(x-3)}{{}_1\cancel{3}}\ \frac{\cancel{12}^4}{1}=$$
$$=\frac{7\cdot(x-2)}{{}_1\cancel{2}}\ \frac{\cancel{12}^6}{1}-48$$
$$\frac{3\,(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)}{1}+\frac{4\,(x-2)\cdot(x-3)}{1}=\frac{7\cdot 6\cdot(x-2)}{1}-48$$
$$3\,(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)+4\,(x-2)\cdot(x-3)=42\cdot(x-2)-48$$
Sredimo izraz raspisujuci zagrade, mnozenjem svakog clana prve zagrade sa svakim clanom druge zagrade kod prvog i drugog clana sume, slijedi:
$$3\,[x\cdot x+x\cdot(-3)+(-2)\cdot x+(-2)\cdot(-3)]\,(x-4)+$$
$$+4\,[x\cdot x+x\cdot(-3)+(-2)\cdot x+(-2)\cdot(-3)]=42x-84-48$$
$$3\left[x^2-3x-2x+6\right](x-4)+4\left[x^2-3x-2x+6\right]=42x-132$$
Zbrojim potencije istih baza i eksponenata, slijedi:
$$3\left[x^2-5x+6\right](x-4)+4\left[x^2-5x+6\right]=42x-132$$
$$3\left[x^2\cdot x+(-5x)\cdot x+6\cdot x+x^2\cdot(-4)+(-5x)\cdot(-4)+6\cdot(-4)\right]+$$
$$+4x^2-20x+24=42x-132$$
$$3\left[x^3-5x^2+6x-4x^2+20x-24\right]+4x^2-20x+24=42x-132$$
$$3\left[x^3-9x^2+26x-24\right]+4x^2-20x+24=42x-132$$
Rijesimo se zagrade, slijedi:
$$3x^3-27x^2+78x-72+4x^2-20x+24=42x-132$$
Prebacimo sve na lijevu stranu, te zbrojim potencije istih baza i eksponenata, slijedi:
$$3x^3-27x^2+78x-72+4x^2-20x+24-42x+132=0$$
$$3x^3-23x^2+16x+84=0$$
Da bismo rijesili tu jednadzbu koristit cemo sljedecu tvrdnju:

Tvrdnja: Ako polinom $P(x)$ n-tog stupnja

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

ima cijelobrojnu nul-tocku tada ona mora biti dijelitelj slobodnog koeficijenta a_0.

Napomena: Nul-tocka polinoma i rjesenje pripadne jednadzbe su sinonimi, jednake stvari!

Imajuci na umu tu tvrdnju, znamo da ako postoji cijelobrojno rjesnje dane jednadzbe tada ono mora dijeliti slobodni koeficijent, odnosno broj 84. To su dakle brojevi $\{1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 7, -7, 12, -12, 14, -14, 21, -21, 42, -42, 84, -84\}$. Svaki od tih brojeva trebali bi uvrstiti u dobivenu jednadzbu treceg stupnja i gledati kad ce rezultat biti 0. No to je puno brojeva pa da preskocimo cijeli proces probat cemo uvrstiti jedan jedini broj.

Probajmo recimo uvrstiti broj 6. Naravno taj broj uvrstavamo jer je to bas jedno rjesenje dane jednadzbe no opcenito je zaista potrebno uvrstavati jedna po jedan kandidat za rjesenje i gledati kad ce se dobiti 0. Dakle neka je $x = 6$, racunamo:

$$\begin{aligned} 3\underbrace{x}_{6}{}^3 - 27\underbrace{x}_{6}{}^2 + 16\underbrace{x}_{6} + 84 &= 3 \cdot 6^3 - 27 \cdot 6^2 + 16 \cdot 6 + 84 = \\ &= 3 \cdot 216 - 23 \cdot 36 + 96 + 84 = \\ &= 648 - 828 + 180 = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Posto smo dobili 0 nakon racuna, broj 6 jest rjesenje dane jednadzbe. Kada pronadjemo jedno rijesnje dane jednadzbe koristimo slijedecu tvrdnju.

Tvrdnja: Ako je x_0 nul-tocka polinoma n-tog stupnja

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

tada vrijedi:

$$(x - x_0) \mid a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

Odnosno polinom $(x - x_0)$ dijeli polinom $P(x)$.

Dakle ono sto cemo dalje napraviti jest podijeliti polinom s lijeve strane jednadzbe s polinomom $(x - 6)$, odnosno:

$$\left(3x^3 - 27x^2 + 16x + 84\right) : (x - 6) =$$

Postupak dijeljenja provodimo na nacin da podijelimo vodeci clan dijeljenika s vodecim clanom dijelitelja, dakle $3x^3$ s x. Rezultat te operacije jest $3x^3 : x = \frac{3^{x^2}\cancel{x^3}}{\cancel{x}_1} = \frac{3x^2}{1} = 3x^2$. Taj broj upsemo na desnu stranu. Nadalje svaki clan dijelitelja pomnozimo s tim brojem, dakle s $3x^2$ promijenimo predznak rezultatu i to potpisemo ispod odgovarajuce potencije dijeljenika. Zbrojimo potpisane polinome. U nastavku slijedi provedeni prvi korak, vrijedi:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrl}
\big(3x^3 & - & 23x^2 & + & 16x & + & 84) & : & (x-6) = 3x^2 \\
-3x^3 & + & 18x^2 & & & & & & \\
\hline
 & & -5x^2 & + & 16x & + & 84 & &
\end{array}
$$

Potpuno isti postupak provedemo na dobiveni polinom $-9x^2 + 16x + 84$, slijedi:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrl}
\big(3x^3 & - & 23x^2 & + & 16x & + & 84) & : & (x-6) = 3x^2 - 5x \\
-3x^3 & + & 18x^2 & & & & & & \\
\hline
 & & -5x^2 & + & 16x & + & 84 & & \\
 & & 5x^2 & - & 30x & & & & \\
\hline
 & & & & -14x & + & 84 & &
\end{array}
$$

Te na kraju ponovimo isti postupak za dobiveni polinom $-14x + 84$, slijedi:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrl}
\big(3x^3 & - & 23x^2 & + & 16x & + & 84) & : & (x-6) = 3x^2 - 5x - 14 \\
-3x^3 & + & 18x^2 & & & & & & \\
\hline
 & & -5x^2 & + & 16x & + & 84 & & \\
 & & 5x^2 & - & 30x & & & & \\
\hline
 & & & & -14x & + & 84 & & \\
 & & & & 14x & - & 84 & & \\
\hline
 & & & & & & 0 & &
\end{array}
$$

Dakle rezultat dijeljenja jest polinom $Q(x) = 3x^2 - 5x - 14$. Sada jos preostaje rijesiti kvadratnu jednadzbu $3x^2 - 5x - 14 = 0$. To cemo uciniti koristeci izraz za rijesenja kvadratne jednadzbe:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Racunamo:

$$x_1, x_2 = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-14)}}{2 \cdot 3}$$

$$x_1, x_2 = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 168}}{6}$$

$$x_1, x_2 = \frac{5 \pm \sqrt{193}}{6}$$

Dakle ova jednadzba ima dva iracionalna rjesenja, $x_1 = \dfrac{5 - \sqrt{193}}{6}$ i $x_2 = \dfrac{5 - \sqrt{193}}{6}$. No rjesenja dane jednadzbe moraju biti prirodni brojevi (tekst zadatka), dakle jedino moguce rjesenje jest $x = 6$, koje smo dobili uvrstavanjem specificnih brojeva. To rjesenje takodjer zadovoljava uvjet postavljen na pocetku, $n \geq 5$. Time je zadatak rijesen.

☙ ✧ ❧

Zadatak 13: (str. 30) 3) Odredi prirodni broj x tako da vrijedi jednakost:

$$\binom{x}{3} + \binom{x}{5} = \binom{x+1}{3}$$

Rjesenje: Prije svega prisjetimo se da za binomni koeficijent oblika $\dbinom{n}{k}$ mora vrijediti $n \geq k$. Imajuci to na umu javljaju se tri uvjeta koje rjesenja moraju zadvoljavati, dakle mora vrijediti:

$$x \geq 3 \quad \text{i} \quad x \geq 5$$

$$x + 1 \geq 3 \quad \Rightarrow \quad x \geq 3 - 1 \quad \Rightarrow \quad x \geq 2$$

No ako broj mora biti veci ili jednak od 3, 5 i 2 tada mogu skraceno pisati da mora vrijediti $x \geq 5$. Dakle sva rjesenja manja od 5 na kraju moram odbaciti.

Nadalje prisjetim se na koji nacin racunam vrijednost binomnog koeficijenta, vrijedi:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1}$$

Napomena: Za objasnjenje (ili pokusaj istoga) pogledaj Zadatak 12: 6).

Primjenimo izraz za racunanje binomnog koeficijenta, na zadatak, vrijedi:

$$\frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{(x+1) \cdot x \cdot (x-1)}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Kako svaki od razlomaka sadrzi izraz $x \cdot ()$ kao dio produkta u brojniku pomnizimo cijeli izraz s $\dfrac{1}{x \cdot (x-1)}$, kako bi pojednostavili jednakost, slijedi:

$$\frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{(x+1)\cdot x\cdot(x-1)}{3\cdot 2\cdot 1} \ / \cdot \frac{1}{x\cdot(x-1)}$$

$$\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{1}{x\cdot(x-1)}+\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{1}{x\cdot(x-1)} =$$

$$= \frac{(x+1)\cdot x\cdot(x-1)}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{1}{x\cdot(x-1)}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^1\cancel{x\cdot(x-1)}\cdot(x-2)}{6}\cdot\frac{1}{\cancel{x\cdot(x-1)}_1}+\frac{{}^1\cancel{x\cdot(x-1)}\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)}{120}\cdot\frac{1}{\cancel{x\cdot(x-1)}_1} =$$

$$= \frac{(x+1)\cdot{}^1\cancel{x\cdot(x-1)}}{6}\cdot\frac{1}{\cancel{x\cdot(x-1)}_1}$$

$$\frac{1\cdot(x-2)}{6}\cdot\frac{1}{1}+\frac{1\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)}{120}\cdot\frac{1}{1} =$$

$$= \frac{(x+1)\cdot 1}{6}\cdot\frac{1}{1}$$

$$\frac{x-2}{6}+\frac{(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)}{120}=\frac{x+1}{6}$$

Pomnozimo cijelu jendadzbu sa 120 da se rijesimo razlomaka, slijedi:

$$\frac{x-2}{6}+\frac{(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)}{120}=\frac{x+1}{6} \ / \cdot 120$$

$$\frac{x-2}{6}\cdot 120+\frac{(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)}{120}\cdot 120=\frac{x+1}{6}\cdot 120$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{x-2}{{}_1\cancel{6}}\cdot\frac{\cancel{120}^{20}}{1}+\frac{(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)}{{}_1\cancel{120}}\cdot\frac{\cancel{120}^1}{1}=\frac{x+1}{{}_1\cancel{6}}\cdot\frac{\cancel{120}^1}{1}$$

$$20\cdot(x-2)+(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)=20\cdot(x+1)$$

Raspisem prvu zagradu lijeve strane i zagradu na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$20x-40+(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)=20x+20$$

Pokratim istovjetne izraze s lijeve i desne strane jednakost, te peostale clanove sume desne strane prebacim na lijevu stranu jednakosti, slijedi:

$$\cancel{20x}-40+(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)=\cancel{20x}+20$$

$$-40+(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)-20=0$$

Zbrojim brojeve na lijevoj strani jednakosti pa slijdi:

$$(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)-60=0$$

Preostaje nam sada jos raspisati prvi clan sume lijeve strane jednakosti, to cinim tako da se prvo rijesim prve dvije zagrade po pravilu mnozenja svakog clana prve zagrade sa svakim clanom druge zagrade, slijedi:

$$[x \cdot x + x \cdot (-3) + (-2) \cdot x + (-2) \cdot (-3)] \cdot (x-4) - 60 = 0$$
$$\left(x^2 - 3x - 2x + 6\right) \cdot (x-4) - 60 = 0$$

Zbrojim potencije istih baza i eksponenata, slijedi:

$$\left(x^2 - 5x + 6\right) \cdot (x-4) - 60 = 0$$

Opet se rijesavam zagrada u prvom clanu sume lijeve strane jednakosti tako da mnozim svaki clan prve zagrade sa svakim clanom druge zagrade, slijedi:

$$x^2 \cdot x + (-5x) \cdot x + 6 \cdot x + x^2 \cdot (-4) + (-5x) \cdot (-4) + 6 \cdot (-4) - 60 = 0$$
$$x^3 - 5x^2 + 6x - 4x^2 + 20x - 24 - 60 = 0$$
$$x^3 - 9x^2 + 26x - 84 = 0$$

Da bismo rijesili tu jednadzbu koristit cemo sljedecu tvrdnju:

Tvrdnja: Ako polinom $P(x)$ n-tog stupnja

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

ima cijelobrojnu nul-tocku tada ona mora biti dijelitelj slobodnog koeficijenta a_0.

Napomena: Nul-tocka polinoma i rjesenje pripadne jednadzbe su sinonimi, jednake stvari!

Imajuci na umu tu tvrdnju, znamo da ako postoji cijelobrojno rjesnje dane jednadzbe tada ono mora dijeliti slobodni koeficijent, odnosno broj 84. To su dakle brojevi $\{1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 7, -7, 12, -12, 14, -14, 21, -21, 42, -42, 84, -84\}$. Svaki od tih brojeva trebali bi uvrstiti u dobivenu jednadzbu treceg stupnja i gledati kad ce rezultat biti 0. No to je puno brojeva pa da preskocimo cijeli proces probat cemo uvrstiti jedan jedini broj.

Probajmo recimo uvrstiti broj 7. Naravno taj broj uvrstavamo zato jer je to bas jedno rjesenje dane jednadzbe no opcenito je zaista potrebno uvrstavati jedna po jedan kandidat za rjesenje i gledati kad ce se dobiti 0. Dakle neka je $x = 7$, racunamo:

$$\begin{aligned} \underbrace{x}_{7}{}^3 - 9\underbrace{x}_{7}{}^2 + 26\underbrace{x}_{7} - 84 &= 7^3 - 9 \cdot 7^2 + 26 \cdot 7 - 84 = \\ &= 343 - 9 \cdot 49 + 182 - 84 = \\ &= 343 - 441 + 98 = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Posto smo dobili 0 nakon racuna, broj 7 jest rjesenje dane jednadzbe. Kada pronadjemo jedno rijesnje dane jednadzbe koristimo slijedecu tvrdnju.

> <u>Tvrdnja</u>: Ako je x_0 nul-tocka polinoma n-tog stupnja
>
> $$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$
>
> tada vrijedi:
>
> $$(x - x_0) \mid a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$
>
> Odnosno polinom $(x - x_0)$ dijeli polinom $P(x)$.

Dakle ono sto cemo dalje napraviti jest podijeliti polinom s lijeve strane jednadzbe s polinomom $(x - 7)$, odnosno:

$$\left(x^3 - 9x^2 + 26x - 84\right) : (x - 7) =$$

Postupak dijeljenja provodimo na nacin da podijelimo vodeci clan dijeljenika s vodecim clanom dijelitelja, dakle x^3 s x. Rezultat te operacije jest $x^3 : x = \frac{{}^{x^2}\cancel{x^3}}{\cancel{x}_1} = \frac{x^2}{1} = x^2$. Taj broj upsemo na desnu stranu. Nadalje svaki clan dijelitelja pomnozimo s tim brojem, dakle s x^2 promijenimo predznak rezultatu i to potpisemo ispod odgovarajuce potencije dijeljenika. Zbrojimo potpisane polinome. U nastavku slijedi provedeni prvi korak, vrijedi:

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
\big(x^3 & - & 9x^2 & + & 26x & - & 84) & : \ (x-7) = x^2 \\
-x^3 & + & 7x^2 & & & & & \\
\hline
 & & -2x^2 & + & 26x & - & 84 &
\end{array}$$

Potpuno isti postupak provedemo na dobiveni polinom $-2x^2 + 26x - 84$, slijedi:

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
\big(3x^3 & - & 9x^2 & + & 26x & - & 84) & : \ (x-7) = x^2 - 2x \\
-x^3 & + & 7x^2 & & & & & \\
\hline
 & & -2x^2 & + & 26x & - & 84 & \\
 & & x^2 & - & 14x & & & \\
\cline{3-7}
 & & & & 12x & - & 84 &
\end{array}$$

Te na kraju ponovimo isti postupak za dobiveni polinom $12x - 84$, slijedi:

$$
\begin{array}{rcrcrcrl}
(3x^3 & - & 9x^2 & + & 26x & - & 84) & : \ (x-7) = x^2 - 2x + 12 \\
-x^3 & + & 7x^2 & & & & & \\
\hline
 & & -2x^2 & + & 26x & - & 84 & \\
 & & x^2 & - & 14x & & & \\
\hline
 & & & & 12x & - & 84 & \\
 & & & & -12x & + & 84 & \\
\hline
 & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Dakle rezultat dijeljenja jest polinom $Q(x) = x^2 - 2x + 12$. Sada jos preostaje rijesiti kvadratnu jednadzbu $x^2 - 2x + 12 = 0$. To cemo uciniti koristeci izraz za rjesenja kvadratne jednadzbe:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Racunamo:

$$x_1, x_2 = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1, x_2 = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 48}}{2}$$

$$x_1, x_2 = \frac{2 \pm \sqrt{-44}}{2}$$

Kako se ispod korijena nalazi negativan broj to znaci da dana jednadzba nema realnih rjesenja, dakle jedino moguce rjesenje zadatka jest $x = 7$, koje smo dobili uvrstavanjem specificnih brojeva. To rjesenje takodjer zadovoljava uvjet postavljen na pocetku, $n \geq 5$. Time je zadatak rijesen.