1.3 Binomni poucak
(staro izdanje knjige)

Prije rijesavanja zadataka obratimo paznju na jednakost kojom cemo se nadalje korisiti cije je ime binomna formula. Nju mozemo zapisati dvojako i to tako da uvjetno receno napisem sve clanove s desne strane ili skraceno pomocu znaka sumacije. Pogledajmo prvo dulji zapis, vrijedi:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + ... + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

Dakle pravilo je jasno, svaki clan sadrzi binomni koeficijent i dvije potencije ciji eksponenti rastu od 0 do n, odnosno padaju od n do 0. Ono sto je bitno primjetiti jest da ako zbrojimo eksponente poetncija uvijek u zbroju dobijemo n, odnosno eksponent potencije na lijevij strani. No to znaci da ako je jedan eksponent jednak recimo k, kako u zbroju moraju dati n, drugi je sigurno jednak $n-k$. Nadalje ono sto mogu jos primjetiti jest da se donji broj u binomnom koeficijentu pokalapa s eksponentom druge potencije. To me navodi na sljedeci zakljucak: ako uzmem da je $k \in \{0,1,2,...,n-1,n\}$, tada je svaki clan sume na desnoj strani oblika:

$$\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Primjetimo da svi zakljuci vrijede, donji broj u binomnom koeficijentu se poklapa s eksponentom druge potencije te zbroj eksponenata potencija iznosi upravo n. No to znaci da pocetnu jednakost mogu zapisati u puno skracenijem obliku, naime pomocu znaka sumacije, vrijedi:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Grcko slovo sigma Σ je oznaka koja govori da se radi o sumi, k je indeks, odnosno varijabla koja se mijenja. U nasem slucaju ona mora poprimiti sve vrijednosti od 0 do n. Zato pisemo $k=0$ ispod znaka sumacije, a n iznad. Gornji zapis govori koja se varijabla mijenja i od kuda pocinje, a gornji oznacava gdje zavrsava.

Mi cemo u sljedecim zadacima koristiti izraz za opci clan binomne formula, odnosno:

$$\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Pritom treba zapamtiti da je n eksponent potencije $(a+b)^n$ koju promatramo, a i b u izrazu odgovaraju istim oznakama u potenciji $(a+b)^n$. Dok je k varijabla. Ono sto k zapravo oznacava jest redni broj clana u konacnom raspisu sume. No treba paziti, posto sumacija pocinje od 0 tada kada uzmem bilo koji k zapravo govorim o $k+1$-vom clanu.

Zadatak 19: (str. 31) U raspisu potencije $(4x+3)^n$ koeficijenti clanova koji sadrze x^3 i x^4 su jednaki. Koliko iznose?

Rjesenje: Moj je zadatak prije svega pokusati odgonetnuti cemu je jednak n. Da bismo to ucinili posluzit cemo se izrazom za opci clan binomne formule $\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$. Pogledajmo cemu je jednak a odnosno b u izrazu za opci clan. Vrijedi:

$$\left(\overbrace{4x}^{a}+\overbrace{3}^{b}\right)^n$$

Drugim rijecima slijedi:

$$a=4x$$

$$b=3$$

Pogledajmo kako izgleda opci clan u raspisu binoma danog u zadatku, slijedi:

$$\binom{n}{k}\underbrace{a}_{4x}{}^{n-k}\underbrace{b}_{3}{}^{k} \quad \Rightarrow \quad \binom{n}{k}(4x)^{n-k}\,3^k=(\star)$$

Raspisem dobiveni izraz prema pravilu za mnozenje potenicija istih eksponenata, donosno prema $a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$, slijedi:

$$(\star)=\binom{n}{k}4^{n-k}x^{n-k}3^k=(\star\star)$$

Poredamo calnove produkta tako da potencija cija je baza nepoznanica x bude na kraju, slijedi:

$$(\star\star)=\binom{n}{k}4^{n-k}3^kx^{n-k}$$

Nadalje uocimo da ako clan raspisa sadrazava potenciju x^3 tada mora vrijediti:

$$x^{n-k}=x^3$$

Primjenimo li svojstvo injektivnosti eksponencijalne funkcije, odnosno cinjenicu da vrijedi $a^{x_1}=a^{x_2} \quad \Rightarrow \quad x_1=x_2$, mora vrijediti:

$$n-k=3$$

$$n-3=k$$

$$k=n-3$$

Vratimo se s tom cinjenicom u izraz za opci clan, slijedi:

$$\underbrace{\binom{n}{k}}_{n-3}4^{n-\overset{n-3}{\overset{\downarrow}{k}}}\,3^{\overset{n-3}{\overset{\downarrow}{k}}}\,x^{n-\overset{n-3}{\overset{\downarrow}{k}}}=\binom{n}{n-3}4^{n-(n-3)}3^{n-3}x^{n-(n-3)}=$$

$$= \binom{n}{n-3} 4^{\cancel{n}-\cancel{n}+3} 3^{n-3} x^{\cancel{n}-\cancel{n}+3} = \binom{n}{n-3} 4^3 3^{n-3} x^3 = (\spadesuit)$$

Primjenim simetriju binomnih koeficijenata, odnoso $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, slijedi:

$$(\spadesuit) = \binom{n}{n-(n-3)} 4^3 3^{n-3} x^3 = \binom{n}{n-n+3} 4^3 3^{n-3} x^3 =$$

$$= \underbrace{\binom{n}{3} 4^3 3^{n-3}}_{\text{koeficijent uz } x^3} x^3$$

Dakle sve sto stoji ispred potencije x^3 jest koeficijent.
Nadalje trazimo izgled clana koji sadrzi potenciju x^4. Promotrimo li opci clan opet zakljucujemo da mora vrijediti:

$$x^{n-k} = x^4$$

Primjenimo li svojstvo injektivnosti eksponencijalne funkcije, odnosno cinjenicu da vrijedi $a^{x_1} = a^{x_2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$, mora vrijediti:

$$n - k = 4$$

$$n - 4 = k$$

$$k = n - 4$$

Vratimo se s tom cinjenicom u izraz za opci clan, slijedi:

$$\underbrace{\binom{n}{k}}_{n-4} 4^{n-\overset{n-4}{\overset{\downarrow}{k}}} 3^{\overset{n-4}{\overset{\downarrow}{k}}} x^{n-\overset{n-4}{\overset{\downarrow}{k}}} = \binom{n}{n-4} 4^{n-(n-4)} 3^{n-4} x^{n-(n-4)} =$$

$$= \binom{n}{n-4} 4^{\cancel{n}-\cancel{n}+4} 3^{n-4} x^{\cancel{n}-\cancel{n}+4} = \binom{n}{n-4} 4^4 3^{n-4} x^4 = (\spadesuit)$$

Primjenim simetriju binomnih koeficijenata, odnoso $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, slijedi:

$$(\spadesuit) = \binom{n}{n-(n-4)} 4^4 3^{n-4} x^4 = \binom{n}{n-n+4} 4^4 3^{n-4} x^4 =$$

$$= \underbrace{\binom{n}{4} 4^4 3^{n-4}}_{\text{koeficijent uz } x^4} x^4$$

Dakle sve sto stoji ispred potencije x^4 jest koeficijent.
U tekstu zadatka stoji da koefijenti uz potencije x^3 i x^4 moraju biti jednaki, odnosno:

$$\underbrace{\underbrace{\binom{n}{3}4^3 3^{n-3}}\,x^3 \qquad \underbrace{\binom{n}{4}4^4 3^{n-4}}\,x^4}_{=}$$

Nastavljamo s racunom, slijedi:

$$\binom{n}{3}4^3 3^{n-3} = \binom{n}{4}4^4 3^{n-4}$$

Pomnozit cemo cijelu jednakost s $\frac{1}{4^3 3^{n-4}}$, slijedi:

$$\binom{n}{3}4^3 3^{n-3} = \binom{n}{4}4^4 3^{n-4} \;/\cdot \frac{1}{4^3 3^{n-4}}$$

$$\frac{\binom{n}{3}4^3 3^{n-3}}{1} \cdot \frac{1}{4^3 3^{n-4}} = \frac{\binom{n}{4}4^4 3^{n-4}}{1} \cdot \frac{1}{4^3 3^{n-4}}$$

Pokratimo sto se pokratit dade, slijedi:

$$\frac{\binom{n}{3}\;{}^{1}\cancel{4^3}\;{}^{3}\cancel{3^{n-3}}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{4^3}_1\cancel{3^{n-4}}_1} = \frac{\binom{n}{4}\;{}^{4}\cancel{4^4}\;{}^{1}\cancel{3^{n-4}}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{4^3}_1\cancel{3^{n-4}}_1}$$

$$\frac{\binom{n}{3}\cdot 1\cdot 3}{1} = \frac{\binom{n}{4}\cdot 4\cdot 1}{1}$$

$$3\binom{n}{3} = 4\binom{n}{4}$$

Raspisemo binomne koeficjente na obje strane, slijedi:

$$3\,\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1} = 4\,\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{3}}{1}\cdot\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{\cancel{3}_1\cdot 2\cdot 1} = \frac{{}^{1}\cancel{4}}{1}\cdot\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{\cancel{4}_1\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2\cdot 1} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{2} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{6}$$

Pomnizimo cijelu jednadzbu s $\dfrac{6}{n\,(n-1)\,(n-2)}$, kako bi se rijesili razlomaka te istih elemnata u brojnicima lijeve i desne strane, slijedi:

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{2} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{6} \ / \cdot \frac{6}{n\,(n-1)\,(n-2)}$$

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{2} \cdot \frac{6}{n\,(n-1)\,(n-2)} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{6} \cdot \frac{6}{n\,(n-1)\,(n-2)}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^1\cancel{n}^1\cancel{(n-1)}^1\cancel{(n-2)}}{{}_1\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{6}^3}{\cancel{n}_1\cancel{(n-1)}_1\cancel{(n-2)}_1} = \frac{{}^1\cancel{n}^1\cancel{(n-1)}^1\cancel{(n-2)}\,(n-3)}{{}_1\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{6}^1}{\cancel{n}_1\cancel{(n-1)}_1\cancel{(n-2)}_1}$$

$$\frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3}{1} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (n-3)}{1}$$

$$3 = n - 3$$

$$3 + 3 = n$$

$$6 = n$$

$$n = 6$$

Nakon sto smo odredili koliko iznosi n, dani binom je potpuno odredjen pa mozemo odrediti koliko iznose koeficijenti u raspisu.
Zadatak nas trazi da odredimo koliko iznose oni koeficijenti koji su jednaki, da bismo to odredili uvrstimo $n = 6$ u koeficijent isped potencije x^3, racunamo:

$$\binom{\overbrace{n}^{6}}{3} 4^3 3^{\overset{6}{\downarrow}{n}-3} = \binom{6}{3} 4^3 3^{6-3} = (\spadesuit)$$

Raspisemo binomni koeficijent, slijedi:

$$(\spadesuit) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1}\, 4^3\, 3^3 = (\spadesuit\spadesuit)$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$(\spadesuit\spadesuit) = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4}^2}{{}_1\cancel{3} \cdot {}_1\cancel{2} \cdot 1} \cdot \frac{4^3 \cdot \cancel{3^3}^{3^2}}{1} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4^3 \cdot 3^2}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{60 \cdot 64 \cdot 9}{1} =$$

$$= \frac{34560}{1} = 34560$$

Dobili smo iznos koeficijenata koji su jednaki te je time zadatak rijesen.

Zadatak 22: (str. 31) Odredi onaj clan razvoja binoma

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{a^3}+\sqrt[3]{a^2}\right)^{12}$$

koji sadrzi a^{13}.

Rjesenje: Koristit cemo izraz za opci clan binomne formule $\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$. Pogledajmo cemu je jednak n, a te b u izrazu za opci clan. Vrijedi:

$$\left(\overbrace{\frac{1}{2}\sqrt{a^3}}^{a}+\overbrace{\sqrt[3]{a^2}}^{b}\right)^{\overset{n}{\overset{\uparrow}{12}}}$$

Drugim rijecima slijedi:

$$a=\frac{1}{2}\sqrt{a^3}$$

$$b=\sqrt[3]{a^2}$$

$$n=12$$

Prije samog racuna zapisimo dane korijene u obliku potencija prema jednakosti $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$. Vrijedi:

$$a=\frac{1}{2}\sqrt{a^3}=\frac{1}{2}a^{\frac{3}{2}}$$

$$b=\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}}$$

Pogledajmo kako izgleda opci clan u raspisu binoma danog u zadatku, slijedi:

$$\binom{\overbrace{n}^{12}}{k}\underbrace{a}_{\frac{1}{2}a^{\frac{3}{2}}}{}^{\overset{12}{\overset{\downarrow}{n}}-k}\underbrace{b}_{a^{\frac{2}{3}}}{}^{k}\quad\Rightarrow\quad\binom{12}{k}\left(\frac{1}{2}a^{\frac{3}{2}}\right)^{12-k}\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{k}=(\star)$$

Kako trazim clan koji ce sadrzavati potenciju a^{13} promotranjem dobivenog izraza mogu zakljuciti da samo druga dva clana produkta sadrze potencije baze a koje mogu u konacnici dati potenciju a^{13} pa cu samo njim dalje raspisivati. Ostale clanove necu dirati jer oni ne utjecu na dobivanje potencije a^{13}. Prvu od te dvije potencije raspisat cu prema izrazu za mnozenje potencija istih eksponenata, odnosno $a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$, slijedi:

$$(\star)=\binom{12}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{12-k}\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{12-k}\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{k}=(\star\star)$$

Nadalje raspisemo posljednje dvije potencije prema izrazu za potenciranje potenacija, osnosno $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$, slijedi:

$$(\star) = \binom{12}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{12-k} a^{\frac{3}{2} \cdot (12-k)} a^{\frac{2}{3} \cdot k} =$$

$$= \binom{12}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{12-k} a^{\frac{3}{2} \cdot 12 - \frac{3}{2}k} a^{\frac{2}{3}k} = (\spadesuit)$$

Pokratim sto se pokratiti dade u eksponetima, slijedi:

$$(\spadesuit) = \binom{12}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{12-k} a^{\frac{3}{\cancel{2}_1} \cdot \frac{\cancel{12}^6}{1} - \frac{3}{2}k} a^{\frac{2}{3}k} = \binom{12}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{12-k} a^{3 \cdot 6 - \frac{3}{2}k} a^{\frac{2}{3}k} =$$

$$= \binom{12}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{12-k} a^{18 - \frac{3}{2}k} a^{\frac{2}{3}k} = (\spadesuit\spadesuit)$$

Pomnozimo potencije istih baza prema izrazu za mnozenje potencija istih baza, odnosno $a^n \cdot a^m = a^{n \cdot m}$, slijedi:

$$(\spadesuit\spadesuit) = \binom{12}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{12-k} a^{18 - \frac{3}{2}k + \frac{2}{3}k}$$

Da bi dobiveni izraz sadrzavao potenciiju a^{13}, potencija $a^{18 - \frac{3}{2}k + \frac{2}{3}k}$ mora biti jednaka a^{13}, jer preostala dva clana produkta kad se raspisu dat ce dva racionalna broja. Drugim rijecima mora vrijediti:

$$a^{18 - \frac{3}{2}k + \frac{2}{3}k} = a^{13}$$

Nadalje dvije potencije su iste onda i samo onda kad su im baze i eksponeti jednaki dakle mora vrijediti:

$$18 - \frac{3}{2}k + \frac{2}{3}k = 13$$

Time smo dobili linearnu jednadzbu po nepoznanici k. Pomnnozim cijelu jednadzbu sa 6 kako bi se rijesio razlomaka, slijedi:

$$18 - \frac{3}{2}k + \frac{2}{3}k = 13 \ / \cdot 6$$

$$18 \cdot 6 - \frac{3}{2}k \cdot 6 + \frac{2}{3}k \cdot 6 = 13 \cdot 6$$

$$108 - 6 \cdot \frac{3}{2}k + 6 \cdot \frac{2}{3}k = 78$$

Pokratim sto se pokratiti dade, slijedi:

$$108 - \frac{{}^{3}\cancel{6}}{1} \cdot \frac{3}{\cancel{2}_1}k + \frac{{}^{2}\cancel{6}}{1} \cdot \frac{2}{\cancel{3}_1}k = 78$$

$$108 - \frac{9}{1}k + \frac{4}{1}k = 78$$
$$108 - 9k + 4k = 78$$

Prebacim poznanice na desnu stranu, slijedi:

$$-9k + 4k = 78 - 108$$
$$-5k = -30$$

Pomnozim cijelu jednadzbu s $\dfrac{1}{-5}$, slijedi:

$$-5k = -30 \ / \cdot \frac{1}{-5}$$
$$-5k \cdot \frac{1}{-5} = -30 \cdot \frac{1}{-5}$$

Pokratim sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{-5}}{1}k \cdot \frac{1}{\cancel{-5}_1} = \frac{{}^{6}\cancel{-30}_1}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{-5}_1}$$
$$\frac{1}{1}k = \frac{6}{1}$$
$$k = 6$$

Dakle kada bi u opci clan uvrstili $k = 6$ dobili bi onaj clan koji sadrzi potenciju a^{13}. Sada je jos potrebno odrediti kako taj clan izgleda. Vratimo se u izraz

$$\binom{12}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{12-k} a^{18-\frac{3}{2}k+\frac{2}{3}k}$$

Umjesto k uvrstimo izracunati broj 6. Kako bi si skratili racunanje primjetimo da posljednji clan produkta danog izraza mora biti jednak a^{13} (to je bio uvjet zadatka, trazili smo takav k da to vrijedi), pa cemo k zamijeniti sa 6 samo u prva dva clana produkta:

$$\binom{12}{\underbrace{k}_{6}}\left(\frac{1}{2}\right)^{12-\overset{\overset{6}{\downarrow}}{k}} \underbrace{a^{18-\frac{3}{2}k+\frac{2}{3}k}}_{a^{13}} = \binom{12}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{12-6} a^{13} =$$

$$= \binom{12}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{6} a^{13} = (\clubsuit)$$

Binomni koeficjent raspisem po znanom pravilu racunanja binomnih koeficijenata, dok potenciju raspisem po pravilu za dijeljenje potencija istih eksponenata, odnosno prema $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$, slijedi:

$$(\clubsuit) = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1^6}{2^6}\, a^{13} = (\clubsuit\clubsuit)$$

Pokratim sto se pokratiti dade, slijedi:

$$(\clubsuit\clubsuit) = \frac{{}^{1}\cancel{{}^{2}}\cancel{12} \cdot 11 \cdot {}^{1}\cancel{{}^{2}}\cancel{10} \cdot {}^{3}\cancel{9} \cdot {}^{1}\cancel{8} \cdot 7}{\cancel{6}_1 \cdot \cancel{5}_1 \cdot \cancel{4}_2 \cdot \cancel{3}_1 \cdot \cancel{2}_1 \cdot 1} \cdot \frac{1}{\cancel{64}_8}\ a^{13} = \frac{1 \cdot 11 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 7}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} \cdot \frac{1}{8}\ a^{13} =$$

$$= \frac{11 \cdot 3 \cdot 7}{1 \cdot 8}\ a^{13} = \frac{231}{8}\ a^{13}$$

Dakle sedmi clan raspisa binoma (jer smo rekli da ce redni broj clana uvijek biti za jedan veci od k) sadrzi potenciju a^{13} i oblika je $\frac{231}{8}\ a^{13}$. Time je zadatak rijesen.

∽ ✧ ∼

✠ Zadatak 30: (str. 31) Odredi onaj clan razvoja binoma

$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{11}$$

koji sadrzi a^{13}.

Rjesenje: Koristit cemo izraz za opci clan binomne formule $\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$. Pogledajmo cemu je jednak n, a te b u izrazu za opci clan. Vrijedi:

$$\left(\overbrace{\sqrt{x}}^{a} \overbrace{-\frac{1}{\sqrt{x}}}^{b}\right)^{\overset{n}{\uparrow}\atop 11}$$

Drugim rijecima slijedi:

$$a = \sqrt{x}$$
$$b = -\frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$n = 11$$

Prije samog racuna zapisimo dane korijene u obliku potencija prema jednakosti $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. Vrijedi:

$$a = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$
$$b = -\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

Sredimo drugi izraz prema pravilu ya potencije $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$, slijedi:

$$a = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$b = -\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$$

Pogledajmo kako izgleda opci clan u raspisu binoma danog u zadatku, slijedi:

$$\binom{\overbrace{n}^{11}}{k} \underbrace{a}_{x^{\frac{1}{2}}}{}^{\overset{11}{\downarrow}{n}-k} \underbrace{b}_{x^{-\frac{1}{2}}}{}^{k} \quad \Rightarrow \quad \binom{11}{k} \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{11-k} \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^{k} = (\star)$$

Raspisujem potencije prema izrazu za potenciranje potenacija, osnosno $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$, slijedi:

$$(\star) = \binom{11}{k} x^{\frac{1}{2}(11-k)} \; x^{-\frac{1}{2}k} = (\star\star)$$

Rijesim se zagrade u eksponentu prve potencije, slijedi:

$$(\star\star) = \binom{11}{k} x^{\frac{1}{2}\cdot 11 - \frac{1}{2}\cdot k} \; x^{-\frac{1}{2}k} = \binom{11}{k} x^{\frac{11}{2} - \frac{1}{2}k} \; x^{-\frac{1}{2}k} = (\spadesuit)$$

Pomnozimo potencije istih baza prema izrazu za mnozenje potencija istih baza, odnosno $a^n \cdot a^m = a^{n \cdot m}$, slijedi:

$$(\spadesuit) = \binom{11}{k} x^{\frac{11}{2} - \frac{1}{2}k + \left(-\frac{1}{2}k\right)} = \binom{11}{k} x^{\frac{11}{2} - \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}k}$$

Da bi dobiveni izraz sadrzavao potenciiju x^3, potencija $x^{\frac{11}{2} - \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}k}$ mora biti jednaka x^3, jer preostali clan produkta kad se raspise dat ce racionalan broj. Drugim rijecima mora vrijediti:

$$x^{\frac{11}{2} - \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}k} = x^3$$

Nadalje dvije potencije su iste onda i samo onda kad su im baze i eksponeti jednaki dakle mora vrijediti:

$$\frac{11}{2} - \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}k = 3$$

Time smo dobili linearnu jednadzbu po nepoznanici k. Pomnnozim cijelu jednadzbu sa 2 kako bi se rijesio razlomaka, slijedi:

$$\frac{11}{2} - \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}k = 3 \; / \cdot 2$$

$$\frac{11}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2}k \cdot 2 - \frac{1}{2}k \cdot 2 = 3 \cdot 2$$

$$\frac{11}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2}k \cdot 2 - \frac{1}{2}k \cdot 2 = 6$$

Pokratim sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{11}{{}_1\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}^1}{1} - \frac{1}{{}_1\cancel{2}} k \cdot \frac{\cancel{2}^1}{1} - \frac{1}{{}_1\cancel{2}} k \cdot \frac{\cancel{2}^1}{1} = 6$$

$$\frac{11}{1} - \frac{k}{1} - \frac{k}{1} = 6$$

$$11 - k - k = 6$$

$$11 - 2k = 6$$

Prebacim poznanice na desnu stranu, slijedi:

$$-2k = 6 - 11$$

$$-2k = -5$$

Pomnozim cijelu jednadzbu s $\frac{1}{-2}$, slijedi:

$$-2k = -5 \;/ \cdot \frac{1}{-2}$$

$$-2k \cdot \frac{1}{-2} = -5 \cdot \frac{1}{-2}$$

Pokratim sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^1\cancel{-2}}{1} k \cdot \frac{1}{\cancel{-2}_1} = \frac{\cancel{-}5}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{-}2}$$

$$\frac{1}{1} k = \frac{5}{2}$$

$$k = \frac{5}{2}$$

Kako broj k mora biti nenegativan cijeli broj, clan u raspisu binoma koji sadrzi potenciju x^3 ne postoji. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 32: (str. 31) Zbroj koeficijenata prvog, drugog i treceg clana razvoja binoma $\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$ iznosi 37. Odredi treci clan ovog razvoja.

Rjesenje: Moj je zadatak prije svega pokusati odgonetnuti cemu je jednak n. Da bismo to ucinili posluzit cemo se izrazom za opci clan binomne formule

$\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$. Pogledajmo cemu je jednak a odnosno b u izrazu za opci clan. Vrijedi:

$$\left(\overbrace{x}^{a}+\overbrace{\frac{1}{x}}^{b}\right)^n$$

Drugim rijecima slijedi:

$$a = x$$
$$b = \frac{1}{x}$$

Pogledajmo kako izgleda opci clan u raspisu binoma danog u zadatku, slijedi:

$$\binom{n}{k}\underbrace{a}_{x}{}^{n-k}\underbrace{b}_{\frac{1}{x}}{}^{k} \quad\Rightarrow\quad \binom{n}{k}x^{n-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k = (\star)$$

Nadalje sredimo dobiveni izraz prema jednakosti $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$, slijedi:

$$(\star) = \binom{n}{k}x^{n-k}\left(x^{-1}\right)^k = (\star\star)$$

Raspisemo dobiveni izraz prema pravilu za potenciranje potencija, odnosno $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$, slijedi:

$$(\star\star) = \binom{n}{k}x^{n-k}x^{-1\cdot k} = \binom{n}{k}x^{n-k}x^{-k} = (\spadesuit)$$

Pomnozim posljednje dvije potencije u izrazu prema pravilu za mnozenje potencija istih baza, odnosno $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$, slijedi:

$$(\spadesuit) = \binom{n}{k}x^{n-k+(-k)} = \binom{n}{k}x^{n-k-k} = \binom{n}{k}x^{n-2k}$$

Promotrim li dobiveni izraz mogu uociti da se on sastoji od binomnog koeficijenta, koji je u sustini broj kad se raspise, i potencije. Dakle koeficijent svakog clana u raspisu u zadatku danog binoma jest odredjen samo binomnim koeficijentom oblika $\binom{n}{k}$, pri cemu je k redni broj clana umanjen za 1.
To nadalje znaci da mora vrijediti:

$$\text{koeficijent prvog clana (za } k=0) \;\Rightarrow\; \binom{n}{0}$$

$$\text{koeficijent drugog clana (za } k=1) \;\Rightarrow\; \binom{n}{1}$$

$$\text{koeficijent treceg clana (za } k=2) \Rightarrow \binom{n}{2}$$

Njihov zbroj prema tekstu zadatka mora biti jednak 37, dakle mora vrijediti sljedeca jednakost:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 37$$

Prije svega prisjetimo se da kad su u pitanju binomni koeficijenti moramo u obzir uzeti cinjenicu da kod binomnog koeficijenta $\binom{n}{k}$ mora vrijediti $n \geq k$. To znaci da postoje tri uvjeta:

$$n \geq 0 \quad n \geq 1 \quad n \geq 2$$

Sto u konacnici znaci da mora vrijediti $n \geq 2$, odnosno sva rjesenja strogo manja od 2 moram odbaciti.
Raspisemo binomne koeficijente na lijevoj strani jednakosti imajuci na umu da po definiciji vrijedi $\binom{n}{0} = 1$, slijedi:

$$1 + \frac{n}{1} + \frac{n\,(n-1)}{2 \cdot 1} = 37$$

Prebacimo 1 na desnu stranu, slijedi:

$$n + \frac{n\,(n-1)}{2} = 37 - 1$$

$$n + \frac{n\,(n-1)}{2} = 36$$

Pomnizim cijelu jednadzbu s 2, slijedi:

$$n + \frac{n\,(n-1)}{2} = 36 \ / \cdot 2$$

$$n \cdot 2 + \frac{n\,(n-1)}{2} \cdot 2 = 36 \cdot 2$$

$$2n + \frac{2n\,(n-1)}{2} = 72$$

Pokratim sto se pokratiti dade, slijedi:

$$2n + \frac{{}^{1}\cancel{2}n\,(n-1)}{\cancel{2}_{1}} = 72$$

$$2n + \frac{n\,(n-1)}{1} = 72$$

$$2n + n\,(n-1) = 72$$

Sredim malo dobiveni izraz, kako bih dobio kvadratnu jednadzbu, slijedi:

$$2n + n^2 - n = 72$$

$$n^2 + n - 72 = 0$$

Dobivenu kvadratnu jednadzbu rijesavam preko izraza za rjesenja kvadratne jednadzbe:

$$n_1, n_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Racunam rijesenja dobivene jednadzbe, slijedi:

$$n_1, n_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-72)}}{2 \cdot 1}$$

$$n_1, n_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 288}}{2}$$

$$n_1, n_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{289}}{2}$$

$$n_1, n_2 = \frac{-1 \pm 17}{2}$$

Jedno rjesenje dane jednazbe jest:

$$n_1 = \frac{-1 - 17}{2} = \frac{-18}{2}$$

Pokratim sto se pokratiti dade, slijedi:

$$n_1 = \frac{^{-9}\cancel{-18}}{\cancel{2}_1} = \frac{-9}{1} = -9$$

Dakle jedno rjesenje dane jednadzbe jest $n_1 = -9$, no to nije prohvatljivo rjesnje jer ne zadovoljava uvjet postavljen na pocetku. Drugo rjesenje dane jednazbe jest:

$$n_2 = \frac{-1 + 17}{2} = \frac{16}{2}$$

Pokratim sto se pokratiti dade, slijedi:

$$n_2 = \frac{^{8}\cancel{16}}{\cancel{2}_1} = \frac{8}{1} = 8$$

Dakle drugo rjesenje dane jednadzbe jest $n_2 = 8$ i ono zadovoljava uvijet postavljen na pocetku. Preostaje jos samo odrediti treci clan razvoja sto zapravo znaci da u opci clan moram umjesto n uvrstiti 8, a umjesto k moram uvrstiti 2, jer smo rekli da je redni broj clana u raspisu binoma uvijek za 1 veci od k, slijedi:

$$\binom{\overbrace{n}^{8}}{\underbrace{k}_{2}} x^{\overset{8}{\overset{\downarrow}{n}} - 2\overset{2}{\overset{\downarrow}{k}}} = \binom{8}{2} x^{8-2\cdot 2} = \binom{8}{2} x^{8-4} = \binom{8}{2} x^4 = (\diamondsuit)$$

Raspisem binomni koeficijent, slijedi:

$$(\diamondsuit) = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1}\, x^4 = (\diamondsuit\diamondsuit)$$

Pokratim sto se pokratiti dade, slijedi:

$$(\diamondsuit\diamondsuit) = \frac{{}^{4}\cancel{8} \cdot 7}{\cancel{2}_1 \cdot 1}\, x^4 = \frac{4 \cdot 7}{1 \cdot 1}\, x^4 = \frac{28}{1}\, x^4 = 28x^4$$

☙ ✧ ❧

Zadatak 34: (str. 31) Odredi x ako je poznato da je treci clan u razvoju binoma $\left(x + x^{\log x}\right)^5$ jednak 1000000.

Rjesenje: Posluzit cemo se izrazom za opci clan binomne formule $\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$. Pogledajmo cemu je jednak a odnosno b u izrazu za opci clan. Vrijedi:

$$\left(\overbrace{x}^{a} + \overbrace{x^{\log x}}^{b}\right)^{\overset{n}{\overset{\uparrow}{5}}}$$

Drugim rijecima slijedi:

$$a = x$$
$$b = x^{\log x}$$
$$n = 5$$

Pogledajmo kako izgleda opci clan u raspisu binoma danog u zadatku, slijedi:

$$\binom{\overbrace{n}^{5}}{k} \underbrace{a}_{x}^{\overset{5}{\downarrow}\, n-k} \underbrace{b}_{x^{\log x}}^{k} \quad \Rightarrow \quad \binom{5}{k} x^{5-k} \left(x^{\log x}\right)^k = (\star)$$

Raspisemo dobiveni izraz prema pravilu za potenciranje potencija, odnosno $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$, slijedi:

$$(\star\star) = \binom{5}{k} x^{5-k} x^{\log x \cdot k} = \binom{5}{k} x^{5-k} x^{k \cdot \log x} = (\spadesuit)$$

Pomnozim posljeddnje dvije potencije u izrazu prema pravilu za mnozenje potencija istih baza, odnosno $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$, slijedi:

$$(\spadesuit) = \binom{5}{k} x^{5-k+k\log x} = (\spadesuit\spadesuit)$$

Izlucim k iz druga dva clana sume u eksponentu potencije, slijedi:

$$(\spadesuit\spadesuit) = \binom{5}{k} x^{5-k(1-\log x)}$$

Nadalje kako u zadatku stoji da je teci clan u ravoju binoma jednak 1000000, odnosno 10^6, trazimo izgled treceg clana raspisa. Dobit cemo ga tako da u opci clan umjesto k uvrstimo 2, jer je k u opcem clanu uvijek za 1 manji od rednog broja clana, slijedi:

$$\underbrace{\binom{5}{k}}_{2} x^{5-\overset{2}{\overset{\downarrow}{k}}(1-\log x)} = \binom{5}{2} x^{5-2(1-\log x)}$$

Dobiveni izraz izjednacimo s 10^6, slijedi:

$$\binom{5}{2} x^{5-2(1-\log x)} = 10^6$$

Raspisemo binomni koeficijent na lijevoj strani jendakosti, slijedi:

$$\frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1}\, x^{5-2(1-\log x)} = 10^6$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{5 \cdot \cancel{4}^{2}}{{}_{1}\cancel{2} \cdot 1}\, x^{5-2(1-\log x)} = 10^6$$

$$\frac{5 \cdot 2}{1}\, x^{5-2(1-\log x)} = 10^6$$

$$10\, x^{5-2(1-\log x)} = 10^6$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{10}$, slijedi:

$$10\, x^{5-2(1-\log x)} = 10^6 \ / \cdot \frac{1}{10}$$

$$10\, x^{5-2(1-\log x)} \cdot \frac{1}{10} = 10^6 \cdot \frac{1}{10}$$

Pokratim sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{10}\, x^{5-2(1-\log x)}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{10}_{1}} = \frac{10^5\, \cancel{10^6}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{10}_{1}}$$

$$\frac{x^{5-2(1-\log x)}}{1} = \frac{10^5}{1}$$

$$x^{5-2(1-\log x)} = 10^5$$

Time smo dobili specificni oblik logaritamske jednadzbe. Nastavljamo tako da logaritmiramo cijelu jednakost, slijedi:

$$x^{5-2(1-\log x)} = 10^5 \ / \log$$

$$\log x^{5-2(1-\log x)} = \log 10^5$$

Lijevu stranu jednakosti raspisem prema svojstvu logaritama $\log_a x^r = r \log_a x$, dok desnu raspisujem prema svojstvu logaritama $\log_a a^x = x$, slijedi:

$$[5 - 2\,(1 - \log x)] \cdot \log x = 5$$

U ovom trenutku uvodimo supstituciju $t = logx$, slijedi:

$$[5 - 2(1 - \overbrace{\log x}^{t})] \cdot \overbrace{\log x}^{t} = 5$$

$$[5 - 2\,(1 - t)] \cdot t = 5$$

Sredim dobiveni izraz, slijedi:

$$[5 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-t)] \cdot t = 5$$

$$(5 - 2 + 2t) \cdot t = 5$$

$$(3 + 2t) \cdot t = 5$$

$$3 \cdot t + 2t \cdot t = 5$$

$$3t + 2t^2 = 5$$

Prebacim sve na lijevu stranu jednakosti te time dobijem kvadratnu jednadzbu, slijedi:

$$2t^2 + 3t - 5 = 0$$

Dobivenu kvadratnu jednadzbu rijesavam preko izraza za rjesenja kvadratne jednadzbe:

$$t_1, t_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Racunam rijesenja dobivene jednadzbe, slijedi:

$$t_1, t_2 = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2}$$

$$t_1, t_2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{4}$$

$$t_1, t_2 = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{4}$$

$$t_1, t_2 = \frac{-3 \pm 7}{4}$$

Jedno rjesenje dane jednazbe jest:

$$t_1 = \frac{-3-7}{4} = \frac{-10}{4}$$

Pokratim sto se pokratiti dade, slijedi:

$$t_1 = \frac{\cancel{-10}^{-5}}{\cancel{4}_2} = \frac{-5}{2} = -\frac{5}{2}$$

Dakle jedno rjesenje dane jednadzbe jest $t_1 = -\frac{5}{2}$.

Racunam dalje drugo rjesenje jednazbe, slijedi:

$$t_2 = \frac{-3+7}{2} = \frac{4}{4}$$

Pokratim sto se pokratiti dade, slijedi:

$$t_2 = \frac{{}^1\cancel{4}}{\cancel{4}_1} = \frac{1}{1} = 1$$

Dakle drugo rjesenje dane jednadzbe jest $t_2 = 1$. Kako smo uveli supstituciju $t = \log x$ preostaje jos rijesiti dvije logaritamske jednadzbe:

$$\log x = t_1 \quad \text{i} \quad \log x = t_2$$

$$\log x = -\frac{5}{2} \quad \text{i} \quad \log x = 1$$

Imajuci na umu svojstvo logaritama $\log_a a^x = x$, desne strane obiju jednadzbi mogu prikazati na sljedeci nacin:

$$\log x = \log 10^{-\frac{5}{2}} \quad \text{i} \quad \log x = \log 10^1$$

No sada prema svojstvu injektivnosti logaritama $\log_a x_1 = \log_a x_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$ slijedi:

$$x = 10^{-\frac{5}{2}} \quad \text{i} \quad x = 10^1$$

$$x = 10^{-\frac{5}{2}} \quad \text{i} \quad x = 10$$

Dakle dvije su moguce vrijednosti za x, a to su $x_1 = 10^{-\frac{5}{2}}$ i $x_2 = 10$. Time je zadatak rijesen.