Problemi drugog stupnja

Zadatak 5: (str. 43) Zbroj znamenki dvoznamenkastog broja je 11, a umnozak 24. Koji je to broj?

Rjesenje: Oznacimo s nepoznanicom x znamenku desetica, a s nepoznanicom y znamenku jedinica trazenog dvoznamenkastog broja, to znaci da vrijedi sljedeci izraz:

$$\overline{\underset{\text{znamenka desetica}}{x}\,\underset{\text{znamenka jedinica}}{y}} = 10x + y$$

Prema podacima zadatka mozemo zapisati sljedeci sustav jednadzbi:

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ x \cdot y = 24 \end{cases}$$

Izrazimo nepoznanicu x pomocu nepoznanice y pomocu prve jednadzbe, slijedi:

$$x + y = 11 \quad \Rightarrow \quad x = 11 - y$$

Primjenimo tu cinjenicu na drugu jednadzbu slijedi:

$$\overset{11-y}{\overset{\downarrow}{x}} \cdot y = 24 \quad \Rightarrow \quad (11 - y) \cdot y = 24$$

Rijesimo se zagrade na lijevoj strani jednakosti, slijedi:

$$11 \cdot y - y \cdot y = 24$$

$$11y - y^2 = 24$$

Prebacimo sve clanove sume s lijeve strane jednakosti na desnu, slijedi:

$$11y - y^2 = 24 \quad \Rightarrow \quad y^2 - 11y + 24 = 0$$

Dakle dobili smo kvadratnu jednadzbu $y^2 - 11y + 24 = 0$. Ispisimo njene koeficijente, vrijedi:

$$\overset{a}{1} \cdot y^2 \overset{b}{-11}y + \overset{c}{24} = 0$$

$$a = 1$$

$$b = -11$$

$$c = 24$$

Rjesenja kvadratne jednadzbe trazimo pomoocu izraza:

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Racunam:

$$y_{1,2} = \frac{-\left(-11\right) \pm \sqrt{\left(-11\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24}}{2 \cdot 1}$$

$$y_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{2}$$

$$y_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$y_{1,2} = \frac{11 \pm 5}{2}$$

Odredimo prvo rjesenje, racunamo:

$$y_1 = \frac{11 - 5}{2} = \frac{6}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$y_1 = \frac{{}^{3}\cancel{6}}{\cancel{2}_1} = \frac{3}{1} = 3$$

Dakle prvo rjesenje jednko je $y_1 = 3$. Odredimo jos i drugo rjesenje, slijedi:

$$y_2 = \frac{11 + 5}{2} = \frac{16}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$y_2 = \frac{{}^{8}\cancel{16}}{\cancel{2}_1} = \frac{8}{1} = 8$$

Drugo rjesenje jednako je $y_2 = 8$. Odredimo jos pripadne x-eve, slijedi:

$$x_1 = 11 - \overset{\overset{3}{\downarrow}}{y_1} \quad \text{i} \quad x_2 = 11 - \overset{\overset{8}{\downarrow}}{y_2}$$

$$x_1 = 11 - 3 \quad \text{i} \quad x_2 = 11 - 8$$

$$x_1 = 8 \quad \text{i} \quad x_2 = 3$$

Dakle dva rjesenja su sljedeca:

$$\overline{x_1 y_1} \Rightarrow 83 \quad \text{i} \quad \overline{x_2 y_2} \Rightarrow 38$$

Dva trazena dvoznamenkasta broja su 83 i 38. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 6: (str. 43) Zbroj dvoznamenkastog broja i broja napisanog istim znamenkama, ali u obrnutom poretku, inzosi 66. Zbroj kvadrata znamenki je 26. O kojem je broju rijec?

Rjesenje: Oznacimo s nepoznanicom x znamenku desetica, a s nepoznanicom y znamenku jedinica trazenog dvoznamenkastog broja, to znaci da vrijede sljedeca dva izraza:

$$\overline{\underset{\text{znamenka desetica}}{x}\,\underset{\text{znamenka jedinica}}{y}} = 10x + y \qquad\qquad \overline{\underset{\text{znamenka desetica}}{y}\,\underset{\text{znamenka jedinica}}{x}} = 10y + x$$

Prema podacima zadatka mozemo zapisati sljedeci sustav jednadzbi:

$$\begin{cases} \overset{10x+y}{\overline{xy}} + \overset{10y+x}{\overline{yx}} = 66 \\ x^2 + y^2 = 26 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x + y + 10y + x = 66 \\ x^2 + y^2 = 26 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11x + 11y = 66 \\ x^2 + y^2 = 26 \end{cases}$$

Usredotocimo se na prvu jednadzbu, pomnozimo je s $\dfrac{1}{11}$, slijedi:

$$11x + 11y = 66 \;/ \cdot \frac{1}{11}$$

$$11x \cdot \frac{1}{11} + 11y \cdot \frac{1}{11} = 66 \cdot \frac{1}{11}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{11}x}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{11}_1} + \frac{{}^{1}\cancel{11}y}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{11}_1} = \frac{{}^{6}\cancel{66}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{11}_1}$$

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{1} = \frac{6}{1}$$

$$x + y = 6$$

Izrazimo nepoznanicu x pomocu nepoznanice y pomocu prve jednadzbe, slijedi:

$$x + y = 6 \quad \Rightarrow \quad x = 6 - y$$

Primjenimo tu cinjenicu na drugu jednadzbu slijedi:

$$\overset{\overset{6-y}{\downarrow}}{x}^2 + y^2 = 26 \quad \Rightarrow \quad (6-y)^2 + y^2 = 26$$

Rijesimo se zagrade na lijevoj strani jednakosti prema izrazu za kvadriranje binoma, odnosno prema $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, slijedi:

$$6^2 - 2 \cdot 6 \cdot y + y^2 + y^2 = 26$$

$$36 - 12y + y^2 + y^2 = 26$$

Zbrojimo sto se zbrojiti dade na lijevoj strani jednakosti, slijedi:

$$36 - 12y + 2y^2 = 26$$

Prebacimo izraz s desne strane jednakosti na lijevu, slijedi:

$$36 - 12y + 2y^2 = \overset{\hookleftarrow}{26} \quad \Rightarrow \quad 36 - 12y + 2y^2 - 26 = 0$$

Zbrojimo sto se moze zbrojiti i poredamo potencije prema stupnju, slijedi:

$$2y^2 - 12y + 10 = 0$$

Izlucimo broj 2 iz svih clanova sume na lijevoj strani jednakosti, slijedi:

$$2 \cdot \left(y^2 - 6y + 5\right) = 0$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{2}$, slijedi:

$$2 \cdot \left(y^2 - 6y + 5\right) = 0 \; / \cdot \frac{1}{2}$$

$$2 \cdot \left(y^2 - 6y + 5\right) \cdot \frac{1}{2} = 0 \cdot \frac{1}{2}$$

$$2 \cdot \left(y^2 - 6y + 5\right) \cdot \frac{1}{2} = 0$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{1}\cancel{2} \cdot \left(y^2 - 6y + 5\right)}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1} = 0$$

$$\frac{\left(y^2 - 6y + 5\right)}{1} = 0$$

$$y^2 - 6y + 5 = 0$$

Dakle dobili smo kvadratnu jednadzbu $y^2 - 6y + 5 = 0$. Ispisimo njene koeficijente, vrijedi:

$$\overset{a}{1} \cdot y^2 \overset{b}{\overbrace{-6}}y + \overset{c}{5} = 0 = 0$$

$$a = 1$$

$$b = -6$$

$$c = 5$$

Rjesenja kvadratne jednadzbe trazimo pomoocu izraza:

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Racunam:

$$y_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$$

$$y_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2}$$

$$y_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$y_{1,2} = \frac{6 \pm 4}{2}$$

Odredimo prvo rjesenje, racunamo:

$$y_1 = \frac{6 - 4}{2} = \frac{2}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$y_1 = \frac{{}^{1}\cancel{2}}{\cancel{2}_{1}} = \frac{1}{1} = 1$$

Dakle prvo rjesenje jednko je $y_1 = 1$. Odredimo jos i drugo rjesenje, slijedi:

$$y_2 = \frac{6 + 4}{2} = \frac{10}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$y_2 = \frac{{}^{5}\cancel{10}}{\cancel{2}_{1}} = \frac{5}{1} = 5$$

Drugo rjesenje jednako je $y_2 = 5$. Odredimo jos pripadne x-eve, slijedi:

$$x_1 = 6 - \overset{\overset{1}{\downarrow}}{y_1} \quad \text{i} \quad x_2 = 6 - \overset{\overset{5}{\downarrow}}{y_2}$$

$$x_1 = 6 - 1 \quad \text{i} \quad x_2 = 6 - 5$$

$$x_1 = 5 \quad \text{i} \quad x_2 = 1$$

Dakle dva rjesenja su sljedeca:

$$\underset{5 \nearrow \quad \nwarrow 1}{\overline{x_1y_1}} \quad \Rightarrow \quad 51 \quad \text{i} \quad \underset{1 \nearrow \quad \nwarrow 5}{\overline{x_2y_2}} \quad \Rightarrow \quad 15$$

Dva trazena dvoznamenkasta broja su 51 i 15. Time je zadatak rijesen.

<u>Zadatak 8</u>: (str. 43) Cijena od 1000 kn umanji se za $p\%$ i dobije se nova cijena, C_1. Nakon nekog se vremena i cijena C_1 umanji za $p\%$ te se dobije nova cijena, 810 kn. Odredi postotak p.

<u>Rjesenje</u>: Prisjetimo se da izraz $p\%$ mozemo zapisati na sljedeci nacin:

$$p\% = \frac{p}{100}$$

Nadalje $p\%$ od iznosa 1000 racunamo na sljedeci nacin:

$$\overset{\frac{p}{100}}{\overset{\downarrow}{p\%}} \cdot 1000 = \frac{p}{100} \cdot 1000 = (\star)$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$(\star) = \frac{p}{{}_1\cancel{100}} \cdot \frac{\cancel{1000}^{10}}{1} = \frac{p}{1} \cdot \frac{10}{1} = \frac{10p}{1} = 10p$$

Kako cijenu C_1 dobijemo smanjenjem cijene od 1000 kn za $p\%$, mora vrijediti sljedece:

$$C_1 = 1000 - \overbrace{p\% \cdot 1000}^{10p} = 1000 - 10p$$

Nadalje kako je konacna cijena dobivena tako da je cijena C_1 opet smanjena za $p\%$, mora vrijediti sljedece:

$$C_{\text{konacna}} = \overset{1000-10p}{\overset{\searrow}{C_1}} - \underset{\frac{p}{100}}{\underset{\uparrow}{p\%}} \cdot \overset{1000-10p}{\overset{\swarrow}{C_1}}$$

$$C_{\text{konacna}} = 1000 - 10p - \frac{p}{100} \cdot (1000 - 10p)$$

Primjenimo cinjenicu da je konacna cijena jednaka 810 kn, slijedi:

$$\overset{\overset{810}{\downarrow}}{C}_{\text{konacna}} = 1000 - 10p - \frac{p}{100} \cdot (1000 - 10p)$$

$$810 = 1000 - 10p - \frac{p}{100} \cdot (1000 - 10p)$$

Pomnozimo cijeli izraz sa 100, slijedi:

$$810 = 1000 - 10p - \frac{p}{100} \cdot (1000 - 10p) \ / \cdot 100$$

$$810 \cdot 100 = 1000 \cdot 100 - 10p \cdot 100 - \frac{p}{100} \cdot (1000 - 10p) \cdot 100$$

$$81000 = 100000 - 1000p - \frac{p}{100} \cdot (1000 - 10p) \cdot 100$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$81000 = 100000 - 1000p - \frac{p}{{}_1\cancel{100}} \cdot (1000 - 10p) \cdot \frac{\cancel{100}^1}{1}$$

$$81000 = 100000 - 1000p - \frac{p}{1} \cdot (1000 - 10p) \cdot \frac{1}{1}$$

$$81000 = 100000 - 1000p - p \cdot (1000 - 10p)$$

Rijesimo se zagrade na desnoj strani jednakosti, slijedi:

$$81000 = 100000 - 1000p - 1000p + 10p^2$$

Zbrojimo sto se zbrojiti dade, slijedi:

$$81000 = 100000 - 2000p + 10p^2$$

Prebacimo sve izraze s lijeve na desnu stranu jednakosti, slijedi:

$$\overset{\mapsto}{81000} = 100000 - 2000p + 10p^2$$

$$0 = -81000 + 100000 - 2000p + 10p^2$$

Zbrojimo sto se zbrojiti dade, slijedi:

$$0 = 19000 - 2000p + 10p^2$$

Pomnozimo cijeli izraz s $\frac{1}{10}$, slijedi:

$$0 = 19000 - 2000p + 10p^2 \ / \cdot \frac{1}{10}$$

$$0 \cdot \frac{1}{10} = 19000 \cdot \frac{1}{10} - 2000p \cdot \frac{1}{10} + 10p^2 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}$$

$$0 = 19000 \cdot \frac{1}{10} - 2000p \cdot \frac{1}{10} + 10p^2 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$0 = \frac{^{1900}\cancel{19000}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{10}_1} - \frac{^{200}\cancel{2000}p}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{10}_1} + \frac{^{1}\cancel{10}p^2}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{10}_1}$$

$$0 = \frac{1900}{1} - \frac{200p}{1} + \frac{p^2}{1}$$

$$0 = 1900 - 200p + p^2$$

Poredamo potencije prema stupnju, slijedi:

$$p^2 - 200p + 1900 = 0$$

Dakle dobili smo kvadratnu jednadzbu $p^2 - 200p + 1900 = 0$. Ispisimo njene koeficijente, vrijedi:

$$\overset{a}{1} \cdot p^2 \overset{b}{\overbrace{-200}}p + \overset{c}{1900} = 0$$

$$a = 1$$

$$b = -200$$

$$c = 1900$$

Rjesenja kvadratne jednadzbe trazimo pomoocu izraza:

$$p_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Racunam:

$$p_{1,2} = \frac{-(-200) \pm \sqrt{(-200)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1900}}{2 \cdot 1}$$

$$p_{1,2} = \frac{200 \pm \sqrt{40000 - 7600}}{2}$$

$$p_{1,2} = \frac{200 \pm \sqrt{32400}}{2}$$

$$p_{1,2} = \frac{200 \pm 180}{2}$$

Odredimo prvo rjesenje, racunamo:

$$p_1 = \frac{200 - 180}{2} = \frac{20}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$p_1 = \frac{^{10}\cancel{20}}{\cancel{2}_1} = \frac{10}{1} = 10$$

Dakle prvo rjesenje jednko je $p_1 = 10$. Odredimo jos i drugo rjesenje, slijedi:

$$p_2 = \frac{200 + 180}{2} = \frac{360}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$p_2 = \frac{{}^{190}\cancel{380}}{\cancel{2}_1} = \frac{190}{1} = 190$$

Drugo rjesenje jednako je $p_2 = 190$.

Tocno rijesenje jest $p_1 = 10$ odnosno 10%. Naime nemoguce je da postotak bude veci od 100% jer u tom slucaju cijena bi pala ispod 0. Time je zadatak rijesen.

<u>Zadatak 11</u>: (str. 43) Postoji li trokut

1) cije su duljine stranica uzastopni neparni cijeli brojevi?
2) cije su duljine stranica uzastopni parni cijeli brojevi?

<u>Rjesenje</u>: Krenimo redom, prisjetimo se da su neparni cijeli brojevi oblika $2n - 1$ za $n \in \mathbb{Z}$. Kako svaki trokut ima tri stranice potrebna su nam tri uzastopna neparna cijela broja. Radi se o sljedecim brojevima:

$$\begin{aligned}
2n - 1 \quad &\Rightarrow \quad 2 \cdot (n - 1) - 1 = 2 \cdot n - 2 \cdot 1 - 1 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = 2n - 2 - 1 = 2n - 3 \\
2n - 1 \quad &\Rightarrow \quad 2n - 1 \\
2n - 1 \quad &\Rightarrow \quad 2 \cdot (n + 1) - 1 = 2 \cdot n + 2 \cdot 1 - 1 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = 2n + 2 - 1 = 2n + 1
\end{aligned}$$

Dakle tri uzastopna neparna cijela broja su $2n-3$, $2n-1$, $2n+1$ za neki $n \in \mathbb{Z}$. Uocimo da je najveci od tih brojeva broj $2n + 1$ i to je velicina hipotenuze dok preostala dva broja tada predstavljaju duljine kateta.

Ako je trokut pravokutan, njegove stranice moraju zadovoljavati Pitagorin poucak. Neka je:

$$\begin{aligned}
\text{hipotenuza} \quad &\Rightarrow \quad c = 2n + 1 \\
\text{jedna kateta} \quad &\Rightarrow \quad a = 2n - 1 \\
\text{druga kateta} \quad &\Rightarrow \quad b = 2n - 3
\end{aligned}$$

Racunamo:

$$\underset{2n+1}{c^2} = \overset{2n-1}{a^2} + \underset{2n-3}{b^2}$$

$$(2n+1)^2 = (2n-1)^2 + (2n-3)^2$$

Raspisemo sve zagrade prema izrazu za kvadrat binoma, odnoso prema $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, slijedi:

$$(2n)^2 + 2 \cdot 2n \cdot 1 + 1^2 = (2n)^2 - 2 \cdot 2n \cdot 1 + 1^2 + (2n)^2 - 2 \cdot 2n \cdot 3 + 3^2$$

$$(2n)^2 + 4n + 1 = (2n)^2 - 4n + 1 + (2n)^2 - 12n + 9$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\cancel{(2n)^2} + 4n + \cancel{1} = \cancel{(2n)^2} - 4n + \cancel{1} + (2n)^2 - 12n + 9$$

$$4n = -4n + (2n)^2 - 12n + 9$$

Zbrojimo sto se zbrojiti dade, slijedi:

$$4n = (2n)^2 - 16n + 9$$

Raspisemo zagradu prema izrazu za mnozenje potencija istih eksponenata, osnosno prema $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, slijedi:

$$4n = \overset{4}{2^2} \cdot n^2 - 16n + 9$$

$$4n = 4n^2 - 16n + 9$$

Prebacimo sve izraze s lijeve na desnu stranu jednakosti, slijedi:

$$4n = 4n^2 - 16n + 9$$

$$0 = 4n^2 - 16n + 9 - 4n$$

Zbrojimo sto se zbrojiti dade, slijedi:

$$0 = 4n^2 - 20n + 9$$

Zapisimo dobiveni izraz malo drugacije, vrijedi:

$$4n^2 - 20n + 9 = 0$$

Dakle dobili smo kvadratnu jednadzbu $4n^2 - 20n + 9 = 0$. Ispisimo njene koeficijente, vrijedi:

$$\overset{a}{4}n^2 \overset{b}{-20}n + \overset{c}{9} = 0$$

$$a = 4$$

$$b = -20$$

$$c = 9$$

Rjesenja kvadratne jednadzbe trazimo pomoocu izraza:

$$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Racunam:

$$n_{1,2} = \frac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4}$$

$$n_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 144}}{8}$$

$$n_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{256}}{8}$$

$$n_{1,2} = \frac{20 \pm 16}{8}$$

Odredimo prvo rjesenje, racunamo:

$$n_1 = \frac{20 - 16}{8} = \frac{4}{8}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$n_1 = \frac{{}^{1}\cancel{4}}{\cancel{8}_{2}} = \frac{1}{2}$$

Dakle prvo rjesenje jednko je $n_1 = \frac{1}{2}$. Odredimo jos i drugo rjesenje, slijedi:

$$n_2 = \frac{20 + 16}{8} = \frac{36}{8}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$n_2 = \frac{{}^{9}\cancel{36}}{\cancel{8}_{2}} = \frac{9}{2}$$

Drugo rjesenje jednako je $n_2 = \frac{9}{2}$. Kako nijedno rjesenje nije cijeli broj, zakljucujemo da ne postoji pravokutan trokut cije su stranice uzastopni neparni cijeli brojevi.

Zadatak pod 2) rijesi se na potpuno isti nacin. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 17: (str. 43) Zbroj n uzastopnih prirodnih brojeva s pocetnim brojem 1 je 1035. Koliki je n?

Rjesenje: Prisjetimo se ovdje Gaussa i njegovog izraza za zbroj prvih n prirodnih brojeva. Naime vrijedi:

$$1+2+3+...+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Dakle trazimo broj n tako da suma prvih n brojeva bude jednaka 1035. Dakle trebamo rijesiti sljedecu jednadzbu:

$$\frac{n\cdot(n+1)}{2}=1035$$

Pomnozimo cijeli izraz s 2, slijedi:

$$\frac{n\cdot(n+1)}{2}=1035\ /\cdot 2$$

$$\frac{n\cdot(n+1)}{2}\cdot 2=1035\cdot 2$$

$$\frac{n\cdot(n+1)}{2}\cdot 2=2070$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{n\cdot(n+1)}{{}_1\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}^1}{1}=2070$$

$$\frac{n\cdot(n+1)}{1}=2070$$

$$n\cdot(n+1)=2070$$

Rijesimo se zagrade na lijevoj strani jednakosti, slijedi:

$$n^2+n=2070$$

Prebacimo sve izraze s desne strane jednakosti na lijevu, slijedi:

$$n^2+n=2070$$

$$n^2+n-2070=0$$

Dakle dobili smo kvadratnu jednadzbu $n^2+n-2070=0$. Ispisimo njene koeficijente, vrijedi:

$$\overset{a}{1}\cdot n^2+\overset{b}{1}\cdot p-\overset{c}{2070}=0$$

$$a = 1$$

$$b = 1$$

$$c = -2070$$

Rjesenja kvadratne jednadzbe trazimo pomoocu izraza:

$$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Racunam:

$$n_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2070)}}{2 \cdot 1}$$

$$n_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8280}}{2}$$

$$n_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{8281}}{2}$$

$$n_{1,2} = \frac{-1 \pm 91}{2}$$

Odredimo prvo rjesenje, racunamo:

$$n_1 = \frac{-1 - 81}{2} = \frac{-82}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$n_1 = \frac{{}^{-41}\cancel{-81}}{\cancel{2}_1} = \frac{-41}{1} = -41$$

Dakle prvo rjesenje jednko je $n_1 = -41$. Odredimo jos i drugo rjesenje, slijedi:

$$n_2 = \frac{-1 + 81}{2} = \frac{80}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$n_2 = \frac{{}^{40}\cancel{80}}{\cancel{2}_1} = \frac{40}{1} = 40$$

Drugo rjesenje jednako je $n_2 = 40$.

Kako zbroj negativnih brojeva ne moze biti pozitivan jedino prihvatljivo rjesenje jest $n = 40$, odnosno prvih 40 prirodnih brojeva u zbroju daje 1035. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 18: (str. 43) Broj n stranica konveksnog mnogokuta dva puta je manji od broja njegovih dijagonala. Koliko stranica ima taj mnogokut?

Rjesenje: Prije svega prisjetimo se da broj dijagonala u konveksnom mnogokutu s n vrhova racunamo pomocu sljedeceg izraza:

$$N_{\text{dijagonale}} = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

Napomenimo ovdje da je broj stranica i vrhova u mnogokutu uvijek jednak. Prema podacima zadatka broj dijagonala dva puta je veci od broja stranica, odnosno mora vrijediti sljedeca jednakost:

$$\overbrace{\frac{n \cdot (n-3)}{2}}^{\text{broj dijagonala}} = 2 \cdot \overset{\text{broj stranica}}{n}$$

Pomnozimo cijelu jednakost s brojem 2, slijedi:

$$\frac{n \cdot (n-3)}{2} = 2n \; / \cdot 2$$

$$\frac{n \cdot (n-3)}{2} \cdot 2 = 2n \cdot 2$$

$$\frac{n \cdot (n-3)}{2} \cdot 2 = 4n$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{n \cdot (n-3)}{{}_1\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}^1}{1} = 4n$$

$$\frac{n \cdot (n-3)}{1} = 4n$$

$$n \cdot (n-3) = 4n$$

Rijesimo se zagrade na lijevoj strani jednakosti, slijedi:

$$n^2 - 3n = 4n$$

Prebacimo sve izraze s desne na lijevu stranu jednakosti, slijedi:

$$n^2 - 3n = 4n$$

$$n^2 - 3n - 4n = 0$$

Zbrojimo sto se zbrojiti dade, slijedi:

$$n^2 - 7n = 0$$

Izlucimo n iz oba clana sume s lijeve strane jednakosti, slijedi:

$$n \cdot (n-7) = 0$$

Ako je umnozak dvaju brojeva jednak 0 tada barem jedan od ta dva broja mora biti jednak 0. Drugim rijecima vrijedi sljedece:

$$\begin{array}{ccc} & n \cdot (n-7) = 0 & \\ \swarrow & & \searrow \; \hookrightarrow \\ n_1 = 0 & & n - 7 = 0 \\ & & n_2 = 7 \end{array}$$

Kako mnogokut ne moze imati 0 stranica zapravo se radi o konveksnom sedmetokutu, odnosno konveksan sedmerokut ima dvostruko vise dijagonala nego stranica. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 20: (str. 44) Dvije radnice, rade li zajedno, obave neki posao za 8 sati. Prva bi radnica radec i sama isti posao obavila 12 sati brze nego kada bi taj posao obavljala samo druga radnica. Za koliko bi sati posao obavila svaka od njih radeci sama?

Rjesenje: Oznacimo broj sati za koje prva radnica obavi posao s x, a vrijeme za koji druga radnica obavi posao s y. Kako je prva radnica za 12 sati brza od druge radnice mora vrijediti sljedeca jednakost:

$$x + 12 = y$$

Da bismo problem rijesili do kraja treba nam jos jedna jednakost. Do nje cemo doci na sljedeci nacin. Posto smo prema vremenu potrebnom da obavljanje posla postavili jednakost ostaje nam jos pokusati napisati jednakost vezanu uz obavljeni posao. Za to nam treba neka "temeljna jedinica", a to neka bude dio obavljenog posla za jedan sat. Dakle vrijedi sljedece:

$$\text{Prva radnica za jedan sat obavi } \frac{1}{x} \text{ posla}$$

$$\text{Druga radnica za jedan sat obavi } \frac{1}{y} \text{ posla}$$

Obje radnice onda za jedan sat obave tocno $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ posla. No mi tocno znamo da objema radnicama treba 8 sati da obave cijeli posao. To pak znaci da one obje za jedan sat obave $\frac{1}{8}$ posla. Dakle mora vrijediti sljedeca jednakost:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}$$

Drugim rijecima time smo dobili sljedeci sustav jednadzbi:

$$\begin{cases} x + 12 = y \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Kako je vec u prvoj jednadzbi nepoznanica y prikazana pomocu nepoznanice x, tu cinjenicu primjenimo na drugu jednadzbu, slijedi:

$$\frac{1}{x} + \underset{\substack{\downarrow \\ x+12}}{\frac{1}{y}} = \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{8}$$

Pomnozimo cijelu jednakost izrazom $8 \cdot x \cdot (x + 12)$, slijedi:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{8} \ / \cdot 8 \cdot x \cdot (x + 12)$$

$$\frac{1}{x} \cdot 8 \cdot x \cdot (x + 12) + \frac{1}{x+2} \cdot 8 \cdot x \cdot (x + 12) = \frac{1}{8} \cdot 8 \cdot x \cdot (x + 12)$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{1}{{}_1\cancel{x}} \cdot \frac{8 \cdot \cancel{x}^1 \cdot (x + 12)}{1} + \frac{1}{{}_1\cancel{x+2}} \cdot \frac{8 \cdot x \cdot \cancel{(x + 12)}^1}{1} = \frac{1}{{}_1\cancel{8}} \cdot \frac{\cancel{8}^1 \cdot x \cdot (x + 12)}{1}$$

$$\frac{8 \cdot (x + 12)}{1} + \frac{8 \cdot x}{1} = \frac{x \cdot (x + 12)}{1}$$

$$8 \cdot (x + 12) + 8 \cdot x = x \cdot (x + 12)$$

Rijesimo se zagrada ne obadvije strane jednakosti, slijedi:

$$8x + 96 + 8x = x^2 + 12x$$

Zbrojimo sto se zbrojiti dade, slijedi:

$$16x + 96 = x^2 + 12x$$

Prebacimo sve izraze s lijeve na desnu stranu jednakosti, slijedi:

$$\overset{\mapsto}{16x} + \overset{\mapsto}{96} = x^2 + 12x$$

$$0 = x^2 + 12x - 16x - 96$$

Zbrojimo sto se zbrojiti dade, slijedi:

$$0 = x^2 - 4x - 96$$

Zapisimo dobiveni izraz malo drugacije, vrijedi:

$$x^2 - 4x - 96 = 0$$

Dakle dobili smo kvadratnu jednadzbu $x^2 - 28x - 96 = 0$. Ispisimo njene koeficijente, vrijedi:

$$\overset{a}{1} \cdot x^2 \overset{b}{- 4}x \overset{c}{- 96} = 0$$

$$a = 1$$

$$b = -4$$

$$c = -96$$

Rjesenja kvadratne jednadzbe trazimo pomoocu izraza:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Racunam:

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-96)}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 384}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{400}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 20}{2}$$

Odredimo prvo rjesenje, racunamo:

$$x_1 = \frac{4 - 20}{2} = \frac{-16}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$x_1 = \frac{\cancelto{-8}{-16}}{\cancelto{1}{2}} = \frac{-8}{1} = -8$$

Dakle prvo rjesenje jednko je $x_1 = -8$. Odredimo jos i drugo rjesenje, slijedi:

$$x_2 = \frac{4 + 20}{2} = \frac{24}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$x_2 = \frac{\cancelto{12}{24}}{\cancelto{1}{2}} = \frac{12}{1} = 12$$

Drugo rjesenje jednako je $x_2 = 12$.

Kako vrijeme ne moze biti negativna velicina mozemo zakljuciti da je prvoj radnici potrebno 12 sati da sama obavi posao. Odredimo jos koliko vremena treba drugoj radnici da obavi posao, racunamo:

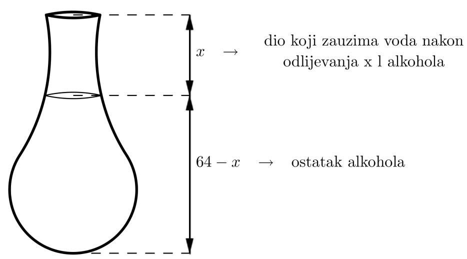
$$\overset{\overset{12}{\downarrow}}{x} + 12 = y$$

$$12 + 12 = y \quad \Rightarrow \quad y = 24$$

Dakle drugoj radnici treba 24 sata da bi sama obavila posao. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 23: (str. 44) Iz spremnika punog cistog alkohola odlije se neka kolicina alkohola te se spremnik dopuni vodom. Zatim se odlije jednaka kolicina razrijedjenog alkohola. Nakon toga je u spremniku ostala smjesa u kojoj je 49 litara cistog alkohola. Ako je obujam spremnika 64 litre, koliko je alkohola odliveno pri prvom, a koliko pri drugom odlijevanju?

Rjesenje: S nepoznanicom x oznacit cemo kolicinu alkohola koja je odlivena kod prvog odlijevanja. Prikazimo to graficki:



Dakle pri prvom odlijevanju odliveno je $\frac{x}{64}$ od ukupne kolicine alkohola. Pri sljedecem odlijevanju odlivena je ista kolicina ukupne tekucine, no to znaci da je u sljedecem odlijevanju odliveno tocno:

$$\underbrace{\frac{x}{64}}_{\text{udio odliven nakon prvog odlijevanja}} \cdot \overbrace{(64 - x)}^{\text{dio preostalog alkohola nakon prvog odlijevanja}}$$

alkohola. Dakle kolicina alkohola koja je ostala nakon drugog odlijevanja jest:

$$\underbrace{64 - x}_{\text{kolicina lkohola nakon prvog odlijevanja}} - \overbrace{\frac{x}{64} \cdot (64 - x)}^{\text{udio alkohola odlivenog nakon drugog odlijevanja}}$$

Kako je konacna kolicina alkohola koji preostaje nakoon oba odlijevanja jednaka 49 vrijedi sljedeca jednadzba:

$$64 - x - \frac{x}{64} \cdot (64 - x) = 49$$

Pomnozimo cijelu jednakost s brojem 64, slijedi:

$$64 - x - \frac{x}{64} \cdot (64 - x) = 49 \ / \cdot 64$$

$$64 \cdot 64 - x \cdot 64 - \frac{x}{64} \cdot (64 - x) \cdot 64 = 49 \cdot 64$$

$$4096 - 64x - \frac{x}{64} \cdot (64 - x) \cdot 64 = 3136$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$4096 - 64x - \frac{x}{{}_1\cancel{64}} \cdot (64 - x) \cdot \frac{\cancel{64}^1}{1} = 3136$$

$$4096 - 64x - \frac{x\,(64 - x)}{1} = 3136$$

$$4096 - 64x - x\,(64 - x) = 3136$$

Rijesimo se zagrade na lijevoj strani jednakosti, slijedi:

$$4096 - 64x - 64x + x^2 = 3136$$

Ybrojimo sto se zbrojiti dade, slijedi:

$$4096 - 128x + x^2 = 3136$$

Prebacimo sve s desne strane jednakosti na lijevu, slijedi:

$$4096 - 128x + x^2 = 3136$$

$$4096 - 128x + x^2 - 3136 = 0$$

$$960 - 128x + x^2 = 0$$

Poredamo potenicje prema stupnju, slijedi:

$$x^2 - 128x + 960 = 0$$

Dakle dobili smo kvadratnu jednadzbu $x^2 - 28x - 96 = 0$. Ispisimo njene koeficijente, vrijedi:

$$\overset{a}{1} \cdot x^2 \overset{b}{\boxed{-128}}x + \overset{c}{960} = 0$$

$$a = 1$$

$$b = -128$$

$$c = 960$$

Rjesenja kvadratne jednadzbe trazimo pomoocu izraza:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Racunam:

$$x_{1,2} = \frac{-(-128) \pm \sqrt{(-128)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 960}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{128 \pm \sqrt{16384 - 3840}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{128 \pm \sqrt{12544}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{128 \pm 112}{2}$$

Odredimo prvo rjesenje, racunamo:

$$x_1 = \frac{128 - 112}{2} = \frac{16}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$x_1 = \frac{^{8}\cancel{16}}{\cancel{2}_1} = \frac{8}{1} = 8$$

Dakle prvo rjesenje jednko je $x_1 = 8$. Odredimo jos i drugo rjesenje, slijedi:

$$x_2 = \frac{128 + 112}{2} = \frac{240}{2}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$x_2 = \frac{^{120}\cancel{240}}{\cancel{2}_1} = \frac{120}{1} = 120$$

Drugo rjesenje jednako je $x_2 = 120$.

Kako je druga kolicina veca od ukupne zapremnine spremnika zakljucujemo da je u prvom odlijevanju odliveno 8 litara alkohola. Kolko je alkohola odliveno u drugom odlijevanju izracunat cemo iz izraza:

$$\frac{x}{64} \cdot (64 - x)$$

Primjenimo cinjenicu da vrijedi $x = 8$, slijedi:

$$\overset{\overset{8}{\downarrow}}{\frac{x}{64}} \cdot (64 - \underset{\underset{8}{\uparrow}}{x}) = \frac{8}{64} \cdot (64 - 8) = (\star)$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$(\star) = \frac{{}^{1}\cancel{8}}{\cancel{64}_{8}} \cdot 56 = \frac{1}{8} \cdot \frac{56}{1} = \frac{56}{8} = (\star\star)$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$(\star\star) = \frac{{}^{7}\cancel{56}}{\cancel{8}_{1}} = \frac{7}{1} = 7$$

Dakle pri drugom odlijevanju odliveno je 7 litara alkohola. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 24: (str. 44) Zracna udaljenost Zagreba i Frankfurta iznosi 880 km. Od Zagreba do Frankfurta zrakoplov je letio brzinom koja je za 20 km/h bila veca od brzine na povrtaku. Ako je ukupno trajanje leta u oba smjera iznosilo 3 sata, kojom je brzinom zrakoplov letio na putu iz Zagreba u Frankfurt?

Rjesenje: S nepoznanicom v_1 oznacit cemo brzinu zrakoplova na putu iz Zagreba u Frankfurt, dok cemo brzinu zrakoplova na putu iz Frankfurta u Zagreb oznaciti s v_2. Imajuci to na umu mora vrijediti:

$$v_1 = v_2 + 20$$

Nadalje prijedjeni put od Zagreba do Frankfurta oznacit cemo s s_1, dok cemo prijedjeni put od Frankfurta do Zagreba oznaciti s s_2. No kako zrakoplov leti istim putem tamo i natrag, mora vrijediti sljedeca jednakost:

$$s_1 = s_2 = 880$$

Vrijeme koje je potrebno da zrakoplov prevali put od Zagreba do Frankfurta oznacit cemo s t_1, dok cemo vrijeme potrebno za prevaljivanje puta od Frankfurta do Zagreba ozaciti s t_2. U tom slucaju mora vrijediti sljedeca jednakost:

$$t_1 + t_2 = 3$$

Prebacimo nepoznanic t_2 s lijeve na desnu stranu jednakosti, slijedi:

$$t_1 + t_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 3 - t_2$$

Da bismo spojili sve ove jednakosti sjetimo se fizike i nacina na koji se odredjuje prijedjeni put. Naime vrijedi:

$$\overset{\substack{\text{prijedjeni put}\\ \searrow}}{s} = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{brzina}}}{v} \cdot \overset{\substack{\text{potrebno vrijeme}\\ \swarrow}}{t}$$

To znaci da mozemo zapisati sljedece dvije jednakosti, jednu koja se odnosi na putovanje od Zagreba do Frankfurta i drugu za putovanje od Frankfurta do Zagreba, naime vrijedi:

$$s_1 = v_1 \cdot t_1 \quad \text{i} \quad s_2 = v_2 \cdot t_2$$

Prisjetimo se da su iznosi prijedjenog puta s_1 i s_2 jednaki, no to znaci da druga jednakost poprima sljedeci oblik:

$$\overset{\substack{s_1\\ \downarrow}}{s_2} = v_2 \cdot t_2 \quad \Rightarrow \quad s_1 = v_2 \cdot t_2$$

Kako su sada lijeve strane obiju jendakosti jednake, tako moraju biti jednake i njihove desne strane, slijedi:

$$s_1 = v_1 \cdot t_1 \quad \text{i} \quad s_1 = v_2 \cdot t_2$$

$$v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2$$

Uvrstimo cinjenice da vrijedi $v_1 = v_2 + 20$ i $t_1 = 3 - t_2$ u dobivenu jednakost, slijedi:

$$\overset{\substack{v_2+20\\ \downarrow}}{v_1} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ 3-t_2}}{t_1} = v_2 \cdot t_2$$

$$(v_2 + 20) \cdot (3 - t_2) = v_2 \cdot t_2$$

Rijesimo se zagrada na lijevoj strani jednakosti tako da svaki clan prve zagrade pomnizimo svakim clanom druge zagrade, slijedi:

$$3v_2 - v_2 \cdot t_2 + 60 - 20t_2 = v_2 \cdot t_2$$

Dakle kao vrijedi $s_2 = v_2 \cdot t_2$, o oba prevaljena puta, dakle i s_1 i s_2, su jednaka 880, zamijenit cemo svako pojavljivanje izraza $v_2 \cdot t_2$ s 880, slijedi:

$$3v_2 - \overset{\substack{880\\ \downarrow}}{v_2 \cdot t_2} + 60 - 20t_2 = \overset{\substack{880\\ \downarrow}}{v_2 \cdot t_2}$$

$$3v_2 - 880 + 60 - 20t_2 = 880$$

Prebacimo sve poznanice s lijeve strane jednakosti na desnu, slijedi:

$$3v_2 - \overset{\Rsh}{880} + \overset{\Rsh}{60} - 20t_2 = 880$$

$$3v_2 - 20t_2 = 880 + 880 - 60$$

Zbrojimo sto se zbrojiti dade, slijedi:

$$3v_2 - 20t_2 = 1700$$

Dakle kako vrijedi $v_2 \cdot t_2 = 880$ ono sto trebamo rijesiti je sljedeci sustav jednadzbi:

$$\begin{cases} v_2 \cdot t_2 = 880 \\ 3v_2 - 20t_2 = 1700 \end{cases}$$

Pomnozimo prvu jednadzbu s $\frac{1}{v_2}$, slijedi:

$$v_2 \cdot t_2 = 880 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{v_2}$$

$$v_2 \cdot t_2 \cdot \frac{1}{v_2} = 880 \cdot \frac{1}{v_2}$$

$$\frac{v_2 \cdot t_2}{v_2} = \frac{880}{v_2}$$

Pokratimo sto se poktatiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^1\cancel{v_2} \cdot t_2}{\cancel{v_2}_1} = \frac{880}{v_2}$$

$$\frac{t_2}{1} = \frac{880}{v_2}$$

$$t_2 = \frac{880}{v_2}$$

Primjenimo dobivenu jednakost na drugu jednadzbu, slijedi:

$$3v_2 - 20\overset{\overset{\frac{880}{v_2}}{\downarrow}}{t_2} = 1700$$

$$3v_2 - 20 \cdot \frac{880}{v_2} = 1700$$

$$3v_2 - \frac{17600}{v_2} = 1700$$

Pomnozimo cijelu jednakost s v_2, slijedi:

$$3v_2 - \frac{17600}{v_2} = 1700 \; / \cdot v_2$$

$$3v_2 \cdot v_2 - \frac{17600}{v_2} \cdot v_2 = 1700 \cdot v_2$$

$$3v_2^2 - \frac{17600 \cdot v_2}{v_2} = 1700v_2$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$3v_2^2 - \frac{17600 \cdot^1 \cancel{v_2}}{\cancel{v_2}_1} = 1700v_2$$

$$3v_2^2 - \frac{17600}{1} = 1700v_2$$

$$3v_2^2 - 17600 = 1700v_2$$

Prebacimo sve izraze s desne strane jednakosti na lijevu, slijedi:

$$3v_2^2 - 17600 = 1700v_2$$

$$3v_2^2 - 17600 - 1700v_2 = 0$$

Poredamo potencije po njihovom stupnju, slijedi:

$$3v_2^2 - 1700v_2 - 17600 = 0$$

Dakle dobili smo kvadratnu jednadzbu $3v_2^2 - 1700v_2 - 17600 = 0$. Ispisimo njene koeficijente, vrijedi:

$$\overset{a}{3}v_2^2 \overset{b}{\overbrace{- 1700}}v_2 \overset{c}{- 17600} = 0$$

$$a = 3$$

$$b = -1700$$

$$c = -17600$$

Rjesenja kvadratne jednadzbe trazimo pomoocu izraza:

$$v_{2_{1,2}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Racunam:

$$v_{2_{1,2}} = \frac{-(-1700) \pm \sqrt{(-1700)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-17600)}}{2 \cdot 3}$$

$$v_{2_{1,2}} = \frac{1700 \pm \sqrt{2890000 + 211200}}{6}$$

$$v_{2_{1,2}} = \frac{1700 \pm \sqrt{3101200}}{6}$$

$$v_{2_{1,2}} = \frac{1700 \pm 20\sqrt{7753}}{6}$$

Odredimo prvo rjesenje, racunamo:

$$v_{2_1} = \frac{1700 - 20\sqrt{7753}}{6} \approx 10.17$$

Dakle prvo rjesenje jednako je $v_{2_1} = 10.17$. Odredimo jos i drugo rjesenje, slijedi:

$$v_{2_2} = \frac{1700 - 20\sqrt{7753}}{6} \approx 576.837$$

Drugo rjesenje jednako je $v_{2_2} = 576.837$.

Kako je nemoguce da zrakoplov leti brzinom od 10.17 km/h, dakle brzina kojom se zrakoplov vracao iz Frankfurta u Zagreb bila je 576.837 km/h. Preostaje jos odrediti kolikom je brzinom zrakoplov putovao od Zagreba do Frankfurta. Racunamo:

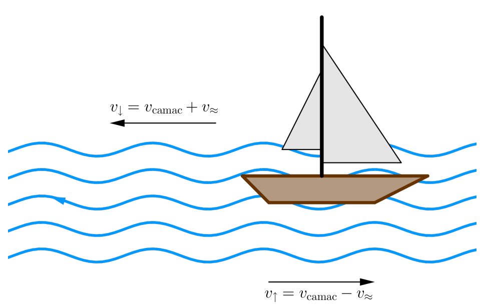
$$v_1 = \overset{\overset{576.837}{\downarrow}}{v_2} + 20 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 576.837 + 20$$

$$v_1 = 596.837$$

Dakle brzina zrakoplova na putu od Zagreba do Frankfurta bila je 596.837 km/h. Time je zadatak rijesen.

Zadatak 24: (str. 44) Camac plovi iz mjesta A uzvodno do mjesta B i vraca se istim putem natrag. Put traje 3 sata. Udaljenost od A do B je 12 km. Brzina camca po mirnoj vodi iznosi 10 km/h. Koja je brzina rijecnog toka?

Rjesenje: S nepoznanicom $v_{\approx}$ oznacit cemo brzinu rijecnog toka, a s oznakom v_{camac} oznacimo brzinu camca na mirnoj vodi. Vrijedi $v_{\text{camac}} = 10$. Promotrimo sljedecu sliku:



Dakle brzinu camca uzvodno oznacit cemo nepoznanicom $v_\uparrow$, a brzinu camca nizvodno s nepoznanicom $v_\downarrow$. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}
v_\uparrow &= \overset{\overset{10}{\downarrow}}{v_{\text{camac}}} - v_\approx &&\Rightarrow\quad v_\uparrow = 10 - v_\approx\\
v_\downarrow &= \underset{\underset{10}{\uparrow}}{v_{\text{camac}}} + v_\approx &&\Rightarrow\quad v_\downarrow = 10 + v_\approx
\end{aligned}$$

Nadalje s nepoznanicom $t_\uparrow$ oznacit cemo vrijeme za koje camac prevali put izmedju A i B uzvodno, a s nepoznanicom $t_\downarrow$ vrijeme za koje camac prevali put izmedju A i B nizvodno. Kako je ukupno putovanje trajalo 3 sata, mora vrijediti sljedeca jednakost:

$$t_\uparrow + t_\downarrow = 3$$

Putevi koje camac prevali uzvodno i nizvodno su jednaki i iznose 12 km. Prevaljeni put oznacit cemo s oznakom s.

Prisjetimo se fizike i nacina na koji se odredjuje prijedjeni put. Naime vrijedi:

$$\overset{\text{prijedjeni put}\ \searrow}{s} = \underset{\underset{\text{brzina}}{\uparrow}}{v} \cdot \overset{\swarrow\ \text{potrebno vrijeme}}{t}$$

Koristeci se tim izrazom mozemo zapisati sljedece dvije jednakosti:

$$\begin{aligned}
s &= \overset{v_\uparrow \searrow}{v} \cdot \overset{\swarrow t_\uparrow}{t} &&\Rightarrow\quad s = v_\uparrow \cdot t_\uparrow\\
s &= \underset{v_\downarrow \nearrow}{v} \cdot \underset{\nwarrow t_\downarrow}{t} &&\Rightarrow\quad s = v_\downarrow \cdot t_\downarrow
\end{aligned}$$

Nadalje imajuci na umu da vrijedi $v_\uparrow = 10 - v_\approx$ i $v_\downarrow = 10 + v_\approx$ jednakosti poprimaju sljedeci oblik, vrijedi:

$$\begin{aligned}
s &= \overset{\overset{10 - v_\approx}{\downarrow}}{v_\uparrow} \cdot t_\uparrow &&\Rightarrow\quad s = (10 - v_\approx) \cdot t_\uparrow\\
s &= \underset{\underset{10 + v_\approx}{\uparrow}}{v_\downarrow} \cdot t_\downarrow &&\Rightarrow\quad s = (10 + v_\approx) \cdot t_\downarrow
\end{aligned}$$

Pomnozimo prvu jednakost s $\dfrac{1}{10 - v_\approx}$, a drugu jednakost s $\dfrac{1}{10 + v_\approx}$, slijedi:

$$s = (10 - v_\approx) \cdot t_\uparrow \quad \Big/ \cdot \frac{1}{10 - v_\approx}$$

$$s = (10 + v_\approx) \cdot t_\downarrow \quad \Big/ \cdot \frac{1}{10 - v_\approx}$$

$$s \cdot \frac{1}{10 - v_{\approx}} = (10 - v_{\approx}) \cdot t_{\uparrow} \cdot \frac{1}{10 - v_{\approx}}$$

$$s \cdot \frac{1}{10 + v_{\approx}} = (10 + v_{\approx}) \cdot t_{\downarrow} \cdot \frac{1}{10 + v_{\approx}}$$

$$\frac{s}{10 - v_{\approx}} = \frac{{}^{1}\cancel{(10 - v_{\approx})} \cdot t_{\uparrow}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{10 - v_{\approx}}_{1}}$$

$$\frac{s}{10 + v_{\approx}} = \frac{{}^{1}\cancel{(10 + v_{\approx})} \cdot t_{\downarrow}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{10 + v_{\approx}}_{1}}$$

$$\frac{s}{10 - v_{\approx}} = \frac{t_{\uparrow}}{1}$$

$$\frac{s}{10 + v_{\approx}} = \frac{t_{\downarrow}}{1}$$

$$\frac{s}{10 - v_{\approx}} = t_{\uparrow}$$

$$\frac{s}{10 + v_{\approx}} = t_{\downarrow}$$

S dobivenim jednakostima vartimo se u jednakost $t_{\uparrow} + t_{\downarrow} = 3$, slijedi:

$$\begin{array}{ccc} \frac{s}{10 - v_{\approx}} & & \frac{s}{10 + v_{\approx}} \\ \searrow & & \swarrow \\ & t_{\uparrow} + t_{\downarrow} = 3 & \end{array}$$

$$\frac{s}{10 - v_{\approx}} + \frac{s}{10 + v_{\approx}} = 3$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $(10 - v_{\approx}) \cdot (10 + v_{\approx})$, slijedi:

$$\frac{s}{10 - v_{\approx}} + \frac{s}{10 + v_{\approx}} = 3 \Big/ \cdot (10 - v_{\approx}) \cdot (10 + v_{\approx})$$

$$\frac{s}{10 - v_{\approx}} \cdot (10 - v_{\approx}) \cdot (10 + v_{\approx}) + \frac{s}{10 + v_{\approx}} \cdot (10 - v_{\approx}) \cdot (10 + v_{\approx}) = 3 \cdot (10 - v_{\approx}) \cdot (10 + v_{\approx})$$

Pokratimo sto se poktatit dade, slijedi:

$$\frac{s}{{}_{1}\cancel{10 - v_{\approx}}} \cdot \frac{\cancel{(10 - v_{\approx})}^{1} \cdot (10 + v_{\approx})}{1} + \frac{s}{{}_{1}\cancel{10 + v_{\approx}}} \cdot \frac{(10 - v_{\approx}) \cdot \cancel{(10 + v_{\approx})}^{1}}{1} = 3 \cdot (10 - v_{\approx}) \cdot (10 + v_{\approx})$$

$$\frac{s \cdot (10 + v_{\approx})}{1} + \frac{s \cdot (10 - v_{\approx})}{1} = 3 \cdot (10 - v_{\approx}) \cdot (10 + v_{\approx})$$

$$s \cdot (10 + v_{\approx}) + s \cdot (10 - v_{\approx}) = 3 \cdot (10 - v_{\approx}) \cdot (10 + v_{\approx})$$

Na desnoj strani jednakosti prepoznajemo razliku kvadrata koju cemo raspisati prema sljedecem izrazu $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$, slijedi:

$$s \cdot (10+v_{\approx}) + s \cdot (10-v_{\approx}) = 3 \cdot \underbrace{(10-v_{\approx}) \cdot (10+v_{\approx})}_{\downarrow \atop 10^2 - v_{\approx}^2}$$

$$s \cdot (10+v_{\approx}) + s \cdot (10-v_{\approx}) = 3 \cdot \left(10^2 - v_{\approx}^2\right)$$

Rijesimo se zagrada na lijevoj strani jednakosti, slijedi:

$$s \cdot 10 + s \cdot v_{\approx} + s \cdot 10 - s \cdot v_{\approx} = 3 \cdot \left(100 - v_{\approx}^2\right)$$

$$10s + s \cdot v_{\approx} + 10s - s \cdot v_{\approx} = 3 \cdot \left(100 - v_{\approx}^2\right)$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$10s + \cancel{s \cdot v_{\approx}} + 10s \cancel{- s \cdot v_{\approx}} = 3 \cdot \left(100 - v_{\approx}^2\right)$$

$$10s + 10s = 3 \cdot \left(100 - v_{\approx}^2\right)$$

Zbrojimo sto se zbrojiti dade, slijedi:

$$20s = 3 \cdot \left(100 - v_{\approx}^2\right)$$

Prisjetimo se da je put jednak 12 km, pa zamijenimo s u jednakosti s brojem 12, slijedi:

$$20\overset{12}{s} = 3 \cdot \left(100 - v_{\approx}^2\right)$$

$$20 \cdot 12 = 3 \cdot \left(100 - v_{\approx}^2\right)$$

$$240 = 3 \cdot \left(100 - v_{\approx}^2\right)$$

Pomnozimo cijelu jednakost s $\frac{1}{3}$, slijedi:

$$240 = 3 \cdot \left(100 - v_{\approx}^2\right) \quad \Big/ \cdot \frac{1}{3}$$

$$240 \cdot \frac{1}{3} = 3 \cdot \left(100 - v_{\approx}^2\right) \cdot \frac{1}{3}$$

$$\frac{240}{3} = \frac{3 \cdot \left(100 - v_{\approx}^2\right)}{1} \cdot \frac{1}{3}$$

Pokratimo sto se pokratiti dade, slijedi:

$$\frac{{}^{80}\cancel{240}}{\cancel{3}_1} = \frac{{}^{1}\cancel{3} \cdot \left(100 - v_{\approx}^2\right)}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{3}_1}$$

$$\frac{80}{1} = \frac{100 - v_{\approx}^2}{1}$$

$$80 = 100 - v_{\approx}^2$$

Prebacimo prvi izraz sume na desnoj strani jednakosti, na lijevu stranu jednakosti, slijedi:

$$80 = 100 - v_{\approx}^2$$

$$80 - 100 = -v_{\approx}^2$$

$$-20 = -v_{\approx}^2$$

Pomnozimo cijelu jednakost s -1, slijedi:

$$-20 = -v_{\approx}^2 \ / \cdot (-1)$$

$$-20 \cdot (-1) = -v_{\approx}^2 \cdot (-1)$$

$$20 = v_{\approx}^2$$

Korijenujemo dobiveni izraz, slijedi:

$$20 = v_{\approx}^2 \ / \sqrt{}$$

$$\sqrt{20} = \sqrt{v_{\approx}^2}$$

$$\pm 2\sqrt{5} = v_{\approx}$$

Kako brzina ne moze biti negativna zakljucujemo da je brzina rijecnog toka jednaka $v_{\approx} = 2\sqrt{5}$. Time je zadatak rijesen.